

Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ  
XI МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ  
МОЛОДЕЖНОЙ ШКОЛЫ-СЕМИНАРА  
имени Е.В. Воскресенского



Саранск  
2024

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
ИМ. М.В. КЕЛДЫША РАН

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

**Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ**

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ  
XI МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ  
МОЛОДЕЖНОЙ ШКОЛЫ-СЕМИНАРА  
имени Е.В. Воскресенского

Саранск  
26 — 28 июля 2024 г.

Саранск  
2024

УДК 510:004.5

ББК В1

М341

Р е д а к ц и о н н а я    к о л л е г и я :

член-корр. РАН, д.ф.-м.н. профессор В.Ф. Тишкин (отв. редактор):

д.ф.-м.н. профессор П.А. Вельмисов;

д.ф.-м.н. профессор В.К. Горбунов;

д.ф.-м.н. профессор Е.Б. Кузнецов;

д.ф.-м.н. профессор О.В. Починка.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ М341 [Электронный ресурс]: Сборник материалов XI Международной научной молодежной школы-семинар имени Е.В. Воскресенского (Саранск, 26-28 июля 2024 г.) / редкол.: В.Ф. Тишкин (отв. ред.) [и др.]. — Саранск: СВМО, 2024. — 233 с. Режим доступа: <http://conf.svmo.ru/files/2024/ThesesSaransk2024.pdf>

ISBN 978-5-901661-61-1

Настоящее издание содержит материалы докладов участников XI Международной научной молодежной школы-семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского, проходившей в Национальном исследовательском Мордовском государственном университете с 26 по 28 июля 2024 г.

Представляет интерес для научных работников, студентов и аспирантов.

УДК 510:004.5

ББК В1

Публикуется на основании Устава Межрегиональной общественной организации «Средне-Волжское математическое общество» (п. 2.2) и по решению редакционно-издательского отдела СВМО.

ISBN 978-5-901661-61-1

© Коллектив авторов, 2024

© Оформление. СВМО, 2024

## Предисловие

Настоящее издание содержит материалы докладов XI Международной научной молодежной школы-семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е. В. Воскресенского, которая была проведена с 26 по 28 июля 2024 г. в г. Саранск (Россия). Организаторами школы-семинара выступили Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН и Средне-Волжское математическое общество.

Первая молодёжная научная школа-семинар по математическому моделированию, численным методам и комплексам программ организована в 2003 году. С тех пор школы-семинары стали регулярно проводится один раз в два года (чередуюсь с научными конференциями). Основателем и идейным вдохновителем научных конференций и школ-семинаров являлся талантливый ученый и организатор д.ф.-м.н. профессор Е.В. Воскресенский. Он руководил этими мероприятиями до 2008 года.

Доклады, представленные на школе-семинаре, посвящены исследованиям математических моделей в физике, химии, биологии, экономике и других областях человеческого знания. Диапазон подходов к исследованию моделей, рассмотренных в докладах, достаточно широк и включает как качественные, так и численные методы. Как правило, при использовании численных методов авторы привлекают современные компьютерные технологии, например, параллельные вычисления. Тематика докладов соответствует семинарам школы:

1. Принципы построения математических моделей.
2. Численная реализация алгоритмов математических моделей.
3. Динамические системы и качественные методы анализа математических моделей.
4. Математические модели физики, химии, биологии, экономики, социологии, экологии и других отраслей науки.

Все доклады, представленные на школе-семинаре, были предварительно прорецензированы Программным комитетом.

Организаторы благодарны всем участникам школы-семинара за интересные доклады и плодотворную дискуссию.

**Программный, организационный и редакционный комитеты  
XI Международной научной молодежной школы-семинара  
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы  
программ» имени Е.В. Воскресенского  
Саранск, 26 — 28 июля 2024 года**

**Председатель организационного комитета —**

ректор Национального исследовательского Мордовского государственного университета Д.Е. Глушко (г. Саранск)

**Председатель программного комитета —**

член-корреспондент РАН д.ф.-м.н. профессор В.Ф. Тишкин (Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва).

**Ученый секретарь —**

к.ф.-м.н. О.С. Язовцева (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет, г. Саранск)

**Программный комитет:**

к.ф.-м.н., доцент	Р.В. Жалнин,	г. Саранск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	А.С. Андреев,	г. Ульяновск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Д.В. Баландин,	г. Н. Новгород,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	П.А. Вельмисов,	г. Ульяновск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	В.К. Горбунов,	г. Ульяновск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	И.М. Губайдуллин,	г. Уфа,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Ю.Н. Дерюгин,	г. Саров,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	А.П. Жабко,	г. Санкт-Петербург,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	А.М. Камачкин,	г. Санкт-Петербург,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	А.С. Козелков,	г. Саров,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Н.Д. Кузьмичев,	г. Саранск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Е.Б. Кузнецов,	г. Москва,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	С.И. Мартынов,	г. Сургут,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Н.Д. Морозкин,	г. Уфа,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	О.В. Починка,	г. Н. Новгород,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	И.П. Рязанцева,	г. Н. Новгород,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Н.В. Старостин,	г. Н. Новгород,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	В.А. Титарев,	г. Москва,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	М.А. Шишленин,	г. Новосибирск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Ш.А. Алимов,	г. Ташкент,	Узбекистан.
д.ф.-м.н., профессор	А.А. Глуцюк,	г. Лион,	Франция.
д.ф.-м.н., профессор	В.И. Громак,	г. Минск,	Беларусь.
д.ф.-м.н., профессор	С.А. Мазаник,	г. Минск,	Беларусь.
д.ф.-м.н., профессор	А. Асанов,	г. Бишкек,	Кыргызстан.

### Организационный комитет:

д.т.н., профессор	П.В. Сенин,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	А.М. Давыдкин,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	И.И. Чучаев,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Л.А. Сухарев,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	П.А. Шаманаев,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Т.Ф. Мамедова,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	С.М. Мурюмин,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Д.К. Егорова,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	А.Н. Тында,	г. Пенза,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Е.В. Десяев,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	А.О. Сыромясов,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., с.н.с.	М.Н. Вишнякова,	г. Саров,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Т.Е. Бадочкина,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Е.Е. Пескова,	г. Саранск,	Россия.
к.м.н.	С.Х. Зинина,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	О.Е. Каледин,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Е.А. Каледина,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	А.Ф. Карчиганов,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	М.А. Кутыркина,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	В.Е. Мальков,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	М.С. Нефедов,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	А.А. Шалаева,	г. Саранск,	Россия.

## Содержание

Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Анкилов Г.А. Сравнительный анализ некоторых математических моделей систем измерения давления в двигателях .....	12
Антипина Е.В., Мустафина С.А., Антипин А.Ф. Расчет оптимального температурного режима каталитического процесса .....	18
Буткина А.А., Гущина О.А., Коржов А.С., Шамаев А.В. Применение методов машинного обучения для определения категории грунта .....	22
Вельмисов П.А., Абрашкин П.М., Ликанин А.В. Математическое моделирование передачи тепла в системе «трубопровод – датчик давления» .....	28
Вельмисов П.А., Маценко П.К., Тамарова Ю.А. Исследование одного уравнения с отклоняющимся аргументом .....	32
Гиззатов Д.Р., Гиззатова Э.Р. О выводе нелинейных параметрических функций для процессов радикальной полимеризации .....	37
Григорьев В.В., Демидова Т.В. Моделирование падения струи на протопланетный диск .....	40
Григорьев В.В., Жалнин Р.В. Сравнение методов моделирования взаимодействия ударной волны и покоящегося газа в задаче о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова .....	45
Губайдуллин И.М. Математическое моделирование и оптимизация флюидодинамических процессов в пористых средах .....	50
Дерюгин Ю.Н., Шишканов Д.А. Функция влияния в континуальной модели перидинамики .....	55
Иванов А.И., Тарасов Д.В. Исключение методической погрешности оценки показателя Хёрста, возникающей из-за малого объема выборки .....	70
Иванов А.П., Маурах Г.М. Новый тип колебаний в системе с трением .....	76
Костромина О.С. О вырожденных резонансах в системах, близких к двумерным нелинейным гамильтоновым, при квазипериодических по времени параметрических возмущениях .....	84
Кочурова И.Д., Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. О точности модифицированного метода Галеркина с разрывными базисными функциями, зависящими от времени ..	88
Кузьмичев Н.Д. Приближение гёльдеровых функций её коэффициентами Фурье для гармонически модулированного аргумента .....	94

Ладонкина М.Е., Повещенко Ю.А., Чжан Х. Сравнительный анализ некоторых итерационных процессов для реализации полностью консервативных разностных схем для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера .....	99
Лутошкин И.В., Чекмарев А.Г. Разработка программного комплекса для решения задач оптимального управления .....	105
Макеев А.А., Мартынов С.И. Моделирование периодического режима работы установок электроцентробежных насосов с учетом разгазирования нефти .....	110
Малышев М.В., Кульминский Д.Д. Экспериментальное исследование маятника с вибрирующей точкой подвеса .....	115
Мамедова Т.Ф., Кутыркина М.А. Анализ устойчивости модели Хиндмарша-Роуза по части переменных .....	119
Марусеев И.А., Писарев М.А., Рассадин А.Э. Двусторонние оценки гипергеометрических функций с соотношениями на параметры .....	125
Морозкин Н.Д., Ткачев В.И., Морозкин Н.Н. Оптимальное управление процессом осесимметричного нелинейного нагрева неограниченной пластины с учетом ограничений .....	129
Мурадов Ф.А., Кучаров О.Р., Эшбоева Н.Ф. Численный алгоритм математической модели расчета плотности вредных веществ в атмосфере .....	135
Мустафина С.И., Гиззатова Э.Р. О возможности применения метода сопряжённых систем в задачах описания химических процессов полимеризации .....	140
Никонов В.И. Об алгебро-геометрических свойствах суммы циклических подпространств относительно линейного оператора .....	143
Переварюха А.Ю. Возмущенные уравнения для моделирования вспышек при инвазионных процессах .....	149
Перова И.В. Математическая модель волнового процесса с сетевым носителем ..	153
Пескова Е.Е., Язовцева О.С. Численное моделирование химически активных дозвуковых потоков под воздействием лазерного излучения .....	158
Попов В.Н., Гермидер О.В. О методе коллокации при построении решения нелинейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с использованием многочленов Чебышева .....	163
Рассадин А.Э., Рубцов М.И. Ценовые волны в информационной микроэкономике	167
Родькин А.В., Ткачева С.В., Язовцева О.С. Применение OpenMP в задаче о модели-	



ровании нестационарного процесса в слое катализатора .....	171
Сайфетдинов С.Ф., Егорова Д.К., Гарин М.А. Логистическая модель риска возникновения сердечно-сосудистых заболеваний .....	174
Сахаров А.Н. Проективизация трехмерных линейных квазипериодических систем .....	177
Сибатов Р.Т. Субдиффузия переменного порядка: интерпретация в терминах модели многократного захвата .....	182
Сибатов Р.Т., Морозова Е.В., Тимкаева Д.А. Стохастическое моделирование хрупкого разрушения материалов с рывковой динамикой трещин .....	188
Тиньгаева Н.А., Пескова Е.Е. Разработка и реализация вычислительного алгоритма для моделирования реагирующих газовых потоков .....	193
Тында А.Н. Итерационные методы решения квадратичных интегральных уравнений I рода .....	196
Хисаметдинова Г.К., Юнусова Д.С., Корнилова А.А., Гиззатова Э.Р. О численной реализации прямой кинетической задачи расчета конверсионной кривой для процессов радикальной полимеризации .....	199
Чеботарева В.Ю. Компьютерное моделирование биомиметического закона отслеживания скрытых структур .....	203
Черемушкин В.К., Бакаева О.А. Математическая модель гибридной рекомендательной системы для выбора товаров магазина электроники .....	207
Шаманаев П.А., Катин Д.А., Ошина Н.В. К вопросу об исследовании вынужденных колебаний цепочки трех связанных осцилляторов вблизи резонанса .....	212
Язовцева О.С. Численное моделирование распространения фронта горения по слою катализатора .....	217
V.K. Gorbunov. Economics as a Science: The resolution of the microeconomic problem of market demand .....	222
V.L. Leontiev. Convergence of Fourier Method connected with Orthogonal Splines ..	226
V.L. Litvinov, K.V. Litvinova. Mathematical modeling of nonlinear vibrations of a rope with a moving boundary .....	229

