

УДК 519.63

## Новый тип колебаний в системе с трением\*

Иванов А.П., Маурах Г.М.

Научно-технологический университет «Сириус»

*Аннотация:* Рассмотрена динамика утолщённого стержня на плоскости. Сила, приложенная к центру стержня, вынуждает двигаться его с постоянной скоростью. В начальный момент стержень покоится перпендикулярно линии действия силы. В ходе проведенных экспериментов было обнаружено изменение угла между стержнем и нитью, передающей нагрузку, попеременно в положительном и отрицательном направлениях. Показано, что если считать распределение нормальной нагрузки равномерным, то этот эффект невозможен ни при каком законе трения. В качестве объяснения предлагается использовать динамически непротиворечивую модель сухого трения, в которой центр давления находится в передней части стержня (по направлению движения), что приводит к возникновению момента, который поворачивает стержень.

*Ключевые слова:* распределённое трение, колебательные системы.

### 1. Введение

Как известно [1–3], относительное движение шероховатых тел часто сопровождается колебаниями в нормальном или тангенциальном направлениях. Простейшая модель тангенциальных колебаний показана на рис. 1: их причиной является разница в коэффициентах статического и динамического трения. На практике такие колебания в звуковом диапазоне наблюдаются, когда тормоза «визжат». С другой стороны, наличие колебаний может изменить динамику системы с трением [3–6].



Рис. 1. Пример колебаний из-за сил трения.

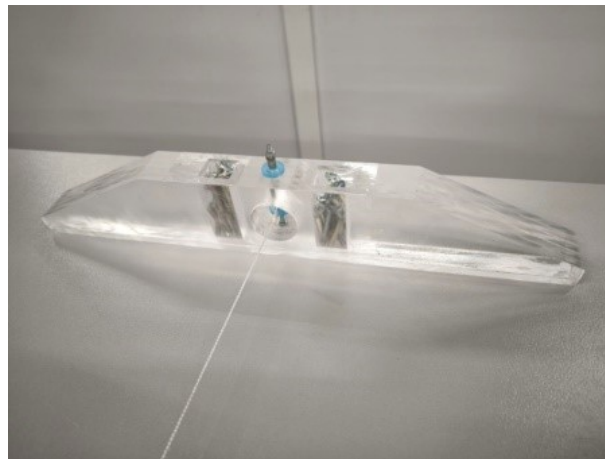
Во всех упомянутых работах распределение нагрузки в зоне контакта считалось равномерным, и вопрос о необходимости учета неравномерности не возникал. В данной статье рассматривается экспериментально обнаруженный эффект колебаний, который не может быть объяснен в рамках модели равномерного распределения для любого закона трения. Обратите внимание, что динамика цилиндра с неравномерным законом распределения обсуждается в статье [2], которая также содержит обширный обзор литературы. Статья организована следующим образом. Во второй главе описывается экспериментальная установка и обнаруженные автоколебания нового типа.

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект №24-11-20009).

В третьей главе построена математическая модель системы, а четвертая глава посвящена расчету распределения нормальной нагрузки в зоне контакта. В пятой главе на основе этой математической модели дается объяснение обнаруженного эффекта.

