УДК 517.929.63:519.6

Исследование одного уравнения с отклоняющимся аргументом*

Вельмисов П.А., Маценко П.К., Тамарова Ю.А.

Ульяновский государственный технический университет

Аннотация: Рассматривается линейное дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом, полученное при исследовании математической модели системы контроля за изменением давления в камере сгорания двигателя. Указаны некоторые точные решения уравнения, а также предложен численный метод решения, основанный на методе Рунге-Кутты.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, метод Рунге-Кутты, система измерения давления, аэрогидроупругость, динамика.

1. Приведение математической модели системы измерения давления к уравнению с отклоняющимся аргументом

Для контроля за изменением давления в камере сгорания двигателя применяются системы, в состав которых входит трубопровод и датчик давления. Трубопровод в такой системе используется для ослабления высокотемпературного и вибрационного воздействия на датчик, так как позволяет расположить датчик на некотором расстоянии от двигателя.

Рассмотрим систему, в которой трубопровод длиной l имеет поперечное сечение в виде сектора, образованного лучами $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ и окружностью $r = R$. Датчик расположен в конце трубопровода $(x = l)$ и содержит упругий элемент, который представляет собой деформируемую пластину в форме сектора, как и поперечное сечение трубопровода. Деформацию упругого элемента обозначим функцией $w(r, \theta, t)$. Рабочая среда в трубопроводе считается сжимаемой, а ее движение описывается потенциалом скорости $\varphi(x, r, \theta, t)$. На входе в трубопровод $(x = 0)$ задан закон изменения $P(r, \theta, t)$ избыточного давления рабочей среды. Соответствующая математическая модель, описывающая динамику механической системы, имеет вид

$$\varphi_{tt} = a_0^2 \left(\varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r}\varphi_r + \frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta} \right), \quad x \in (0, l), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \qquad (1)$$

$$\varphi_r(x, R, \theta, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \qquad (2)$$

$$\varphi_\theta(x, r, \theta_k, t) = 0, \quad k = 1, 2, \quad x \in (0, l), \quad r \in (0, R), \qquad (3)$$

$$\varphi_x(l, r, \theta, t) = w_t(r, \theta, t), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \qquad (4)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, r, \theta, t) = P(r, \theta, t), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \qquad (5)$$

$$L(w(r, \theta, t)) \equiv m w_{tt} + D \triangle^2 w + N \triangle w + \beta(\triangle^2 w)_t + f(w_t, w) = P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, r, \theta, t) - P_*, \qquad (6)$$

$$r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2),$$

*Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда №23-21-00517.

где

$$\triangle w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2},$$

$$\triangle^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial r^2} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial r} + \frac{4}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$$

В (1)-(6) индексы снизу обозначают частные производные; P_0, ρ_0, a_0, P_*, m, D, N, β- некоторые физические постоянные; $f(w_t, w)$ - некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации w и скорости деформации w_t.

Задачу (1)-(6) необходимо дополнить начальными условиями, а также граничными условиями для функции $w(r, \theta, t)$, соответствующими типу закрепления элемента.

В работе [1] с помощью введения интегральных характеристик основных динамических величин решение задачи (1)-(6) сведено к исследованию уравнения с отклоняющимся аргументом, связывающего функцию $\psi(t)$ (характеризует деформацию упругого элемента датчика) с функцией $G(t)$ (характеризует закон изменения давления рабочей среды в двигателе)

$$m_0\left[\ddot{\psi}(t-\frac{l}{a_0}) + \ddot{\psi}(t+\frac{l}{a_0})\right] + \alpha_0\left[\dot{\psi}(t-\frac{l}{a_0}) + \dot{\psi}(t+\frac{l}{a_0})\right] + \gamma_0\left[\psi(t-\frac{l}{a_0}) + \psi(t+\frac{l}{a_0})\right] -$$

$$-\rho_0 a_0 w_0\left[\dot{\psi}(t-\frac{l}{a_0}) - \dot{\psi}(t+\frac{l}{a_0})\right] = 2\left[G(t) + (P_0 - P_*)\frac{R^2(\theta_2-\theta_1)}{2}\right]. \quad (7)$$

Отметим, что

$$G(t) = \iint\limits_H P(r,\theta,t) r dr d\theta, \quad H = \{(r,\theta) : 0 \le r \le R; \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}, \quad w(r,\theta,t) = \psi(t) g(r,\theta),$$

$$m_0 = m\iint\limits_H g(r,\theta) r dr d\theta, \quad \alpha_0 = \alpha\iint\limits_H g(r,\theta) r dr d\theta + \beta\iint\limits_H \triangle^2 g(r,\theta) r dr d\theta,$$

$$w_0 = \iint\limits_H r g(r,\theta) dr d\theta,$$

$$\gamma_0 = D\iint\limits_H \triangle^2 g(r,\theta) r dr d\theta + N\iint\limits_H \triangle g(r,\theta) r dr d\theta + \gamma\iint\limits_H g(r,\theta) r dr d\theta.$$