## Contents

A.V. Ankilov, P.A. Velmisov, G.A. Ankilov. Comparative analysis of some mathematical models of engine pressure measurement systems .....	12
E.V. Antipina, S.A. Mustafina, A.F. Antipin. Calculation of the optimal temperature regime of the catalytic process .....	18
A.A. Butkina, O.A. Gushina, A.S. Korzhov, A.V. Shamaev. Application of machine learning methods for soil classification .....	22
P.A. Velmisov, P.M. Abrashkin, A.V. Likanin. Mathematical modeling of heat transfer in the system «pipeline – pressure sensor» .....	28
P.A. Velmisov, P.K. Macenko, Yu.A. Tamarova. Investigation of an equation with a deviating argument .....	32
D.R. Gizzatov, E.R. Gizzatova. On the derivation of nonlinear parametric functions for radical polymerization processes .....	37
V.V. Grigoryev, T.V. Demidova. Simulation of stream falling onto a protoplanetary disk .....	40
V.V. Grigoryev, R.V. Zhalnin. Comparison of methods for modeling the interaction of a shock wave and a stationary gas in the problem of the development of Richtmayer-Meshkov instability .....	45
I.M. Gubaydullin. Mathematical modeling and optimization of fluid dynamic processes in porous media .....	50
Yu.N. Deryugin, D.A. Shishkanov. Influence function in the continuum model of peridynamics .....	55
A.I. Ivanov, D.V. Tarasov. Elimination of the methodological error in estimating the Hurst index, which occurs due to the small volume of samples .....	70
A.P. Ivanov, G.M. Maurakh. A New Type of Oscillations in a System With Friction ..	76
O.S. Kostromina. On degenerate resonances in systems close to two-dimensional nonlinear Hamiltonian ones under quasi-periodic parametric perturbations .....	84
I.D. Kochurova, M.E. Ladonkina, V.F. Tishkin. On the accuracy of the modified Godunov method with discontinuous time-dependent basis functions .....	88
N.D. Kuzmichev. Approximation of helder functions by its Fourier coefficients for a harmonically modulated argument .....	94
M.E. Ladonkina, Yu.A. Poveschenko, H. Zhang. Comparative analysis of serval iterative	

processes for realisation of fully conservative difference schemes for gas dynamics equations in Euler variables .....	99
I.V. Lutoshkin, A.G. Chekmarev. Development of a software package for solving optimal control problems.....	105
A.A. Makeev, S.I. Martynov. Modeling of periodic operation of electric centrifugal pump installations taking into account oil degassing .....	110
M.V. Malyshev, D.D. Kulminskiy. Experimental Study of a Pendulum with a Vibrating Pivot Point .....	115
T.F. Mamedova, M.A. Kutyrkina. Stability analysis of the Hindmarsh-Rose model for some variables .....	119
I.A. Maruseev, M.A. Pisarev, A.E. Rassadin. Double-sided bounds for hypergeometric functions .....	125
N.D. Morozkin, V.I. Tkachev, Y.N. Morozkin. Optimal control of the process of axisymmetric nonlinear heating of an unbounded plate taking into account restrictions .....	129
F.A. Muradov, O.R. Kucharov, N.F. Eshboeva. Numerical algorithm for a mathematical model for computing the density of harmful substances in the atmosphere .....	135
S.I. Mustafina, E.R. Gizzatova. On the possibility of using the method of conjugate systems in problems of describing chemical polymerization processes .....	140
V.I. Nikonov. On algebraic-geometric properties of the sum of cyclic subspaces with respect to a linear operator .....	143
A.Y. Perevaryukha. Perturbed equations for modeling outbreaks during invasive processes .....	149
I.V. Perova. A mathematical model of the wave process with a network carrier .....	153
E.E. Peskova, O.S. Yazovtseva. Numerical simulation of chemically active subsonic flows under the influence of laser radiation .....	158
V.N. Popov, O.V. Germider. On the collocation method for constructing a solution to the nonlinear Fredholm integral equation of the second kind using Chebyshev polynomials .....	163
A.E. Rassadin, M.I. Rubtsov. Price waves in information microeconomics .....	167
A.V. Rodkin, S.V. Tkacheva, O.S. Yazovtseva. Application of OpenMP in the problem of modeling a non-stationary process in a catalyst layer .....	171
S.F. Sayfedinov, D.K. Egorova, M.A. Garin. Logistic model of cardiovascular disease	

risk .....	174
A.N. Sakharov. Projectivization of three-dimensional linear quasiperiodic systems. .	177
R.T. Sibatov. Subdiffusion of variable order: interpretation in terms of the multiple trapping model .....	182
R.T. Sibatov, E.V. Morozova, D.A. Timkaeva. Stochastic modeling of brittle fracture of materials with jerky crack dynamics .....	188
E.E. Peskova, N.A. Tingaeva. Development and implementation of a computational algorithm for modeling reactive gas flows .....	193
A.N. Tynda. Iterative methods for solving quadratic integral equations of the first kind	196
G.K. Khisametdinova, D.S. Yunusova, A.A. Kornilova, E.R. Gizzatova. On numerical realization of the direct kinetic problem of calculation of the conversion curve of radical polymerization processes .....	199
V. Chebotareva. Computer Simulation of a Biomimetic Law for Tracking Hidden Structures .....	203
V.K. Cheremushkin, O.A. Bakaeva. Mathematical model of a hybrid recommendation system for an electronics store .....	207
P.A. Shamanaev, D.A. Katin, N.V. Oshina. Study of forced oscillations of a chain of three coupled oscillators near resonance .....	212
O.S. Yazovtseva. Numerical simulation of the combustion front propagation through the catalyst layer .....	217
V.K. Gorbunov. Economics as a Science: The resolution of the microeconomic problem of market demand .....	222
V.L. Leontiev. Convergence of Fourier Method connected with Orthogonal Splines ..	226
V.L. Litvinov, K.V. Litvinova. Mathematical modeling of nonlinear vibrations of a rope with a moving boundary.....	229

УДК 517.9:539.3:532.5

## Сравнительный анализ некоторых математических моделей систем измерения давления в двигателях\*

Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Анкилов Г.А.

ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет»

*Аннотация:* В работе рассматриваются линейный и нелинейные дифференциальные операторы, на основе которых записываются уравнения колебаний деформируемой пластины. Нелинейные операторы получены путем обобщения линейного оператора на случай нелинейностей изгибающего момента, силы демпфирования и продольной силы. На основе предложенных уравнений разработаны математические модели механической системы, состоящей из трубопровода, заполненного газожидкостной средой и скрепленного одним концом с датчиком для измерения давления в камере сгорания авиационного двигателя, и другим концом с этой камерой. Чувствительным элементом датчика, передающим информацию о давлении, является деформируемая пластина, концы которой закреплены жестко. На основе метода малого параметра получены асимптотические уравнения, описывающие совместную динамику рабочей среды в трубопроводе и деформируемого элемента датчика. Исследование динамики упругого элемента основано на применении метода Бубнова-Галеркина и проведении численных экспериментов в системе Mathematica 12.0. Произведен сравнительный анализ решений для линейной и нелинейных моделей. Показано влияние перечисленных выше видов нелинейностей на изменение величины прогиба пластины.

*Ключевые слова:* нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, аэрогидроупругость, датчик давления, трубопровод, упругий элемент, метод малого параметра, метод Бубнова-Галёркина.

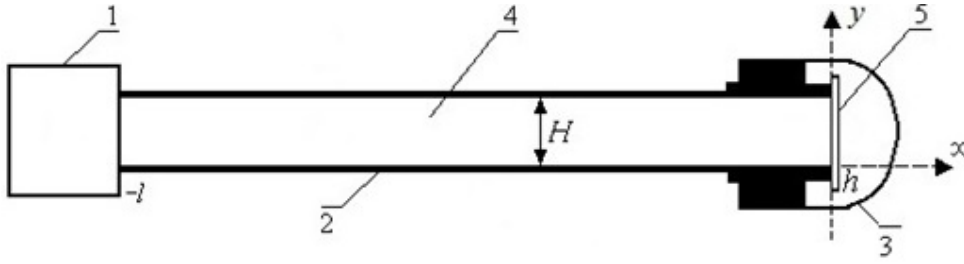
### 1. Математическая модель системы измерения давления

В работе в дополнение к проведенным ранее исследованиям [1, 2], произведен сравнительный анализ решений, полученных на основе разработанных нелинейных начально-краевых задач и решения линейной начально-краевой задачи для систем дифференциальных уравнений, описывающих совместную динамику рабочей среды в трубопроводе, закрепленного одним концом с камерой сгорания авиационного двигателя, и чувствительного элемента датчика давления, закрепленного на другом конце трубопровода. Анализ производился на основе численных экспериментов в системе компьютерной алгебры Mathematica 12.0 для конкретных параметров механической системы. Система представлена на рис. 1.

Чувствительным элементом датчика измерения давления рабочей среды в камере сгорания авиационного двигателя является упругая пластина длиной  $H$  и толщиной  $h$ . На рис. 1: 1 – длина трубопровода 2, соединяющего датчик давления 3 с камерой сгорания 1. На одном конце трубопровода ( $x = -l$ ), закрепленного на выходе из камеры сгорания двигателя, задан закон изменения давления рабочей среды 4. На другом конце трубопровода расположен чувствительный элемент 5 ( $x \in [0, h]$ ) датчика, предназначенного для измерения этого давления.

---

\*Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-21-00517.



**Рис. 1.** Трубопровод с датчиком

Математическая постановка задачи в модели несжимаемой среды примет вид:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0, \quad x \in (-l, 0), \quad y \in (0, H), \quad (1)$$

$$\Phi_x g_x + \Phi_y g_y = -g_t, \quad g(x, y, t) = 0, \quad y \in (0, H), \quad (2)$$

$$\Phi_y(x, 0, t) = \Phi_y(x, H, t) = 0, \quad x \in (-l, 0), \quad (3)$$

$$L(w(y, t)) = P(w(y, t), y, t) - \bar{P}, \quad y \in (0, H), \quad (4)$$

$$P = P_0 - \rho \left( \Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 + \frac{1}{2} \Phi_y^2 \right), \quad (5)$$

$$P(-l, y, t) = F(y, t), \quad y \in (0, H). \quad (6)$$

Здесь  $w(y, t)$  – прогиб пластины;  $\Phi(x, y, t)$ ,  $P(x, y, t)$  – потенциал скорости и давление рабочей среды в трубопроводе;  $g(x, y, t) = 0$  – уравнение поверхности упругого элемента;  $F(y, t)$  – давление рабочей среды на входе в трубопровод;  $P_0$  – давление в рабочей среде в состоянии покоя;  $\rho$  – плотность среды.

