УДК 517.9:536.2

Математическое моделирование передачи тепла в системе «трубопровод – датчик давления»*

Вельмисов П.А., Абрашкин П.М., Ликанин А.В.

ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет»

Аннотация: Рассматривается одномерная нестационарная задача о распределении температуры в механической системе «трубопровод – датчик давления». Предложен численно-аналитический метод решения, основанный на методе Галеркина. Решение задачи сведено к интегрированию системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. В случае, когда температура на входе в трубопровод постоянна, построено аналитическое решение задачи с помощью метода разделения переменных.

Ключевые слова: теплообмен, трубопровод, датчик давления, дифференциальные уравнения, метод Галеркина, метод разделения переменных.

1. Математическая модель теплопередачи

В различных отраслях науки и техники важным является повышение надежности и долговечности конструкций, подвергающихся вибрационному и тепловому воздействиям. Температурные и вибрационным воздействия критичны, в том числе, для датчиков давления газожидкостных сред [1]. Это приводит к погрешностям измерений и возможному разрушению чувствительных элементов. Создания новых систем измерения давления в камерах сгорания двигателей требует, в частности, развитие ракетно–космической и авиационной техники.

В данной статье представлена математическая модель теплопередачи в системе «трубопровод – датчик давления» [2–4]. В такой системе наличие трубопровода, связывающего камеру сгорания двигателя с датчиком давления, позволяет уменьшить тепловое и вибрационное воздействие на корпус датчика и его чувствительный элемент. Модель позволяет исследовать изменение температуры по длине трубопровода и в поперечном сечении чувствительного элемента датчика давления. Принципиальная схема системы изображена на рис. 1.

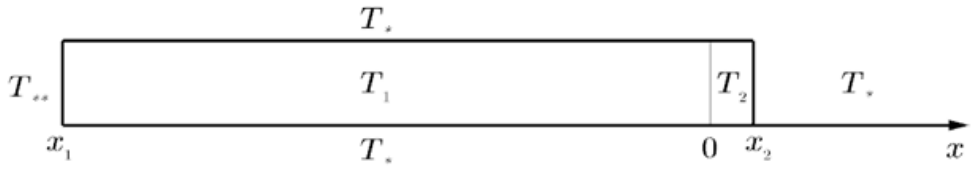

Рис. 1. Схема механической системы «трубопровод–датчик давления»

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - b_1^2 \left(T_1 - T_*\right), \quad x \in (x_1, 0), \tag{1}$$

*Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда N 23-21-00517

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - b_2^2 \left(T_2 - T_*\right), \quad x \in (0, x_2), \tag{2}$$

$$T_1(x_1, t) = T_{**}(t), \tag{3}$$

$$-k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(x_2, t) = \alpha \left[T_2(x_2, t) - T_*\right], \tag{4}$$

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \beta \left(T_1 - T_2\right), \quad -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \beta \left(T_1 - T_2\right), \quad x = 0. \tag{5}$$

В формулах (1)–(5) функции $T_1(x,t)$ и $T_2(x,t)$ описывают распределения температуры в рабочей среде по длине трубопровода и по толщине чувствительного элемента датчика; $a_1^2 = \dfrac{k_1}{c_1\rho_1}$, $a_2^2 = \dfrac{k_2}{c_2\rho_2}$, $b_1^2 = \dfrac{\alpha_1}{\rho_1 c_1}$, $b_2^2 = \dfrac{\alpha_2}{\rho_2 c_2}$; k_1, k_2, c_1, c_2, ρ_1, ρ_2 – коэффициенты теплопроводности, коэффициенты теплоемкости и плотности рабочей среды и материала элемента, α – коэффициент теплообмена между материалом элемента и внешней средой (поверхность $x = x_2$); β – коэффициент теплообмена между материалом элемента и рабочей средой (поверхность $x = 0$); α_1, α_2 – коэффициенты теплообмена на боковых поверхностях трубопровода и чувствительного элемента. Уравнения (1)-(2) описывают нестационарное распределение температуры в рабочей среде в трубопроводе (T_1) и в материале чувствительного элемента (T_2); условие (3) задает значение температуры (T_{**}) на выходе из камеры сгорания двигателя (на входе в трубопровод, $x = x_1$); (4) – условие теплообмена на внешней поверхности чувствительного элемента ($x = x_2$), если $\alpha = 0$, то будем иметь условие теплоизоляции ; (5) – условия теплообмена между рабочей средой и материалом чувствительного элемента (из этих условий следует равенство тепловых потоков при $x = 0$).

2. Численно-аналитическое решение задачи

Задачу (1)–(5) будем решать методом Галеркина. Рассмотрим в качестве примера случай, когда внешняя поверхность ($x = x_2$) чувствительного элемента теплоизолирована ($\alpha = 0$). Представим искомые функции $T_1(x,t)$, $T_2(x,t)$ в виде разложений по полным системам функций

$$T_1 = T_* + A(t) + B(t)\, x + \sum_{n=1}^{N} A_n(t) \sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{x_1}, \quad x \in (x_1, 0) \tag{6}$$

$$T_2 = T_* + C(t) + \sum_{n=1}^{N} \tilde{A}_n(t) \sin(\nu_n x), \quad \nu_n = \frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{x_2}, \quad x \in (0, x_2) \tag{7}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $A_n(t)$, $\tilde{A}_n(t)$ – функции, подлежащие определению. Подставляя (6)-(7) в (1)-(2), запишем условия ортогональности невязок к базисным функциям, при этом невязку уравнения (1) проецируем на систему функций $\{\sin(\lambda_n x)\}$, а невязку уравнения (2) – на систему функций $\{\sin(\nu_n x)\}$

$$\tilde{A}'_m + \left(a_2^2\nu_m^2 + \beta_2^2\right)\tilde{A}_m = \frac{2}{x_2}\left(C' + b_2^2 C\right)\psi_m, \quad m = \overline{1, N}, \tag{8}$$

$$A'_m + \left(a_1^2\lambda_m^2 + \beta_1^2\right)A_m = \frac{2}{x_1}\left(A' + b_1^2 A\right)\xi_m + \frac{2}{x_1}\left(B' + b_1^2 B\right)\theta_m, \quad m = \overline{1, N}. \tag{9}$$