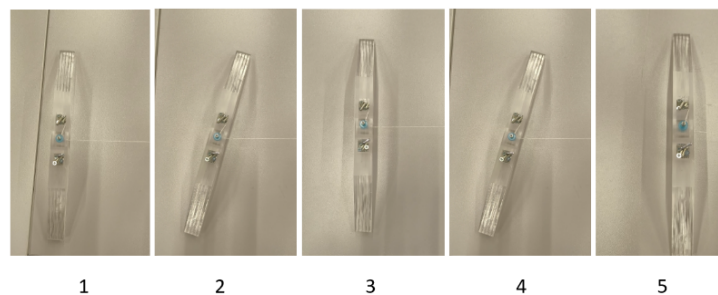
## 2. Описание эксперимента

Для изучения динамики удлиненного твердого тела (бруска) с плоским основанием, движущегося по шероховатой плоскости под действием тянущей силы, была проведена серия экспериментов. Брусок изготовлен из акрила. Края бруска скошены для уменьшения момента инерции (рис. 2). Брус имеет углубления, в которые помещаются равные дополнительные массы. Таким образом, основная масса расположена близко к центру бруска, он имеет большую массу и малый момент вращения по сравнению со сплошным акриловым бруском. В центр бруска вставлена ось диаметром 3 мм. Шайба с резьбой свободно вращается вокруг оси, проходящей через центр масс стержня. Центр масс утяжелителя находится на высоте  $h = 20$  мм, резьба закреплена выше, на высоте 29 мм, на вертикальной оси. Шайба способна поворачиваться на углы в широком диапазоне, не касаясь бруска. Поверхность бруска отшлифована с шероховатостью R1000 и выровнена. Таким образом, основные неровности, создающие трение, расположены на поверхности стола (опоры). Последний представляет собой окрашенную деревянную поверхность.



**Рис. 2.** Экспериментальная модель.

В ряде экспериментов были обнаружены колебания бруска с изменением направления вращения (рис. 3). Положения бруска обозначены числами **1-5**.



**Рис. 3.** Фазы вращения.

Сначала брусок находится в состоянии покоя **1**, затем он начинает вращаться по часовой стрелке **2**, достигая примерно 20 градусов. Далее движение начинается против часовой стрелки. Затем он возвращается в исходное положение **3** и движение периодически повторяется **4-5**. Очевидно, что такое поведение может быть вызвано только действием сил трения. В идеальной ситуации, когда нить закреплена в центре масс блока и нормальная нагрузка распределена равномерно, ориентация блока оставалась бы неизменной. Чтобы объяснить колебания, необходимо использовать закон Амонтона-Кулона, учитывающий неравномерное распределение нормальной нагрузки в зоне контакта.

### 3. Математическая модель системы

Мы изучим динамику блока в ограниченной постановке, учитывая, что его центр  $O$  перемещается вправо по прямой с постоянной скоростью  $V$ , а основной вектор сил трения  $\vec{F}_T$  сонаправлен нити и не изменяется по величине, тогда сила натяжения нити постоянна и равна  $|\vec{F}_T| = \mu P$ , где  $\mu$  – коэффициент трения скольжения, а  $P$  – вес тела. Введем инерциальную систему координат, где ось  $OZ$  направлена вверх, а ось  $OX$  направлена вдоль нити. Вторая система координат  $OX'Y'Z'$  относится к корпусу: ось перпендикулярна блоку и проходит через середину контактной зоны. Ориентация стержня определяется углом между двумя соответствующими осями (рис. 4).

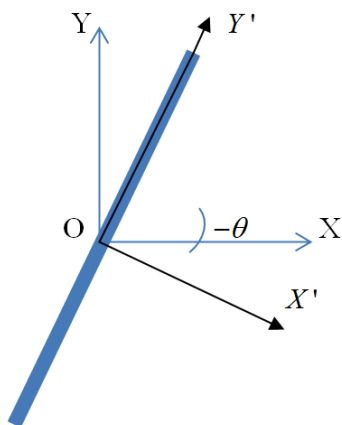


Рис. 4. Системы координат

Уравнение Эйлера, описывающее изменение ориентации тела, имеет вид

$$J_C \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_N + \vec{M}_T + \vec{M}_t,$$

$$\vec{M}_N = \iint_D (x, y, -h) \times \vec{k} p(x, y) dx dy, \vec{M}_t = f \Delta \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} f \Delta, \quad (1)$$

$$\vec{M}_T = \iint_D (x, y, -h) \times \vec{F}(x, y) dx dy, \vec{F}(x, y) = -\mu p(x, y) \frac{\vec{v}(x, y)}{|\vec{v}(x, y)|},$$

Здесь  $J_C$  – центральный момент инерции;  $\vec{M}_N$ ,  $\vec{M}_T$  и  $\vec{M}_t$  – суммарные моменты реакции опоры, трения и реакции нити, вычисленные относительно центра масс;  $\Delta$  – расстояние между точкой крепления нити и точкой  $C$ ;  $\vec{\omega}$  угловая скорость тела;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы системы  $OXYZ$ ;  $p(x, y)$  и  $v(x, y)$  – нормальное давление в данной точке поверхности контакта  $D$  и её скорость.