Для описания динамики деформируемой пластины, подверженной аэрогидродинамическому и тепловому воздействию, введем несколько видов входящих в уравнение (4) дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов:

$$L(w(y, t)) \equiv Mw_{tt} + Dw_{yyyy} + N(t)w_{yy} + \gamma w + \beta_1 w_t + \beta_2 w_{yyyyt}; \quad (7)$$

$$L(w(y, t)) \equiv Mw_{tt} + Dw_{yyyy} + N(t)w_{yy} + \gamma w + \beta_1 w_t + \beta_2 w_{yyyyt} - \\ - w_{yy} \left( \mu \int_0^H w_y^2 dy + \eta \left( \int_0^H w_y^2 dy \right)_t \right); \quad (8)$$

$$L(w(y, t)) \equiv Mw_{tt} + \left[ Dw_{yy} \left( 1 - \frac{3}{2} w_y^2 \right) \right]_{yy} + N(t)w_{yy} + \gamma w + \beta_1 w_t + \beta_2 w_{yyyyt}; \quad (9)$$

$$L(w(y, t)) \equiv Mw_{tt} + \left[ Dw_{yy} \left( 1 - \frac{3}{2} w_y^2 \right) \right]_{yy} + N(t)w_{yy} + \gamma w + \beta_1 w_t + \\ + \beta_2 \left[ w_{yy} \left( 1 - \frac{3}{2} w_y^2 \right) \right]_{yyt}. \quad (10)$$

При этом предполагается, что концы пластины закреплены жестко, а температура пластины  $T(x, t)$  переменная, тогда

$$w(0, t) = w_y(0, t) = 0, \quad w(H, t) = w_y(H, t) = 0, \quad N(t) = N_0 + \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \int_0^h T(x, t) dx. \quad (11)$$

В операторе (8) произведен учет нелинейности, возникающей вследствие удлинения пластины; в операторе (9) учтена нелинейность изгибающего момента; в операторе (10) производится уточнение оператора (9) в случае учета нелинейности демпфирования пластины. Целью работы является сравнительный анализ колебаний деформируемой пластины, полученных на основе нелинейных моделей деформируемого твердого тела (8)-(10), и колебаний, полученных на основе линейной модели (7).

Разложим функции  $w(y, t)$ ,  $g(x, y, t)$ ,  $\Phi(x, y, t)$ ,  $F(y, t)$  и коэффициент  $\alpha_T$  по малому параметру  $\varepsilon = \frac{h}{H}$ :

$$w(y, t) = w_0(y) + \varepsilon w_1(y, t) + \dots, \quad g(x, y, t) = x - w(y, t) = x - w_0(y) - \varepsilon w_1(y, t) - \dots, \quad (12)$$

$$\Phi(x, y, t) = \varepsilon \varphi(x, y, t) + \dots, \quad F(y, t) = P_0 + \varepsilon P_*(y, t) + \dots, \quad \alpha_T = \varepsilon \alpha_{T1} + \dots. \quad (13)$$

Ограничиваясь членами первого порядка  $\varepsilon$ , представим оператор  $L(w(y, t))$  в виде

$$L(w(y, t)) = L_1(w_0(y)) + \varepsilon L_2(w_0(y), w_1(y, t)). \quad (14)$$

Подставляя разложения (12)-(14) в систему (1)-(6) и ограничиваясь членами первого порядка  $\varepsilon$ , получим асимптотическую модель задачи в первом приближении:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad x \in (-l, 0), \quad (15)$$

$$\varphi_x(w_0(y), y, t) - w_{0y}(y) \varphi_y(w_0(y), y, t) = w_{1t}(y, t), \quad (16)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = \varphi_y(x, H, t) = 0, \quad x \in (-l, 0), \quad (17)$$

$$L_1(w_0(y)) = P_0 - \bar{P}, \quad (18)$$

$$L_2(w_0(y), w_1(y, t)) = -\rho \varphi_t(w_0(y), y, t), \quad (19)$$

$$-\rho \varphi_t(-l, y, t) = P_*(y, t). \quad (20)$$

Во всех формулах (15)-(20) координата  $y \in (0, H)$ .

Уравнение (18) является обыкновенным дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнением для одной неизвестной функции  $w_0(y)$  с краевыми условиями (11). В системе Mathematica численно найдены решение уравнения (18) для операторов (7)-(10). Показано, что в нулевом приближении нелинейная продольная сила, возникающая вследствие удлинения пластины из-за ее деформации, приводит к уменьшению прогиба пластины, а нелинейная составляющая изгибающего момента приводит к увеличению прогиба пластины.

## 2. Решение аэрогидродинамической задачи и численные эксперименты

В предположении, что избыточное давление не зависит от координаты  $y$ , т.е.  $P_*(y, t) = P_*(t)$ , для решения аэрогидродинамической задачи (15)-(16), (19)-(20) функции  $\varphi(x, y, t)$  и  $w(y, t)$  будем искать в виде

$$\varphi(x, y, t) = -\frac{1}{\rho} \int_0^t P_*(z) dz + (x+l) \alpha(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \cos \lambda_n y \cdot sh \lambda_n (x+l), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{H}, \quad (21)$$

$$w_1(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y), \quad (22)$$

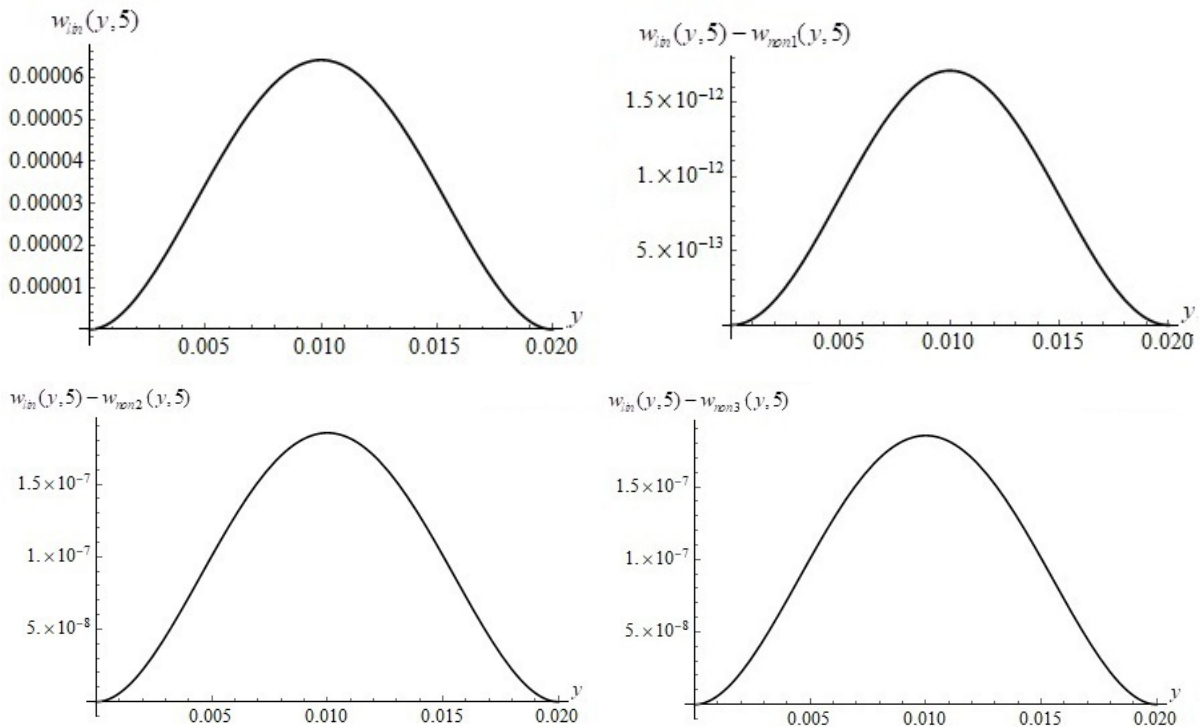
где  $\{\xi_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$  – полная система базисных функций на отрезке  $[0, H]$ , удовлетворяющих условиям жесткого закрепления концов пластины. Функция  $\varphi(x, y, t)$  в виде (21) удовлетворяет (15), (17), (20).

Подставляя (21)-(22) в (16), (19) и проецируя (16) на полную систему поверочных функций  $\{\cos \lambda_k y\}_{k=0}^{\infty}$ , а (19) на систему базисных функций  $\{\xi_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ , согласно методу Бубнова-Галеркина получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций  $\varphi_n(t)$ ,  $w_n(t)$ , на основе которой производятся численные эксперименты.

Проведены численные эксперименты для операторов (7)-(10), при этом отрезки рядов в разложениях (21)-(22) взяты длиной  $m = 8$ . Например, для параметров механической системы  $l = 0,5$ ,  $H = 0,02$ ,  $\rho = 1000$ ,  $P_0 - \bar{P} = 2 \cdot 10^4$ ,  $h = 7 \cdot 10^{-4}$ ,  $E = 7 \cdot 10^{10}$ ,  $\eta = 0,34$ ,  $D = 2,262$ ,  $M = 1,89$ ,  $N_0 = 10^5$ ,  $\gamma = 4$ ,  $\mu = 30$ ,  $\eta = 10$ ,  $\beta_1 = 4$ ,  $\beta_2 = 4$ ,  $T(x, t) = 293,15 + 40 \sin(2t) \sin\left(\frac{\pi x}{h}\right)$ ,  $P_*(t) = 10^6(5 - \cos 10t)$ ,  $w_k(0) = 0$ ,  $w_{kt}(0) = 0$ ,  $k = \overline{1, m}$  в программе Mathematica 12.0 построены графики функции деформации

$$w(y, t) = w_0(y) + \varepsilon \sum_{n=1}^m w_n(t) \xi_n(y).$$

На рис. 2 представлены деформация пластины и отличие деформации пластины в моделях (7) и (8), (7) и (9), (7) и (10) в момент времени  $t = 5$ , где  $w_{lin}(y, t)$ ,  $w_{non1}(y, t)$ ,  $w_{non2}(y, t)$ ,  $w_{non3}(y, t)$  это деформации пластины, полученные для операторов (7)-(10) соответственно.



**Рис. 2.** Деформация пластины и отличие деформации пластины в линейной и нелинейных моделях

Как видно из рис. 2 все учтенные нелинейные силы приводят к уменьшению прогиба пластины, причем наибольшее изменение прогиба достигается вследствие



учета нелинейной составляющей изгибающего момента.

## **Литература**

1. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Математическое моделирование систем измерения давления // Вестник Ульяновского государственного технического университета. 2020. Т. 90-91, № 2-3. С. 10–19.
2. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V. Mathematical modelling of the "pipeline – pressure sensor" system // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1353, 012085, № 1. P. 1–6.

MSC 74F10

## Comparative analysis of some mathematical models of engine pressure measurement systems

A.V. Ankilov, P.A. Velmisov, G.A. Ankilov

Ulyanovsk state technical university

*Abstract:* The paper considers linear and nonlinear differential operators, on the basis of which the equations of vibration of a deformable plate are written down. The nonlinear operators are obtained by generalising the linear operator to the case of nonlinearities of bending moment, damping force and longitudinal force. Based on the proposed equations, mathematical models of a mechanical system consisting of a pipeline filled with a gas-liquid medium and coupled at one end to a sensor for measuring the pressure in the combustion chamber of an aircraft engine and at the other end to this chamber have been developed. The sensing element of the sensor, which transmits the pressure information, is a deformable plate, the ends of which are rigidly fixed. On the basis of the small parameter method, asymptotic equations describing the joint dynamics of the working medium in the pipeline and the deformable element of the sensor are obtained. The study of the dynamics of the elastic element is based on the application of the Bubnov-Galerkin method and numerical experiments in Mathematica 12.0. A comparative analysis of solutions for linear and nonlinear models is performed. The influence of the above-mentioned types of nonlinearities on the change in the value of the plate deflection is shown.

*Keywords:* nonlinear partial differential equations, aero-hydroelasticity, pressure sensor, pipeline, elastic element, small parameter method, Bubnov-Galerkin method.

### References

1. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V. Mathematical modeling of pressure measurement systems // Vestnik Ul'yanovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2020. 90-91, 2-3. P. 10–19 (in Russian).
2. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V. Mathematical modelling of the "pipeline – pressure sensor" system // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1353, 012085, 1. P. 1–6.

УДК 544.4:004.023

## Расчет оптимального температурного режима каталитического процесса\*

Антипина Е.В., Мустафина С.А., Антипин А.Ф.

Уфимский университет науки и технологий

*Аннотация:* В работе приведены результаты расчета оптимального температурного режима для каталитического процесса в реакторе идеального смешения с целью получения максимального выхода продуктов реакции.

*Ключевые слова:* оптимальный температурный режим, каталитический процесс, реактор идеального смешения.

### 1. Постановка задачи

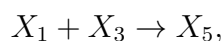
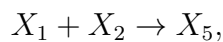
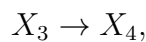
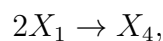
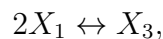
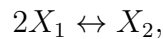
Применение методов математического моделирования для определения оптимальных условий ведения химико-технологических процессов дает возможность повысить производительность технологической схемы процесса и получить конкретные количественные результаты путем имитации лабораторного эксперимента с помощью компьютерных программ.