Коэффициенты ξ_m, θ_m, ψ_m, определяются формулами

$$\xi_m = \int_{x_1}^{0} \sin\lambda_m x dx, \quad \theta_m = \int_{x_1}^{0} x \sin\lambda_m x dx, \quad \psi_m = \int_{0}^{x_2} \sin\nu_m x dx \tag{10}$$

С учетом граничных условий (3)-(5) получим:

$$A = T_{**}(t) - T_* - x_1 \left[\frac{k_2}{k_1} \sum_{n=1}^{N} \nu_n \tilde{A}_n - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n A_n \right], \tag{11}$$

$$B = -\sum_{n=1}^{N} \lambda_n A_n + \frac{k_2}{k_1} \sum_{n=1}^{N} \nu_n \tilde{A}_n, \tag{12}$$

$$C = T_{**}(t) - T_* + \left(\frac{k_2}{\beta} - \frac{k_2 x_1}{k_1} \right) \sum_{n=1}^{N} \nu_n \tilde{A}_n + x_1 \sum_{n=1}^{N} \lambda_n A_n. \tag{13}$$

Получили систему $(2N+3)$ уравнений для $(2N+3)$ функций $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $A_n(t)$, $\tilde{A}_n(t)$, при этом (8)-(9) – линейные дифференциальные уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами, а (11)–(13) – линейные алгебраические уравнения. Подставляя выражения для A, B, C из (11)–(13) в (8)-(9), получим систему $(2N)$ линейных дифференциальных уравнений для $(2N)$ функций $A_n(t)$, $\tilde{A}_n(t)$.

Решение задачи (1)–(5) можно также представить в виде разложений по полным системам функций $\{\sin(\lambda_n x)\}$, $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{x_1}$, $x \in (x_1, 0)$, $n = \overline{1,\infty}$ и $\{\cos(\nu_n x)\}$, $\nu_n = \dfrac{n\pi}{x_2}$, $x \in (0, x_2)$, $n = \overline{0,\infty}$:

$$T_1 = T_* + A(t) + B(t)\, x + \sum_{n=1}^{N} A_n(t) \sin\lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{x_1}, \tag{14}$$

$$T_2 = T_* + C(t) + D(t)\, x + E(t)\, x^2 + \sum_{n=1}^{N} \tilde{A}_n(t) \cos\nu_n x, \quad \nu_n = \frac{n\pi}{x_2}. \tag{15}$$

Невязку уравнения (1) следует проецировать на систему функций $\{\sin(\lambda_n x)\}$, $n = \overline{1,N}$, а невязку уравнения (2) – на систему функций $\{\cos(\nu_n x)\}$, $n = \overline{0,N}$.

В случае, когда температура на входе в трубопровод (T_{**}) постоянна, построено аналитическое решение задачи (1)–(5) с помощью метода разделения переменных.

Литература

1. Эткин Л. Г. Виброчастотные датчики // Теория и практика. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 408 с.

2. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем. Ульяновск: УлГТУ, 2018. 152 с.

3. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал СВМО. 2020. Т. 22, № 3. С. 352–367. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202003.352-367

4. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modeling of pressure control systems in liquid and gaseous media // Proceedings of the AIP. 2021 conference. Vol. 2333. P. 120004. DOI: 10.1063/5.0041778

MSC 49K20, 49M15, 80A20, 35K05

Mathematical modeling of heat transfer in the system «pipeline – pressure sensor»

P.A. Velmisov, P.M. Abrashkin, A.V. Likanin

Ulyanovsk state technical university

Abstract: The one-dimensional nonstationary problem of temperature distribution in the mechanical system «pipeline – pressure sensor» is considered. A numerical and analytical method of solution based on the Galerkin method is proposed. The solution of the problem is reduced to integration of a system of linear ordinary differential equations of the first order with constant coefficients. In the case when the temperature at the pipeline inlet is constant, the analytical solution of the problem is constructed using the method of separation of variables.

Keywords: heat exchange, pipeline, pressure sensor, differential equations, Galerkin method, method of separation of variables.

References

1. Etkin L. G. Vibrofrequency sensors. Theory and practice. Moscow: Bauman Moscow State Technical University, 2004. 407 p.
2. Velmisov, P. A.; Pokladova, Yu. V. Investigation of the dynamics of the deformable elements of some aero-hydroelastic systems. Ulyanovsk: UlSTU, 2018. 152 p.
3. Velmisov, P. A.; Tamarova, Yu. A. Mathematical modeling of pressure measurement systems in gas-liquid media // SVMO Journal. 2020. T. 22, № 3. P. 352-367. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202003.352-367
4. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modeling of pressure control systems in liquid and gaseous media // Proceedings of the AIP. 2021 conference. Vol. 2333. P. 120004. DOI: 10.1063/5.0041778