Функция $g(r,\theta)$ удовлетворяет граничным условиям, соответствующим жесткому защемлению: $g(R,\theta) = g_r(R,\theta) = 0$, $g(r,\theta_k) = g_\theta(r,\theta_k) = 0$, $k = 1, 2$. При этом функция $f(w, w_t)$, являющаяся характеристикой упругих сил и сил демпфирования внешних связей, принималась в виде $f(w, w_t) = \alpha w_t + \gamma w$.

2. Некоторые точные решения уравнения

Рассмотрим некоторые точные решения уравнения (7).

В случае, когда на постоянное рабочее давление наложено периодическое возмущение, функция $G(t)$ задается в виде: $G(t) = [a\cos\theta t + b\sin\theta t] + G_0$, тогда функцию $\psi(t)$ можно представить выражением $\psi(t) = A\cos\theta t + B\sin\theta t + C$ (a, b, G_0, A, B, C - некоторые постоянные). Подставляя в уравнение (7) $G(t)$ и $\psi(t)$, получим следующие выражения для коэффициентов:

$$A = \frac{4}{\triangle}\left[\frac{a}{m_0}((-\theta^2+\frac{\gamma_0}{m_0})\cos\frac{\theta l}{a_0} - \frac{\rho_0 a_0 w_0 \theta}{m_0}\sin\frac{\theta l}{a_0}) - \frac{b}{m_0}\frac{\alpha_0\theta}{m_0}\cos\frac{\theta l}{a_0}\right],$$
$$B = \frac{4}{\triangle}\left[\frac{b}{m_0}((-\theta^2+\frac{\gamma_0}{m_0})\cos\frac{\theta l}{a_0} - \frac{\rho_0 a_0 w_0 \theta}{m_0}\sin\frac{\theta l}{a_0}) + \frac{a}{m_0}\frac{\alpha_0\theta}{m_0}\cos\frac{\theta l}{a_0}\right],$$
$$\triangle = 4\left[\frac{a}{m_0}(-\theta^2+\frac{\gamma_0}{m_0})\cos\frac{\theta l}{a_0} - \frac{\rho_0 a_0 w_0 \theta}{m_0}\sin\frac{\theta l}{a_0}\right]^2 + 4\left(\frac{\alpha_0\theta}{m_0}\right)^2\cos^2\frac{\theta l}{a_0},$$
$$C = \frac{1}{\gamma_0}\left[G_0 + (P_0 - P_*)\frac{R^2(\theta_2-\theta_1)}{2}\right].$$

Если $G(t) = at^2 + bt + G_0$, то функцию $\psi(t)$ ищем в виде $\psi(t) = At^2 + Bt + C$. После подстановки в (7) получим:

$$A = \frac{a}{\gamma_0}, B = \frac{b}{\gamma_0} - \frac{2a\alpha_0}{\gamma_0^2},$$
$$C = -\frac{m_0 a}{\gamma_0^2}\left(2 + \frac{\gamma_0 l^2}{m_0 a_0^2} + \frac{2\rho_0 w_0 l}{m_0}\right) - \frac{\alpha_0}{\gamma_0}\left(\frac{b}{\gamma_0} - \frac{2a\alpha_0}{\gamma_0^2}\right) + \frac{1}{\gamma_0}\left[G_0 + (P_0 - P_*)\frac{R^2(\theta_2-\theta_1)}{2}\right].$$

При экспоненциальном возмущении постоянного рабочего давления функция $G(t)$ имеет вид: $G(t) = G_0 + ae^{\lambda t}$. При $\lambda > 0$ имеет место экспоненциальный рост давления, при $\lambda < 0$ имеем для давления график с насыщением. В этом случае $\psi(t) = C + Ae^{\lambda t}$. Подставив ее в уравнение (7) и проведя ряд несложных математических действий, найдем коэффициенты A и C:

$$A = \frac{a}{\operatorname{ch}\left(\frac{\lambda l}{a_0}\right)\left[m_0\lambda^2 + \alpha_0\lambda + \gamma_0 + \rho_0 a_0 w_0 \operatorname{th}\left(\frac{\lambda l}{a_0}\right)\right]}, \quad C = \frac{1}{\gamma_0}\left[G_0 + (P_0 - P_*)\frac{R^2(\theta_2-\theta_1)}{2}\right].$$