В качестве методов решения оптимизационных задач и задач управления можно использовать эволюционные вычисления, которые представляют собой интеллектуальные системы извлечения новых знаний и ориентированы на автоматическое их накопление с использованием процедур анализа и обобщения данных [1, 2].

Одним из направлений эволюционных вычислений являются генетические алгоритмы. Генетические алгоритмы основаны на поиске лучших решений с помощью наследования и усиления полезных свойств множества объектов определенной области в процессе имитации их эволюции [3, 4].

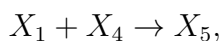
С помощью генетического алгоритма определим оптимальный температурный профиль каталитического процесса димеризации  $\alpha$ -метилстирола в реакторе идеального смешения.

Механизм реакции димеризации  $\alpha$ -метилстирола в присутствии цеолитного катализатора  $\text{NaNu}$  описывается совокупностью стадий [4]:



---

\*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00186, <https://rscf.ru/project/24-21-00186/>.



где  $X_1$  –  $\alpha$ -метилстирол,  $X_2$  –  $\alpha$ -димер,  $X_3$  –  $\beta$ -димер,  $X_4$  – циклический димер,  $X_5$  – тримеры.

Математическая модель процесса димеризации  $\alpha$ -метилстирола в реакторе идеального смешения приведена в работе [5]. Параметром управления является температура хладагента, на значения которой наложены ограничения (К):

$$303 \leq T_x(t) \leq 403.$$

Поскольку целевыми продуктами реакции димеризации  $\alpha$ -метилстирола являются линейные димеры, то зададим в качестве критерия оптимальности их максимальный выход в конечный момент времени ( $t = t_{end}$ ):

$$x_2(t_{end}) + x_3(t_{end}) \rightarrow \max.$$

## 2. Результаты и их обсуждение

В результате проведенных расчетов с помощью генетического алгоритма с вещественным кодированием вычислены оптимальные концентрации веществ и оптимальный температурный режим процесса димеризации  $\alpha$ -метилстирола в реакторе идеального смешения (рис. 1). Выявлено, что при соблюдении вычисленного оптимального температурного режима достигается максимальный выход линейных димеров (71%  $\alpha$ -димера, 10,2%  $\beta$ -димера).

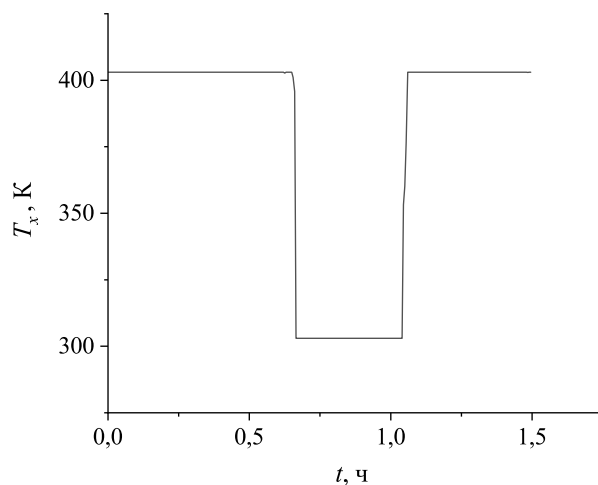


Рис. 1. Оптимальная температура хладагента

## Литература

1. Антипина Е.В., Мустафина С.А., Антипин А.Ф. Численный алгоритм идентификации кинетической модели химической реакции // Вестник Технологического университета. 2019. Т. 22, № 9. С. 13-17.

2. Antipina E.V., Mustafina S.I., Antipin A.F., Mustafina S.A. A Numerical Algorithm for Solving Optimal Control Problems with Terminal Constraints for Dynamical Systems // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2020. Vol. 56, No. 6. P. 132-140.
3. Herrera F., Lozano M., Verdegay J.L. Tackling Real-Coded Genetic Algorithms: Operators and Tools for the Behaviour Analysis // Artificial Intelligence Review. 1998. Vol. 12, No. 4. P. 265-319.
4. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Генетические алгоритмы. 2-е издание. М.: Физматлит, 2010. 368 с.
5. Antipina E.V., Mustafina S.A., Antipin A.F. Search for the Optimal Regime Parameters of a Catalytic Process Based on Evolutionary Computations // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2022. Vol. 56, No. 2. P. 162-169.

MSC 65K10

## Calculation of the optimal temperature regime of the catalytic process

E.V. Antipina, S.A. Mustafina, A.F. Antipin

Ufa University of Science and Technology

*Abstract:* The work presents the results of calculations of the optimal temperature regime for the catalytic process in the ideal mixing reactor with the aim of obtaining the maximum possible yield of the reaction products.

*Keywords:* optimum temperature regime, catalytic process, ideal mixing process.

### References

1. Antipina E.V., Mustafina S.A., Antipin A.F. Chislennyy algoritm identifikatsii kineticheskoy modeli khimicheskoy reaktsii // Vestnik Tekhnologicheskogo universiteta. 2019. 22, 9. P. 13-17 (in Russian).
2. Antipina E.V., Mustafina S.I., Antipin A.F., Mustafina S.A. A Numerical Algorithm for Solving Optimal Control Problems with Terminal Constraints for Dynamical Systems // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2020. Vol. 56, No. 6. P. 132-140.
3. Herrera F., Lozano M., Verdegay J.L. Tackling Real-Coded Genetic Algorithms: Operators and Tools for the Behaviour Analysis // Artificial Intelligence Review. 1998. Vol. 12, No. 4. P. 265-319.
4. Gladkov L.A., Kureychik V.V., Kureychik V.M. Geneticheskiye algoritmy. 2-ye izdaniye. - M.: Fizmatlit, 2010. 368 p (in Russian).
5. Antipina E.V., Mustafina S.A., Antipin A.F. Search for the Optimal Regime Parameters of a Catalytic Process Based on Evolutionary Computations // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2022. Vol. 56, No. 2. P. 162-169.

УДК 004.89:631.44

## Применение методов машинного обучения для определения категории грунта

Буткина А.А., Гущина О.А., Коржов А.С., Шамаев А.В.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

*Аннотация:* В статье описывается применение методов машинного обучения для определения категории грунта. Был выполнен анализ нескольких методов предсказательной аналитики, и в качестве лучшего был выбран метод случайного леса.

*Ключевые слова:* классификация грунтов, категории грунта, предсказательная аналитика, машинное обучение, случайный лес.

Грунты, представляющие собой комплекс природных материалов, различаются по своему происхождению, химическому составу, текстуре, физическим свойствам и другим характеристикам. Важность определения категорий грунта в инженерной сфере невозможно переоценить, поскольку геологические и геотехнические особенности грунтов напрямую влияют на проектирование и строительство различных объектов. Целью данной работы является разработка программного обеспечения (ПО), которое реализует методы предсказательной аналитики, применяемые для повышения точности прогнозирования и уменьшения вероятности получения ошибочного прогноза категории грунта.

Актуальность работы заключается в том, что применение существующих методов анализа данных о грунтах зачастую требует значительных временных и людских ресурсов, а также может быть подвержено возникновению ошибок, связанных с человеческим фактором. Разработанное ПО позволяет автоматизировать процесс анализа данных, что значительно повышает его объективность, точность и эффективность.

В качестве исходных данных в работе были использованы результаты анализа проб грунта, собранных на территории Московской области. Они были представлены в формате CSV-файла, который содержит информацию о координатах залегания, химическом составе, физических свойствах и других параметрах грунта, необходимых для проведения оценки качества почвы и принятия решений по её использованию.

В качестве основных инструментов разработки использовались интерактивная среда `Jupyter Lab` и язык программирования `Python`, предоставляющий большое количество библиотек для эффективной реализации алгоритмов машинного обучения, визуализации данных и построения графических программных интерфейсов. В частности, в процессе разработки использовались следующие библиотеки:

- `pandas` – предоставляет удобные инструменты для работы с данными, включая чтение и запись данных, манипуляции с таблицами, фильтрацию и агрегацию данных;
- `Numpy` – для выполнения математических операций и работы с массивами данных;
- `Scikit-learn (sklearn)` – предоставляет реализацию различных алгоритмов машинного обучения, включая используемые при анализе: `Random Forest Classifier`

(RFC), Naive Bayes, Multi-Layer Perceptron (MLP) и Decision Tree;

- `Matplotlib` и `Seaborn` – предоставляют различные инструменты для построения статистических графиков и диаграмм для анализа и визуализации данных;
- `Imblearn` – позволяет выполнять работы с дисбалансом классов;
- `Tkinter` – позволяет создавать графический интерфейс пользователя (GUI).

Исходный CSV-файл был импортирован с помощью библиотеки `pandas` и ее метода `read_csv` в среду `Jupyter Lab` и преобразован в `DataFrame`. После этого выполнена стандартная последовательность действий по обработке данных с помощью моделей машинного обучения, которая включает подготовку данных, корректную обработку пропущенных значений, выбор метрики качества, удаление аномалий из выборки, удаление дублирующей информации и устранение дисбаланса классов, обучение модели и аналитику результатов. Далее опишем наиболее значимые этапы обработки данных из числа вышеупомянутых.

Сбор и анализ данных являются одним из ключевых этапов научной и производственной деятельности. Однако любая выборка данных может содержать аномальные значения, известные также как выбросы, которые могут исказить результаты анализа. Необходимость обнаружения таких аномалий является критически важной для обеспечения точности и достоверности выводов, основанных на результатах анализа. Для обнаружения выбросов в данной работе были использованы визуальные методы, такие как:

- диаграммы разброса (`scatter plots`), которые позволяют визуально выявить выбросы, отображая точки данных на графике,
- диаграммы размаха (`box plots`), которые визуально показывают медиану, квартили и размах данных, что позволяет выявлять выбросы.

Это делает возможным применение методов машинного обучения, такие как:

- алгоритмы кластеризации, которые позволяют выявлять аномалии на основе группировки данных в кластеры и определять точки, значительно отличающиеся от остальных (`DBScan`, `AgglomerativeClustering`);
- алгоритмы обнаружения аномалий, которые используются для обучения моделей на нормальных данных и выявления аномальных значений (`Isolation Forest`).

Использование перечисленных методов позволило выполнить глубокий анализ данных о грунтах, выявить и исключить из выборки большинство выбросов. Как показало проведенное в работе исследование, наиболее подходящим методом для обнаружения аномалий является алгоритм `DBSCAN`, благодаря его способности эффективно идентифицировать плотные кластеры данных и отделять аномалии.

Рассмотрим примеры метрик качества, используемых для оценки моделей машинного обучения в задачах многоклассовой классификации, выбор которых играет важную роль при оценке производительности этих моделей:

- точность (`Precision`,  $P$ ) – это метрика, которая отражает долю истинно положительных классификаций относительно всех положительных классификаций;
- полнота (`Recall`,  $R$ ) – это метрика, которая отражает долю истинно положительных классификаций относительно всех действительно положительных примеров.
- F1-мера (`F1-Score`) – это гармоническое среднее между точностью и полнотой, которое позволяет оценить баланс между перечисленными выше метриками. Формула F1-меры:

$$F_1 = 2 \frac{P \cdot R}{P + R} \quad (1)$$



Метрика **F1-score** была выбрана в качестве основной для оценки моделей классификации. Данный выбор обусловлен тем, что она учитывает как ложные положительные, так и ложные отрицательные классификации. Это особенно важно в случаях, когда баланс между точностью и полнотой критически важен, что делает **F1-score** наиболее подходящей метрикой для текущей задачи. Следует отметить, что данная метрика использовалась в качестве основной при решении схожих задач зарубежными авторами [1].

На следующем этапе выполнялось исключение дублирующихся признаков, который был реализован для того, чтобы избежать избыточных вычислений и повысить качество анализа данных. Для этого использовалась тепловая матрица корреляции, позволившая исключить наиболее взаимосвязанные признаки.