Чтобы вычислить функцию  $p(x, y)$  в уравнениях (1), предположим линейную зависимость [8, 9]:

$$p(x, y) = p_0 + p_1x' + p_2y'. \quad (2)$$

Здесь коэффициенты определяются из условий контакта [9]:

$$p_0 = \frac{P}{S(D)}, \quad (\vec{\omega}, \vec{i}) = (\vec{\omega}, \vec{j}) \equiv 0, \quad (3)$$

где  $S(D)$  – окрестность точки  $D$ . Движение тела параллельно основанию, таким образом, система имеет одну степень свободы, и уравнение движения имеет вид:

$$J_z \ddot{\theta} = (\vec{M}_N + \vec{M}_T + \vec{M}_t, \vec{k}) = M_T, \\ M_T = \iint_D DM(x, y) dx dy, \quad M(x, y) = (x, y, 0) \times \vec{F}(x, y). \quad (4)$$

Здесь  $J_z$  – вертикальный момент инерции тела;  $M_T$  – суммарный момент трения относительно точки  $O$ ;  $M(x', y')$  – момент трения в точке тела с координатами  $(x', y')$ ;  $\vec{F}(x, y)$  и  $\vec{v}(x, y)$  – сила трения и скорость в той же точке. В формулах (1)

$$\vec{v}(x, y) = \vec{v}(O) + \dot{\theta} \vec{k} \times (x, y, 0) = (V - \dot{\theta}y, \dot{\theta}x).$$

Чтобы вычислить интеграл (2) удобно перейти в систему  $OX'Y'Z'$  по формулам

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \quad y = x' \sin \theta + y' \cos \theta.$$

Тогда

$$\vec{F}(x', y') = -\mu p(x', y') \frac{\vec{v}(x', y')}{|\vec{v}(x', y')|}, \quad \vec{v}(x', y') = (-V \sin \theta - \dot{\theta}y', V \cos \theta + \dot{\theta}x'),$$

$$M(x', y') = (x', y', 0) \times \vec{F}(x', y') = \\ = -\mu \frac{p(x', y')}{\sqrt{V^2 + \dot{\theta}^2 + 2V\dot{\theta}(x' \sin \theta - y' \cos \theta)}} \vec{k} (V(x' \cos \theta - y' \sin \theta) + \dot{\theta}(x'^2 + y'^2)). \quad (5)$$

#### 4. Вычисление нормальной нагрузки

Чтобы объяснить колебательные движения тела, необходимо оценить распределение нормальной нагрузки по формуле (2). В соответствии с условиями контакта, отрыва от опоры не происходит, т.е. в формуле (1) проекции угловой скорости на оси  $OX'$  и  $OY'$  равны нулю. В формуле (1)

$$J_Z(\vec{\omega}, \vec{i}) = (\vec{M}_N, \vec{i}) + (\vec{M}_T, \vec{i}) = \iint_D yp(x, y) dx dy - \iint_D (h\vec{j}, \vec{F}(x, y)) dx dy = 0,$$

$$J_Z(\vec{\omega}, \vec{j}) = (\vec{M}_N, \vec{j}) + (\vec{M}_T, \vec{j}) + (\vec{M}_t, \vec{j}) = \\ = - \iint_D xp(x, y) dx dy + \iint_D (h\vec{i}, \vec{F}(x, y)) dx dy + f\Delta = 0. \quad (6)$$

Система двух уравнений (6) позволяет определить коэффициенты в формуле (2).