3. Численное решение уравнения

В уравнении (7) сделаем замену: $\psi(t + \frac{l}{a_0}) = y(t)$. Тогда уравнение примет вид:

$$y''(t) + y''\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) + a_1\left[y'(t) + y'\left(t - \frac{2l}{a_0}\right)\right] + a_2\left[y(t) + y\left(t - \frac{2l}{a_0}\right)\right] = g(t) + a_3 y'\left(t - \frac{2l}{a_0}\right). \quad (8)$$

В (8) введены обозначения:

$$g(t) = \frac{2}{m_0}\left[G(t) + (P_0 - P_*)\frac{R^2(\theta_2-\theta_1)}{2}\right],\ a_1 = \frac{\alpha_0 + \rho_0 a_0 w_0}{m_0},\ a_2 = \frac{\gamma_0}{m_0},\ a_3 = \frac{2\rho_0 w_0}{m_0}.$$

Уравнение (8) будем решать с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y'_0 \quad (9)$$

и условиями на начальном множестве $t \le 0$ [2–4]

$$y(t) = y_0\eta_0(t), \quad y'(t) = y'_0\eta_1(t), \quad y''(t) = y''(0)\eta_2(t), \quad t \in \left[-\frac{2l}{a_0}, 0\right], \quad (10)$$

где $\eta_0(t)$, $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие условию $\eta_0(0) = \eta_1(0) = \eta_2(0) = 1$, причем для удобства вычислений будем считать, что

$$\eta_0\left(-\frac{2l}{a_0}\right) = \eta_1\left(-\frac{2l}{a_0}\right) = \eta_2\left(-\frac{2l}{a_0}\right) = 0. \tag{11}$$

Чтобы решение уравнения (8) было непрерывным, найдем $y''(0)$ из уравнения (8) при $t = 0$ с учетом (11): $y''(0) = g(0) - a_1 y_0' - a_2 y_0$.

Уравнение (8) решалось численно на каждом отрезке $[t_k, t_{k+1}]$, $t_k = \dfrac{2l}{a_0}k$, $k = 0, 1, 2...$ в пакете Mathematica по следующему алгоритму:

1. На отрезке $\left[0, \dfrac{2l}{a_0}\right]$ уравнение (8) принимает вид

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = g(t) - [g(0) - a_1 y_0' - a_2 y_0]\eta_2\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) - a_1 y_0' \eta_1\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) - \\ - a_2 y_0 \eta_2\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) + a_3 y_0' \eta_1\left(t - \frac{2l}{a_0}\right),$$

в котором правая часть задана. Решаем задачу Коши с начальными условиями (9) методом Рунге-Кутты.

2. На отрезках $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, 2, 3, ..$ сделаем замену: $v_k(t) = y_k(t) + y_k\left(t - \dfrac{2l}{a_0}\right)$. Тогда получим уравнение

$$v_k''(t) + a_1 v_k'(t) + a_2 v_k(t) = g(t) + a_3 y_k'\left(t - \frac{2l}{a_0}\right),$$

в правую часть которого входит производная $y_k'\left(t - \dfrac{2l}{a_0}\right)$, вычисленная на предыдущем отрезке. Начальные условия также находятся из значений функций, полученных на предыдущем шаге. Таким образом, на каждом шаге получим задачу Коши для функции $v_k(t)$, которую решаем методом Рунге-Кутты.

Литература

1. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Математическое моделирование динамики аэроупругой системы «трубопровод – датчик давления» // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2024. №2. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.08

2. Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

3. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.

4. Курбатов В.Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1990. 168 с.

MSC 34K99, 65K05

Investigation of an equation with a deviating argument

P.A. Velmisov, P.K. Macenko, Yu.A. Tamarova
Ulyanovsk State Technical University

Abstract: The linear differential equation with a deviating argument obtained in the study of a mathematical model of a system for monitoring pressure changes in an engine combustion chamber is considered. Some exact solutions of the equation are indicated, and a numerical solution method based on the Runge-Kutta method is proposed.

Keywords: differential-difference equations, Runge-Kutta method, pressure measurement system, aerohydroelasticity, dynamics.

References

1. Velmisov P.A., Tamarova Y.A. Mathematical modeling of the dynamics of the aeroelastic «pipeline - pressure sensor» // PNRPU Mechanics Bulletin. 2024. №2 (in Russian). doi: 10.15593/perm.mech/2024.2.08
2. Bellman R., Kuk K.L. Differentsial'no-raznostnyye uravneniya. M.: Mir, 1967. 548 p.
3. Myshkis A.D. Lineynyye differentsial'nyye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom. M.: Nauka, 1972. 352 p.
4. Kurbatov V.G. Lineynyye differentsial'no-raznostnyye uravneniya. Voronezh: Izd-vo VGU, 1990. 168 p.