Далее для устранения дисбаланса классов была применена комбинация методов ре-семплинга. Был построен пайплайн из алгоритмов **SMOTE**, **RandomOverSampler** и **Nearmiss**, затем для разных заявленных нижних и верхних границ проводился ре-семплинг для определения наилучшей пары границ выборки.

На следующем этапе категориальные признаки были преобразованы в числовые форматы для их последующего использования в моделях машинного обучения с помощью метода `get_dummies()`, а затем полученные числовые признаки были масштабированы для обеспечения нормализации данных. Этот этап важен для улучшения работы моделей машинного обучения, так как масштабирование помогает избежать проблемы несоответствия масштабов признаков. После этого данные были разделены на обучающую и тестовую выборки для оценки производительности модели. Это стандартный процесс, который позволяет оценить, как хорошо модель будет работать на новых данных.

Далее был реализован **uplift-test** для оценки влияния каждого фактора на точность предсказания. При этом факторы постепенно добавлялись в модель и фиксировалась ключевая метрика. Это помогает понять, какие факторы оказывают наибольшее влияние на целевую переменную или результат предсказания. Также данный тест позволяет потенциально выявить факт и момент начала переобучения модели под рабочую выборку, когда качество модели начинает ухудшаться или не меняется на независимой выборке при росте качества на рабочей выборке. Результаты **uplift-test** в нашем случае, говорят о том, что метрика качества монотонно возрастает (рис. 1), и не происходит переобучение модели при увеличении числа признаков, т.е. все признаки можно использовать для реализации модели. Однако количество признаков также можно и уменьшить, если ключевая метрика на тестовой выборке преодолела устанавливаемый заказчиком порог. Так, например, если пороговым значением для **F1-score** является 0.95, то можно оставить лишь 24 признака для обучения модели (см. красную черту на рис. 1), что положительно скажется на времени обучения модели, и что более важно – на скорости сбора признаков на новых данных.

Далее был выполнен подбор гиперпараметров модели **RFC** с использованием метода **Grid Search** – это процесс систематического перебора различных комбинаций значений гиперпараметров с целью определения наилучшей конфигурации для модели. Гиперпараметры – это настраиваемые параметры, позволяющие управлять процессом обучения модели. Наилучшие гиперпараметры модели **RFC** после проведения `grid_search: 100` – количество деревьев (`n_estimators`), 20 – максимальная глубина деревьев (`max_depth`), 2 – минимальное количество образцов, необходимых для разделения внутреннего узла (`min_samples_split`), 1 – минимальное количество об-

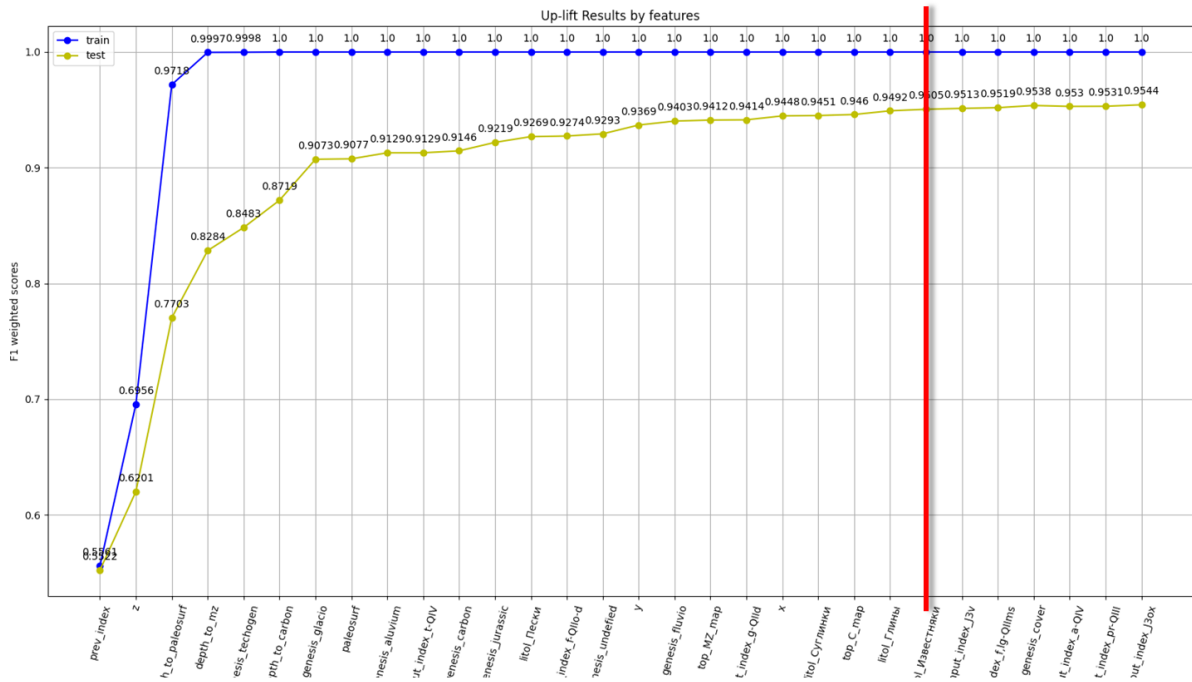


Рис. 1. Визуализация uplift-test для первых 30 признаков.

разцов, необходимых для листового узла (`min_samples_leaf`).

После подбора гиперпараметров и обучения модели было произведено сравнение RFC с другими классификаторами, которые можно было применить в этой задаче. На рис. 2 представлено сравнение производительности четырех различных моделей машинного обучения: RFC, MLP, Naive Bayes и Decision Tree.

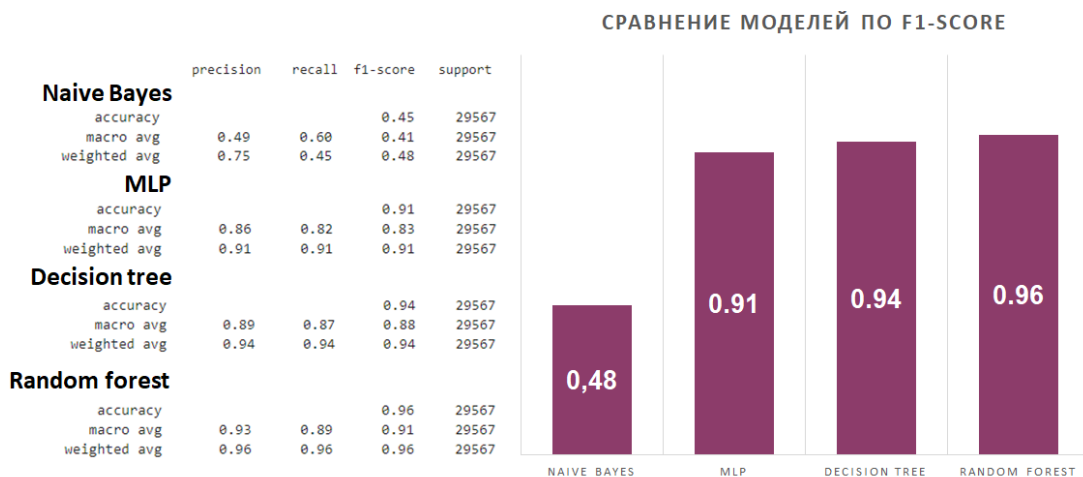


Рис. 2. Сравнение рассмотренных моделей по F1-score

Анализ результатов позволяет определить, какая из указанных моделей лучше всего справляется с поставленной задачей:

1. **Naive Bayes**. *Преимущества*: проста в реализации, хорошо работает с категориальными данными, эффективен для задач классификации текста. *Результаты*:

точность предсказаний оставляет желать лучшего, её зачастую используют в качестве базовой модели, поскольку качество предсказаний основано на распределении классов.

2. **MLP**. *Преимущества*: способна моделировать сложные нелинейные зависимости, подходит для задач классификации и регрессии. *Результаты*: MLP достаточно неплохая модель, но для данной задачи показала более низкую точность, чем RFC.

3. **Decision Tree**. *Преимущества*: проста в интерпретации, не требует масштабирования данных, способна обнаруживать важные признаки. *Результаты*: по сути является ячейкой в RFC, поэтому она ожидаемо показала более низкий результат.

4. **RFC**. *Преимущества*: высокая точность благодаря ансамблевому подходу, устойчивость к переобучению. *Результаты*: гипотеза подтвердилась, RFC является лучшей моделью для решения поставленной задачи.

Практическим результатом проведенного в работе исследования является программное обеспечение, которое может использоваться в геотехнических исследованиях и строительных компаниях для оценки состояния грунта.

## Литература

1. Nguyen M.D., Costache R., Sy A.H. et al. Novel approach for soil classification using machine learning methods // Bulletin of Engineering Geology and the Environment. 2022. 81, 468. <https://doi.org/10.1007/s10064-022-02967-7>

MSC 68T20 68-04

## Application of machine learning methods for soil classification

A.A. Butkina, O.A. Gushina, A.S. Korzhov, A.V. Shamaev

National Research Mordovia State University

*Abstract:* The article describes how the authors apply of machine learning methods to classify soil types. An analysis of several predictive analytics methods was performed, and the «Random Forest Classifier» method was chosen as the best one.

*Keywords:* soil classification, soil types, predictive analytics, machine learning, random forest.

### References

1. Nguyen M.D., Costache R., Sy A.H. et al. Novel approach for soil classification using machine learning methods // Bulletin of Engineering Geology and the Environment. 2022. 81, 468. <https://doi.org/10.1007/s10064-022-02967-7>

УДК 517.9:536.2

## Математическое моделирование передачи тепла в системе «трубопровод – датчик давления»\*

Вельмисов П.А., Абрашкин П.М., Ликанин А.В.

ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет»

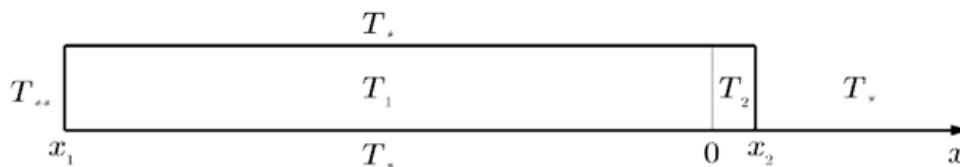
*Аннотация:* Рассматривается одномерная нестационарная задача о распределении температуры в механической системе «трубопровод – датчик давления». Предложен численно-аналитический метод решения, основанный на методе Галеркина. Решение задачи сведено к интегрированию системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. В случае, когда температура на входе в трубопровод постоянна, построено аналитическое решение задачи с помощью метода разделения переменных.

*Ключевые слова:* теплообмен, трубопровод, датчик давления, дифференциальные уравнения, метод Галеркина, метод разделения переменных.

### 1. Математическая модель теплопередачи

В различных отраслях науки и техники важным является повышение надежности и долговечности конструкций, подвергающихся вибрационному и тепловому воздействиям. Температурные и вибрационным воздействия критичны, в том числе, для датчиков давления газожидкостных сред [1]. Это приводит к погрешностям измерений и возможному разрушению чувствительных элементов. Создания новых систем измерения давления в камерах сгорания двигателей требует, в частности, развитие ракетно-космической и авиационной техники.

В данной статье представлена математическая модель теплопередачи в системе «трубопровод – датчик давления» [2–4]. В такой системе наличие трубопровода, связывающего камеру сгорания двигателя с датчиком давления, позволяет уменьшить тепловое и вибрационное воздействие на корпус датчика и его чувствительный элемент. Модель позволяет исследовать изменение температуры по длине трубопровода и в поперечном сечении чувствительного элемента датчика давления. Принципиальная схема системы изображена на рис. 1.