**Пример.** Предположим  $\dot{\theta} = 0$ , что соответствует исходному положению **1** на рис. 3, а также точкам поворота. Чтобы сделать понятной далеко не очевидную идею этой статьи, давайте максимально упростим модель, представив область в виде сегмента, а тело – в вертикальном положении. При таких упрощениях система (6) заменяется одним уравнением

$$\begin{aligned}
 J_Z(\vec{\omega}, \vec{i}) &= (\vec{M}_N, \vec{i}) + (\vec{M}_T, \vec{i}) + (\vec{M}_t, \vec{i}) = \\
 &\iint_D y' p(x') dy' - \mu h \sin \theta \iint_D p_0 dy' + f \Delta \cos \theta = 0, \\
 p'(x) &= p_0 + p_1 y', \vec{M}_T = -\mu \iint_D (0, y', -h) \times (\cos \theta, -\sin \theta, 0) p(y') dy' = \\
 &= \mu \iint_D (h, \sin \theta, h \cos \theta, y' \cos \theta) (p_0 + p_1 y') dy'. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \iint_D y' p(x') dy' + \mu h P \sin \theta + f \Delta \cos \theta &= 0, \\
 p'(x) &= p_0 + p_1 y', \vec{M}_T = -\mu \iint_D (0, y', -h) \times (\cos \theta, -\sin \theta, 0) p(y') dy' = \\
 &= \mu \iint_D (h, \sin \theta, h \cos \theta, y' \cos \theta) (p_0 + p_1 y') dy', \\
 p_1 \iint_D y'^2 dy' &= -\mu h P \sin \theta - f \Delta \cos \theta, (\vec{M}_T, \vec{k}) = \mu p_1 \cos \theta \iint_D y'^2 dy'. \quad (8)
 \end{aligned}$$

## 5. Обоснование динамики колебаний

Подстановка выражений (8) в формулу (7) приводит к следующему результату:

$$J_Z \ddot{\theta} = -\mu(\mu h P \sin \theta + f \Delta \cos \theta). \quad (9)$$

Обсудим этапы движения на рис. 3.

1. В положении **1**, угол нулевой, так же как и его первая производная. Вторая производная отрицательна, поэтому брусок вращается по часовой стрелке.

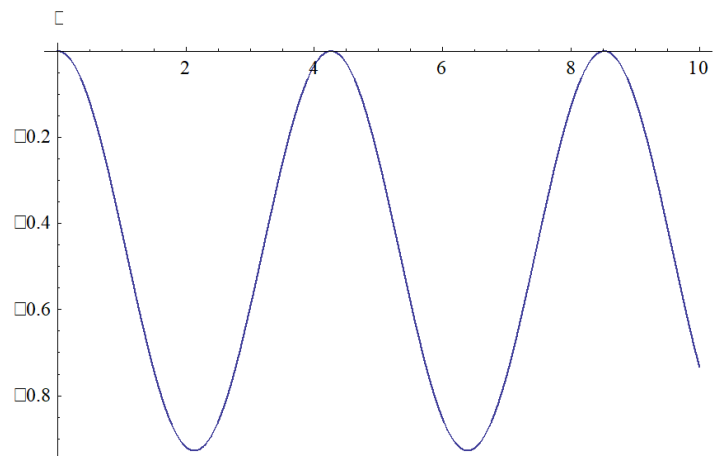
2. Если неравенство

$$\mu h P \sin \theta + f \Delta \cos \theta < 0 \quad (10)$$

имеет решение при  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ , тогда вращение останавливается (положение **3** на рис. 3) и возобновляется в обратном направлении (положение **4** на рис. 3).

3. Когда движение попадает в область, где неравенство (10) выполняется с противоположным знаком, движение по часовой стрелке продолжается, пока решение не попадёт в область неравенства (10), и т.д.

График численного решения изображён на рис. 5. Функция решения периодическая, а угол вращения остаётся отрицательным во время движения тела.