**Рис. 1.** Схема механической системы «трубопровод–датчик давления»

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - b_1^2 (T_1 - T_*), \quad x \in (x_1, 0), \quad (1)$$

---

\*Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда N 23-21-00517

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - b_2^2 (T_2 - T_*), \quad x \in (0, x_2), \quad (2)$$

$$T_1(x_1, t) = T_{**}(t), \quad (3)$$

$$-k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(x_2, t) = \alpha [T_2(x_2, t) - T_*], \quad (4)$$

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \beta (T_1 - T_2), \quad -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \beta (T_1 - T_2), \quad x = 0. \quad (5)$$

В формулах (1)–(5) функции  $T_1(x, t)$  и  $T_2(x, t)$  описывают распределения температуры в рабочей среде по длине трубопровода и по толщине чувствительного элемента датчика;  $a_1^2 = \frac{k_1}{c_1 \rho_1}$ ,  $a_2^2 = \frac{k_2}{c_2 \rho_2}$ ,  $b_1^2 = \frac{\alpha_1}{\rho_1 c_1}$ ,  $b_2^2 = \frac{\alpha_2}{\rho_2 c_2}$ ;  $k_1, k_2, c_1, c_2, \rho_1, \rho_2$  – коэффициенты теплопроводности, коэффициенты теплоемкости и плотности рабочей среды и материала элемента,  $\alpha$  – коэффициент теплообмена между материалом элемента и внешней средой (поверхность  $x = x_2$ );  $\beta$  – коэффициент теплообмена между материалом элемента и рабочей средой (поверхность  $x = 0$ );  $\alpha_1, \alpha_2$  – коэффициенты теплообмена на боковых поверхностях трубопровода и чувствительного элемента. Уравнения (1)–(2) описывают нестационарное распределение температуры в рабочей среде в трубопроводе ( $T_1$ ) и в материале чувствительного элемента ( $T_2$ ); условие (3) задает значение температуры ( $T_{**}$ ) на выходе из камеры сгорания двигателя (на входе в трубопровод,  $x = x_1$ ); (4) – условие теплообмена на внешней поверхности чувствительного элемента ( $x = x_2$ ), если  $\alpha = 0$ , то будем иметь условие теплоизоляции; (5) – условия теплообмена между рабочей средой и материалом чувствительного элемента (из этих условий следует равенство тепловых потоков при  $x = 0$ ).

## 2. Численно-аналитическое решение задачи

Задачу (1)–(5) будем решать методом Галеркина. Рассмотрим в качестве примера случай, когда внешняя поверхность ( $x = x_2$ ) чувствительного элемента теплоизолирована ( $\alpha = 0$ ). Представим искомые функции  $T_1(x, t)$ ,  $T_2(x, t)$  в виде разложений по полным системам функций

$$T_1 = T_* + A(t) + B(t)x + \sum_{n=1}^N A_n(t) \sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{x_1}, \quad x \in (x_1, 0) \quad (6)$$

$$T_2 = T_* + C(t) + \sum_{n=1}^N \tilde{A}_n(t) \sin(\nu_n x), \quad \nu_n = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{x_2}, \quad x \in (0, x_2) \quad (7)$$

где  $A(t), B(t), C(t), A_n(t), \tilde{A}_n(t)$  – функции, подлежащие определению. Подставляя (6)–(7) в (1)–(2), запишем условия ортогональности невязок к базисным функциям, при этом невязку уравнения (1) проецируем на систему функций  $\{\sin(\lambda_n x)\}$ , а невязку уравнения (2) – на систему функций  $\{\sin(\nu_n x)\}$

$$\tilde{A}'_m + (a_2^2 \nu_m^2 + \beta_2^2) \tilde{A}_m = \frac{2}{x_2} (C' + b_2^2 C) \psi_m, \quad m = \overline{1, N}, \quad (8)$$

$$A'_m + (a_1^2 \lambda_m^2 + \beta_1^2) A_m = \frac{2}{x_1} (A' + b_1^2 A) \xi_m + \frac{2}{x_1} (B' + b_1^2 B) \theta_m, \quad m = \overline{1, N}. \quad (9)$$

Коэффициенты  $\xi_m, \theta_m, \psi_m$ , определяются формулами

$$\xi_m = \int_{x_1}^0 \sin \lambda_m x dx, \quad \theta_m = \int_{x_1}^0 x \sin \lambda_m x dx, \quad \psi_m = \int_0^{x_2} \sin \nu_m x dx \quad (10)$$

С учетом граничных условий (3)-(5) получим:

$$A = T_{**}(t) - T_* - x_1 \left[ \frac{k_2}{k_1} \sum_{n=1}^N \nu_n \tilde{A}_n - \sum_{n=1}^N \lambda_n A_n \right], \quad (11)$$

$$B = - \sum_{n=1}^N \lambda_n A_n + \frac{k_2}{k_1} \sum_{n=1}^N \nu_n \tilde{A}_n, \quad (12)$$

$$C = T_{**}(t) - T_* + \left( \frac{k_2}{\beta} - \frac{k_2 x_1}{k_1} \right) \sum_{n=1}^N \nu_n \tilde{A}_n + x_1 \sum_{n=1}^N \lambda_n A_n. \quad (13)$$

Получили систему  $(2N + 3)$  уравнений для  $(2N + 3)$  функций  $A(t), B(t), C(t), A_n(t), \tilde{A}_n(t)$ , при этом (8)-(9) – линейные дифференциальные уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами, а (11)–(13) – линейные алгебраические уравнения. Подставляя выражения для  $A, B, C$  из (11)–(13) в (8)-(9), получим систему  $(2N)$  линейных дифференциальных уравнений для  $(2N)$  функций  $A_n(t), \tilde{A}_n(t)$ .

Решение задачи (1)–(5) можно также представить в виде разложений по полным системам функций  $\{\sin(\lambda_n x)\}$ ,  $\lambda_n = \frac{n\pi}{x_1}$ ,  $x \in (x_1, 0)$ ,  $n = \overline{1, \infty}$  и  $\{\cos(\nu_n x)\}$ ,  $\nu_n = \frac{n\pi}{x_2}$ ,  $x \in (0, x_2)$ ,  $n = \overline{0, \infty}$ :

$$T_1 = T_* + A(t) + B(t)x + \sum_{n=1}^N A_n(t) \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{x_1}, \quad (14)$$

$$T_2 = T_* + C(t) + D(t)x + E(t)x^2 + \sum_{n=1}^N \tilde{A}_n(t) \cos \nu_n x, \quad \nu_n = \frac{n\pi}{x_2}. \quad (15)$$

Невязку уравнения (1) следует проецировать на систему функций  $\{\sin(\lambda_n x)\}$ ,  $n = \overline{1, N}$ , а невязку уравнения (2) – на систему функций  $\{\cos(\nu_n x)\}$ ,  $n = \overline{0, N}$ .

В случае, когда температура на входе в трубопровод ( $T_{**}$ ) постоянна, построено аналитическое решение задачи (1)–(5) с помощью метода разделения переменных.

## Литература

1. Эткин Л. Г. Виброакустические датчики // Теория и практика. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 408 с.
2. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем. Ульяновск: УлГТУ, 2018. 152 с.
3. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал СВМО. 2020. Т. 22, № 3. С. 352–367. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202003.352-367>
4. Velmiso P. A., Tamarova Yu. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modeling of pressure control systems in liquid and gaseous media // Proceedings of the AIP. 2021 conference. Vol. 2333. P. 120004. DOI: 10.1063/5.0041778

MSC 49K20, 49M15, 80A20, 35K05

## **Mathematical modeling of heat transfer in the system «pipeline – pressure sensor»**

P.A. Velmisov, P.M. Abrashkin, A.V. Likanin

Ulyanovsk state technical university

*Abstract:* The one-dimensional nonstationary problem of temperature distribution in the mechanical system «pipeline – pressure sensor» is considered. A numerical and analytical method of solution based on the Galerkin method is proposed. The solution of the problem is reduced to integration of a system of linear ordinary differential equations of the first order with constant coefficients. In the case when the temperature at the pipeline inlet is constant, the analytical solution of the problem is constructed using the method of separation of variables.

*Keywords:* heat exchange, pipeline, pressure sensor, differential equations, Galerkin method, method of separation of variables.

### **References**

1. Etkin L. G. Vibrofrequency sensors. Theory and practice. Moscow: Bauman Moscow State Technical University, 2004. 407 p.
2. Velmisov, P. A.; Pokladova, Yu. V. Investigation of the dynamics of the deformable elements of some aero-hydroelastic systems. Ulyanovsk: UISTU, 2018. 152 p.
3. Velmisov, P. A.; Tamarova, Yu. A. Mathematical modeling of pressure measurement systems in gas-liquid media // SVMO Journal. 2020. T. 22, № 3. P. 352-367. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202003.352-367>
4. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modeling of pressure control systems in liquid and gaseous media // Proceedings of the AIP. 2021 conference. Vol. 2333. P. 120004. DOI: 10.1063/5.0041778



УДК 517.929.63:519.6

## Исследование одного уравнения с отклоняющимся аргументом\*

Вельмисов П.А., Маценко П.К., Тамарова Ю.А.

Ульяновский государственный технический университет

*Аннотация:* Рассматривается линейное дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом, полученное при исследовании математической модели системы контроля за изменением давления в камере сгорания двигателя. Указаны некоторые точные решения уравнения, а также предложен численный метод решения, основанный на методе Рунге-Кутты.

*Ключевые слова:* дифференциально-разностные уравнения, метод Рунге-Кутты, система измерения давления, аэрогидроупругость, динамика.

### 1. Приведение математической модели системы измерения давления к уравнению с отклоняющимся аргументом

Для контроля за изменением давления в камере сгорания двигателя применяются системы, в состав которых входит трубопровод и датчик давления. Трубопровод в такой системе используется для ослабления высокотемпературного и вибрационного воздействия на датчик, так как позволяет расположить датчик на некотором расстоянии от двигателя.

Рассмотрим систему, в которой трубопровод длиной  $l$  имеет поперечное сечение в виде сектора, образованного лучами  $\theta = \theta_1$ ,  $\theta = \theta_2$  и окружностью  $r = R$ . Датчик расположен в конце трубопровода ( $x = l$ ) и содержит упругий элемент, который представляет собой деформируемую пластину в форме сектора, как и поперечное сечение трубопровода. Деформацию упругого элемента обозначим функцией  $w(r, \theta, t)$ . Рабочая среда в трубопроводе считается сжимаемой, а ее движение описывается потенциалом скорости  $\varphi(x, r, \theta, t)$ . На входе в трубопровод ( $x = 0$ ) задан закон изменения  $P(r, \theta, t)$  избыточного давления рабочей среды. Соответствующая математическая модель, описывающая динамику механической системы, имеет вид

$$\varphi_{tt} = a_0^2 \left( \varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r + \frac{1}{r^2} \varphi_{\theta\theta} \right), \quad x \in (0, l), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (1)$$

$$\varphi_r(x, R, \theta, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2)$$

$$\varphi_{\theta}(x, r, \theta_k, t) = 0, \quad k = 1, 2, \quad x \in (0, l), \quad r \in (0, R), \quad (3)$$

$$\varphi_x(l, r, \theta, t) = w_t(r, \theta, t), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (4)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, r, \theta, t) = P(r, \theta, t), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (5)$$

$$L(w(r, \theta, t)) \equiv mw_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta(\Delta^2 w)_t + f(w_t, w) = P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, r, \theta, t) - P_*, \quad (6)$$

$$r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2),$$

---

\*Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда №23-21-00517.

где

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2},$$

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial r^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial r} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$$

В (1)-(6) индексы снизу обозначают частные производные;  $P_0, \rho_0, a_0, P_*, m, D, N, \beta$ - некоторые физические постоянные;  $f(w_t, w)$  - некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации  $w$  и скорости деформации  $w_t$ .

Задачу (1)-(6) необходимо дополнить начальными условиями, а также граничными условиями для функции  $w(r, \theta, t)$ , соответствующими типу закрепления элемента.

В работе [1] с помощью введения интегральных характеристик основных динамических величин решение задачи (1)-(6) сведено к исследованию уравнения с отклоняющимся аргументом, связывающего функцию  $\psi(t)$  (характеризует деформацию упругого элемента датчика) с функцией  $G(t)$  (характеризует закон изменения давления рабочей среды в двигателе)

$$m_0 \left[ \ddot{\psi}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \ddot{\psi}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \alpha_0 \left[ \dot{\psi}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \dot{\psi}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \gamma_0 \left[ \psi\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \psi\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] - \rho_0 a_0 w_0 \left[ \dot{\psi}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) - \dot{\psi}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] = 2 \left[ G(t) + (P_0 - P_*) \frac{R^2(\theta_2 - \theta_1)}{2} \right]. \quad (7)$$

Отметим, что

$$G(t) = \iint_H P(r, \theta, t) r dr d\theta, \quad H = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq R; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}, \quad w(r, \theta, t) = \psi(t)g(r, \theta),$$

$$m_0 = m \iint_H g(r, \theta) r dr d\theta, \quad \alpha_0 = \alpha \iint_H g(r, \theta) r dr d\theta + \beta \iint_H \Delta^2 g(r, \theta) r dr d\theta,$$

$$w_0 = \iint_H r g(r, \theta) dr d\theta,$$

$$\gamma_0 = D \iint_H \Delta^2 g(r, \theta) r dr d\theta + N \iint_H \Delta g(r, \theta) r dr d\theta + \gamma \iint_H g(r, \theta) r dr d\theta.$$

Функция  $g(r, \theta)$  удовлетворяет граничным условиям, соответствующим жесткому заземлению:  $g(R, \theta) = g_r(R, \theta) = 0$ ,  $g(r, \theta_k) = g_\theta(r, \theta_k) = 0$ ,  $k = 1, 2$ . При этом функция  $f(w, w_t)$ , являющаяся характеристикой упругих сил и сил демпфирования внешних связей, принималась в виде  $f(w, w_t) = \alpha w_t + \gamma w$ .

## 2. Некоторые точные решения уравнения

Рассмотрим некоторые точные решения уравнения (7).

В случае, когда на постоянное рабочее давление наложено периодическое возмущение, функция  $G(t)$  задается в виде:  $G(t) = [a \cos \theta t + b \sin \theta t] + G_0$ , тогда функцию  $\psi(t)$  можно представить выражением  $\psi(t) = A \cos \theta t + B \sin \theta t + C$  ( $a, b, G_0, A, B, C$  - некоторые постоянные). Подставляя в уравнение (7)  $G(t)$  и  $\psi(t)$ , получим следующие

выражения для коэффициентов:

$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{\Delta} \left[ \frac{a}{m_0} \left( (-\theta^2 + \frac{\gamma_0}{m_0}) \cos \frac{\theta l}{a_0} - \frac{\rho_0 a_0 w_0 \theta}{m_0} \sin \frac{\theta l}{a_0} \right) - \frac{b}{m_0} \frac{\alpha_0 \theta}{m_0} \cos \frac{\theta l}{a_0} \right], \\ B &= \frac{4}{\Delta} \left[ \frac{b}{m_0} \left( (-\theta^2 + \frac{\gamma_0}{m_0}) \cos \frac{\theta l}{a_0} - \frac{\rho_0 a_0 w_0 \theta}{m_0} \sin \frac{\theta l}{a_0} \right) + \frac{a}{m_0} \frac{\alpha_0 \theta}{m_0} \cos \frac{\theta l}{a_0} \right], \\ \Delta &= 4 \left[ \frac{a}{m_0} \left( -\theta^2 + \frac{\gamma_0}{m_0} \right) \cos \frac{\theta l}{a_0} - \frac{\rho_0 a_0 w_0 \theta}{m_0} \sin \frac{\theta l}{a_0} \right]^2 + 4 \left( \frac{\alpha_0 \theta}{m_0} \right)^2 \cos^2 \frac{\theta l}{a_0}, \\ C &= \frac{1}{\gamma_0} \left[ G_0 + (P_0 - P_*) \frac{R^2(\theta_2 - \theta_1)}{2} \right]. \end{aligned}$$

Если  $G(t) = at^2 + bt + G_0$ , то функцию  $\psi(t)$  ищем в виде  $\psi(t) = At^2 + Bt + C$ . После подстановки в (7) получим:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{\gamma_0}, \quad B = \frac{b}{\gamma_0} - \frac{2a\alpha_0}{\gamma_0^2}, \\ C &= -\frac{m_0 a}{\gamma_0^2} \left( 2 + \frac{\gamma_0 l^2}{m_0 a_0^2} + \frac{2\rho_0 w_0 l}{m_0} \right) - \frac{\alpha_0}{\gamma_0} \left( \frac{b}{\gamma_0} - \frac{2a\alpha_0}{\gamma_0^2} \right) + \frac{1}{\gamma_0} \left[ G_0 + (P_0 - P_*) \frac{R^2(\theta_2 - \theta_1)}{2} \right]. \end{aligned}$$

При экспоненциальном возмущении постоянного рабочего давления функция  $G(t)$  имеет вид:  $G(t) = G_0 + ae^{\lambda t}$ . При  $\lambda > 0$  имеет место экспоненциальный рост давления, при  $\lambda < 0$  имеем для давления график с насыщением. В этом случае  $\psi(t) = C + Ae^{\lambda t}$ . Подставив ее в уравнение (7) и проведя ряд несложных математических действий, найдем коэффициенты  $A$  и  $C$ :

$$A = \frac{a}{\operatorname{ch} \left( \frac{\lambda l}{a_0} \right) \left[ m_0 \lambda^2 + \alpha_0 \lambda + \gamma_0 + \rho_0 a_0 w_0 \operatorname{th} \left( \frac{\lambda l}{a_0} \right) \right]}, \quad C = \frac{1}{\gamma_0} \left[ G_0 + (P_0 - P_*) \frac{R^2(\theta_2 - \theta_1)}{2} \right].$$

### 3. Численное решение уравнения

В уравнении (7) сделаем замену:  $\psi(t + \frac{l}{a_0}) = y(t)$ . Тогда уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} y''(t) + y'' \left( t - \frac{2l}{a_0} \right) + a_1 \left[ y'(t) + y' \left( t - \frac{2l}{a_0} \right) \right] + a_2 \left[ y(t) + y \left( t - \frac{2l}{a_0} \right) \right] = \\ = g(t) + a_3 y' \left( t - \frac{2l}{a_0} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

В (8) введены обозначения:

$$g(t) = \frac{2}{m_0} \left[ G(t) + (P_0 - P_*) \frac{R^2(\theta_2 - \theta_1)}{2} \right], \quad a_1 = \frac{\alpha_0 + \rho_0 a_0 w_0}{m_0}, \quad a_2 = \frac{\gamma_0}{m_0}, \quad a_3 = \frac{2\rho_0 w_0}{m_0}.$$

Уравнение (8) будем решать с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \quad (9)$$

и условиями на начальном множестве  $t \leq 0$  [2-4]

$$y(t) = y_0 \eta_0(t), \quad y'(t) = y'_0 \eta_1(t), \quad y''(t) = y''(0) \eta_2(t), \quad t \in \left[ -\frac{2l}{a_0}, 0 \right], \quad (10)$$

где  $\eta_0(t)$ ,  $\eta_1(t)$ ,  $\eta_2(t)$  – непрерывные функции, удовлетворяющие условию  $\eta_0(0) = \eta_1(0) = \eta_2(0) = 1$ , причем для удобства вычислений будем считать, что

$$\eta_0\left(-\frac{2l}{a_0}\right) = \eta_1\left(-\frac{2l}{a_0}\right) = \eta_2\left(-\frac{2l}{a_0}\right) = 0. \quad (11)$$

Чтобы решение уравнения (8) было непрерывным, найдем  $y''(0)$  из уравнения (8) при  $t = 0$  с учетом (11):  $y''(0) = g(0) - a_1y'_0 - a_2y_0$ .

Уравнение (8) решалось численно на каждом отрезке  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $t_k = \frac{2l}{a_0}k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  в пакете Mathematica по следующему алгоритму:

1. На отрезке  $\left[0, \frac{2l}{a_0}\right]$  уравнение (8) принимает вид

$$y''(t) + a_1y'(t) + a_2y(t) = g(t) - [g(0) - a_1y'_0 - a_2y_0]\eta_2\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) - a_1y'_0\eta_1\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) - a_2y_0\eta_2\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) + a_3y'_0\eta_1\left(t - \frac{2l}{a_0}\right),$$

в котором правая часть задана. Решаем задачу Коши с начальными условиями (9) методом Рунге-Кутты.

2. На отрезках  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  сделаем замену:  $v_k(t) = y_k(t) + y_k\left(t - \frac{2l}{a_0}\right)$ .

Тогда получим уравнение

$$v_k''(t) + a_1v_k'(t) + a_2v_k(t) = g(t) + a_3y'_k\left(t - \frac{2l}{a_0}\right),$$

в правую часть которого входит производная  $y'_k\left(t - \frac{2l}{a_0}\right)$ , вычисленная на предыдущем отрезке. Начальные условия также находятся из значений функций, полученных на предыдущем шаге. Таким образом, на каждом шаге получим задачу Коши для функции  $v_k(t)$ , которую решаем методом Рунге-Кутты.

## Литература

1. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Математическое моделирование динамики аэроупругой системы «трубопровод – датчик давления» // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2024. №2. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.08
2. Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
3. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
4. Курбатов В.Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1990. 168 с.

MSC 34K99, 65K05

## Investigation of an equation with a deviating argument

P.A. Velmisov, P.K. Macenko, Yu.A. Tamarova

Ulyanovsk State Technical University

*Abstract:* The linear differential equation with a deviating argument obtained in the study of a mathematical model of a system for monitoring pressure changes in an engine combustion chamber is considered. Some exact solutions of the equation are indicated, and a numerical solution method based on the Runge-Kutta method is proposed.

*Keywords:* differential-difference equations, Runge-Kutta method, pressure measurement system, aerohydroelasticity, dynamics.

### References

1. Velmisov P.A., Tamarova Y.A. Mathematical modeling of the dynamics of the aeroelastic «pipeline - pressure sensor» // PNRPU Mechanics Bulletin. 2024. №2 (in Russian). doi: 10.15593/perm.mech/2024.2.08
2. Bellman R., Kuk K.L. *Differentsial'no-raznostnyye uravneniya*. M.: Mir, 1967. 548 p.
3. Myshkis A.D. *Lineynyye differentsial'nyye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom*. M.: Nauka, 1972. 352 p.
4. Kurbatov V.G. *Lineynyye differentsial'no-raznostnyye uravneniya*. Voronezh: Izd-vo VGU, 1990. 168 p.

УДК 519.60

## О выводе нелинейных параметрических функций для процессов радикальной полимеризации

Гиззатов Д.Р., Гиззатова Э.Р.

Уфимский университет науки и технологий

*Аннотация:* В данной работе применяется метод поиска нелинейных параметрических базисных функций для процесса радикальной полимеризации диеновых углеводородов, позволяющий получать набор функций-векторов, характеризующих процесс. В свою очередь, функции-вектора показывают принципиальные взаимосвязи компонентов химического процесса и могут быть интерпретированы как ограничительные условия для поиска решений обратных кинетических задач.

*Ключевые слова:* радикальная полимеризация, конверсия, математическая модель, базис реакций, базисные функции.

### 1. Введение. Схема процесса.

Процессы полимеризации позволяют исследователям проводить качественный эмпирический [1] и аналитический анализ [2]. Последние позволяют получать зависимости некоторого рода, характеризующие процесс таким образом, что предугадывается поведение некоторых компонентов смеси и их взаимосвязь друг с другом [3]. При этом в аналитических зависимостях участвуют константы скоростей элементарных стадий, что показывает вклад этих стадий на значения получаемых количественных характеристик готового полимерного продукта.

Исследуется кинетическая схема процесса радикальной полимеризации, проходящая в пять стадий: стадии иницирования (1), стадии роста полимерной цепи (2), стадии передачи цепи на мономер (3), стадий бимолекулярного обрыва – рекомбинации (4) и диспропорционирования (5):



Взаимосвязь стадий друг с другом показывает математическая модель процесса, которая выписывается согласно законам химической кинетики и представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, каждое из которых характеризует скорость изменения отдельного компонента смеси во времени.