**Рис. 5.** Пример колебаний

## 6. Заключение

В статье построена математическая модель движения утолщённого стержня по шероховатой плоскости. На основе ее анализа качественно обосновано возникновение автоколебаний, обнаруженных в экспериментах. Ключевым свойством модели является зависимость нормального распределения нагрузки от координат и скоростей тела, указанная в [10]. Количественное исследование этого явления будет проведено в последующих работах.

## Благодарности

Научный коллектив выражает благодарность Соколову В.С. за помощь в создании экспериментального оборудования.

## Литература

1. Andronov A.A., Khaikin S.É. Theory of oscillations. Princeton University Press, 1949.
2. Mao X. et al. Reduction of friction by normal oscillations. II. In-plane system dynamics // Friction. 2017. Т. 5. С. 194-206.
3. Bengisu M.T., Adnan Akay. Stick-slip oscillations: Dynamics of friction and surface roughness // The Journal of the Acoustical Society of America. 1999. 105, 1. P. 194-205.
4. Blekhman I.I. Vibrational Mechanics/Nonlinear Dynamic Effects, General Approach, Applications. World Scientific, Singapore, 2000.
5. Armstrong-Helouvry B., Dupont P., Canudas de Wit C. A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for Control of Machines with Friction // Automatika. 1994. Vol. 30, № 7. P. 1083-1138.
6. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Kuznetsov S.P. The Chaplygin sleigh with friction moving due to periodic oscillations of an internal mass // Nonlinear Dynamics. 2019. 95. P. 699-714.

7. Borisov A.V. et al. Experimental investigation of the motion of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. T. 20. С. 518–541.
8. MacMillan W. D. Dynamics of rigid bodies. Dover Publications Inc., 1936.
9. Ivanov A. P. A dynamically consistent model of the contact stresses in the plane motion of a rigid body // Journal of applied mathematics and mechanics. 2009. V. 73, No. 2. P. 134–144.

MSC 74A55

## A New Type of Oscillations in a System With Friction

A.P. Ivanov, G.M. Maurakh

Sirius University of Science and Technology

*Abstract:* The dynamics of a thick rod on a rough plane is considered. A force is applied to the center of the rod causing it to move at a constant speed. At the initial moment, the rod is at rest and perpendicular to the line of action of the force. In the experiments carried out, a change in the angle between the rod and the thread transmitting the load was detected, alternately in positive and negative directions. It is shown that if we consider the distribution of the normal load to be uniform, then this effect is impossible for any friction law. As an explanation, it is proposed to use a dynamically consistent model of dry friction, in which the center of pressure lies in the front part of the rod (in the direction of movement), which leads to the occurrence of a moment that turns the rod.

*Keywords:* distributed friction, oscillation system.

### References

1. Andronov A.A., Khaikin S.É. Theory of oscillations. Princeton University Press, 1949.
2. Mao X. et al. Reduction of friction by normal oscillations. II. In-plane system dynamics // Friction. 2017. T. 5. P. 194-206.
3. Bengisu M. T., Adnan Akay. Stick-slip oscillations: Dynamics of friction and surface roughness // The Journal of the Acoustical Society of America. 1999. 105, 1. P. 194-205.
4. Blekhman I.I. Vibrational Mechanics/Nonlinear Dynamic Effects, General Approach, Applications. World Scientific, Singapore, 2000.
5. Armstrong-Helouvry B., Dupont P., Canudas de Wit C. A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for Control of Machines with Friction // Automatika. 1994. Vol. 30, № 7. P. 1083-1138.
6. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Kuznetsov S.P. The Chaplygin sleigh with friction moving due to periodic oscillations of an internal mass // Nonlinear Dynamics. 2019. 95. P. 699-714.
7. Borisov A.V. et al. Experimental investigation of the motion of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. T. 20. C. 518-541.
8. MacMillan W. D. Dynamics of rigid bodies. Dover Publications Inc., 1936.
9. Ivanov A. P. A dynamically consistent model of the contact stresses in the plane motion of a rigid body // Journal of applied mathematics and mechanics. 2009. V. 73, No. 2. P. 134-144.