## 2. Результаты применения подхода.

Применение подхода, позволяющего определить базис нелинейных параметрически функций, изложен в работе [3]. Согласно ему, требуется найти матрицу, характеризующую исследуемый процесс и вычленив из нее пары линейно зависимых столбцов. Именно такие столбцы и позволяют определять нелинейные параметрические функции.

Так, для рассматриваемого процесса можно определить следующие функции:

$$\rho_1 = k_i (1 + \varepsilon_I) \quad (6)$$

$$\rho_2 = (k_p + k_M) (1 + \varepsilon_M) \quad (7)$$

$$\rho_3 = 2 (k_{rec} + k_{disp})^2 (k_p + k_M) \quad (8)$$

Таким образом, полученные базисные функции дают возможность характеризовать процесс как совокупность факторов влияния стадий на изменение ряда параметров процесса, в том числе средние молекулярные характеристик полимера. В дальнейшем, динамика процесса может быть проанализирована в базисном пространстве, построенном на функциях  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$ , как векторах.

## Литература

1. Улитин Н.В., Терещенко К.А., Фризен А.К., Буракова А.О., Колесов С.В., Шиян Д.А., Темникова Н.Е. Кинетическая схема и кинетические константы процесса синтеза полиметилметакрилата, протекающего по радикально-координационному механизму // Кинетика и катализ. 2017. Т. 58, № 2. С. 133–144.
2. Гиззатова Э.Р., Спивак С.И., Колесов С.В. Математическое моделирование кинетической неоднородности констант скоростей бимолекулярного обрыва радикальной полимеризации // Системы управления и информационные технологии. 2015. № 1-1(59). С.126–129.
3. Гиззатова Э.Р., Исмагилова А.С. Спивак С.И., Подвальный С.Л. О методе поиска базиса нелинейных параметрических функций для полимеризационных процессов // Химическая физика. 2018. Т. 37, №12. С. 58–62.

MSC 54B99

## On the derivation of nonlinear parametric functions for radical polymerization processes

D.R. Gizzatov, E.R. Gizzatova

Ufa University of Science and Technology

*Abstract:* In this work, a method of searching for nonlinear parametric basis functions for the process of radical polymerization of diene hydrocarbons is applied, which allows us to obtain a set of function-vectors characterizing the process. In turn, the function-vectors show the principal interrelationships of the components of the chemical process and can be interpreted as limiting conditions for finding solutions to inverse kinetic problems.

*Keywords:* Radical polymerization, conversion, mathematical model, reaction basis, basic functions.

### References

1. Ulitin N.V., Tereshchenko K.A., Friesen A.K., Burakova A.O., Kolesov S.V., Shiyan D.A., Temnikova N.E. Kinetic scheme and kinetic constants of the process of synthesis of polymethyl methacrylate proceeding by radical-coordination mechanism // *Kinetics and Catalysis*. 2017. Vol. 58, № 2. P. 133–144.
2. Gizzatova E.R., Spivak S.I., Kolesov S.V. Mathematical modeling of kinetic inhomogeneity of bimolecular breakage rate constants of radical polymerization // *Control Systems and Information Technologies*. 2015. №1-1(59). P.126–129.
3. Gizzatova E.R., Ismagilova A.S., Spivak S.I., Podvalnyi S.L. On the method of searching the basis of nonlinear parametric functions for polymerization processes // *Chemical Physics*. 2018. Vol. 37, № 12. P. 58–62.



УДК 524.3-54

## Моделирование падения струи на протопланетный диск

Григорьев В.В., Демидова Т.В.

ФГБУН «Крымская астрофизическая обсерватория» РАН

*Аннотация:* Численное моделирование показало, что на ранних этапах эволюции протопланетного диска молодой звезды в его окрестностях могут сохраняться остатки протозвездного облака в виде сгустков вещества. Аккреция таких сгустков на протопланетный диск может происходить в непосредственной близости от звезды. В процессе падения на протопланетный диск компактное облако вытягивается в струю газа, столкновение которой с диском приводит к искажению его плоскости, а также ряду фотометрических особенностей, которые могут быть обнаружены в наблюдениях. Для исследования данного процесса произведено трехмерное газодинамическое моделирование падения конечной струи газа, сравнимой по массе с Юпитером, на протопланетный диск, вращающийся вокруг звезды, похожей на Солнце. Столкновение струи с протопланетным диском происходит на расстоянии  $\sim 7$  а.е. от звезды. В расчетах учитывались вязкость и теплопроводность газа. В ходе динамической эволюции внутренние области исходного диска были деформированы с образованием внутреннего наклоненного к первоначальной плоскости диска меньшего размера. Были проанализированы особенности данного процесса: угол наклона внутреннего диска и его эволюция, темп аккреции внутрь области 0.2 а.е., форма дисков.

*Ключевые слова:* численная газодинамика, протопланетные диски, звезды типа Т Тельца.

### 1. Математическая модель и инструментарий

При помощи свободного пакета численного моделирования PLUTO<sup>1</sup> [1] были решены стандартные уравнения газодинамики (уравнение неразрывности, уравнение движения, уравнение сохранения энергии) при помощи метода конечных объемов (метод Годунова). Решение производилось в сферической системе координат  $(R, \theta, \varphi)$ :  $144 \times 60 \times 144$  ячеек в области  $[0.2; 107.2]$  а.е.  $\times [15; 165]^\circ \times [0; 360]^\circ$ . Использовалось приближение идеального газа ( $\gamma = 7/5$ ).

Граничные условия устанавливались следующие: на границе минимального  $R$  устанавливалось равенство тепловых турбулентных потоков, непрерывность вязкого турбулентного потока, сохранение энергии. На границе максимального  $R$  – фиксированные значения макропараметров газа, соответствующих начальному распределению. Границы по  $\theta$  – свободные, по  $\varphi$  – периодические. Была использована согласованная модель транспортных коэффициентов (вязкости и теплопроводности): учитывались молекулярные составляющие (модель твердых сфер), плазменные [2], а также турбулентные [3]. Начальные условия (распределение плотности, температуры газа, начальных скоростей) задаются аналогично [4].

В нулевой момент времени струя газа задается в виде сгустка конкретной массы, равной 1 массе Юпитера ( $2 \times 10^{27}$  кг), расположенной в пределах одной ячейки на

---

<sup>1</sup><https://plutocode.ph.unito.it/>

радиальном расстоянии 20 а.е. от звезды. Начальные скорости соответствуют движению материальной точки по параболической траектории в сторону звезды. Перицентрическое расстояние (ближайшая точка орбиты к звезде) составляет 7.4 а.е. Далее в ходе расчетов такой сгусток вытягивается в струю газа вдоль своей траектории. Важно рассмотреть два случая траектории, т.к. парабола может пересекать плоскость либо в одной точке (например, если перицентр и точка пересечения совпадают, далее – ОП), либо в двух (когда перицентр отстоит на  $30^\circ$  от одной из точек пересечения, далее – ДП). В данной работе были рассмотрены два случая траектории (ОП и ДП), наклоненной под углом  $45^\circ$  к плоскости диска, при этом движение струи газа и диска было противоположно направлено.

Численные расчеты производились с использованием ресурсов МСЦ РАН – филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН<sup>1</sup> [5].

## 2. Результаты моделирования и их анализ

Расчеты показывают, что движение струи происходит по траектории, близкой к параболической, однако, оно все же отличается от движения материальной точки в гравитационном потенциале звезды. Для случаев и однократного, и двукратного пересечения плоскости диска центр масс струи первый раз пересекает эту плоскость на 0.2 года позже, чем предсказывает баллистическое приближение. Это происходит в виду того, что сгусток рассеивается, часть газа перетекает в соседние ячейки, более близкий к звезде участок струи движется быстрее, чем более далекий.

Однако второе пересечение центром масс струи плоскости диска в случае ДП происходит на 0.3 года раньше (в момент времени 14.6 лет), чем предсказывает баллистическое приближение (в момент времени 14.9 лет). Это связано с тем, что в ходе первого пересечения происходит активное взаимодействие двух потоков вещества (диска и струи), их взаимное торможение и нагрев, т.е. энергия движения газа переходит во внутреннюю энергию. Тем самым, фактически, центр масс переходит на иную траекторию движения, несколько отличающуюся от начальной параболы. В случае ОП падение струи газа вызывает спиральную волну плотности, распространяющуюся по диску, тогда как в случае ДП ввиду наличия двойного пересечения получаются две спиральные волны плотности, которые, слившись вблизи звезды, могут значительно исказить плоскость диска. Для визуализации этого явления можно построить поверхность максимальной плотности (т.е. провести поверхность через точки, для которых вторая производная плотности по координате  $z$  будет нулевой). В случае неискаженного диска она совпадет с изначальной плоскостью  $xy$ , искажение же будет иметь наклон к этой плоскости.

Геометрический анализ этой искаженной части показывает, что с течением времени внутренний диск эволюционирует: увеличивается в размерах (за 50 лет увеличился с 7 до 9 а.е.), поворачивается относительно вертикальной оси (меняется азимут нормали  $\Phi_n$ ), меняется наклон  $i_n$ . Подобные структуры именуется варпами (warps), и имеют наблюдательные проявления в виде теней на внешних областях протопланетного диска как, например, у звезды CQ Tau [6]. В таблице 1 приведена зависимость угла наклона  $i_n$  внутреннего диска к плоскости  $xy$  и азимута нормали  $\Phi_n$  к внутреннему диску на момент времени  $t$  от начала расчетов.

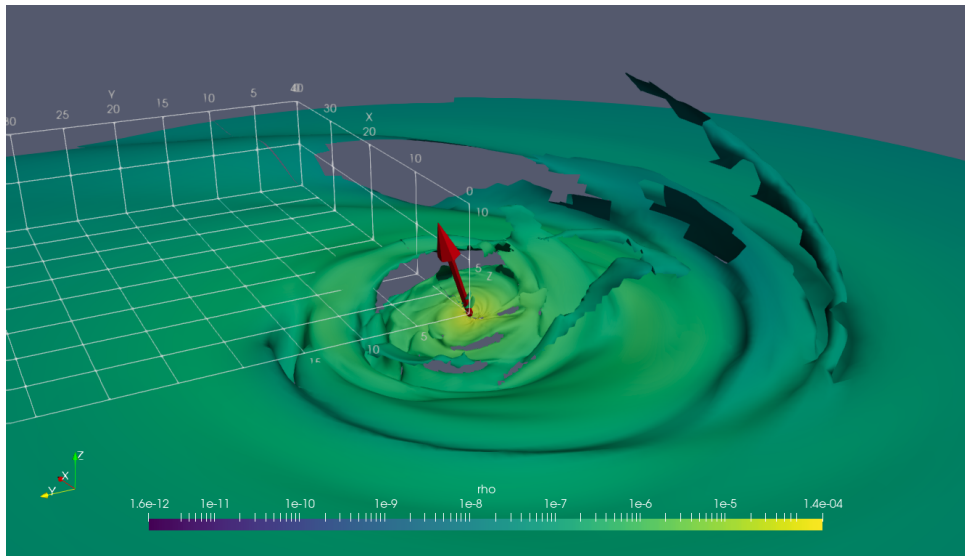
На рис. 1 показано данное искажение (отображена поверхность максимальной плотности), представляющее собой внутренний диск, на момент времени 80 лет от

<sup>1</sup><https://www.jssc.ru/>

**Таблица 1.** Эволюция ориентации внутреннего диска в течение 50 лет.

$t$ , годы	50	60	70	80	90	100
$i_n, ^\circ$	21.7	20.5	21.2	20.9	23.6	20.2
$\Phi_n, ^\circ$	107.1	97.8	114.2	116.6	107.5	103.3

начала расчетов для случая ДП.



**Рис. 1.** Поверхность максимальной плотности на момент 80 лет от начала расчетов для случая двукратного пересечения траекторией струи плоскости диска.

На рис. 1 наглядно виден наклон области диска в пределах 20 а.е. по отношению к внешней части диска. Величина плотности ( $\rho$ ) показана в единицах  $6 \times 10^{-7}$  г/см<sup>3</sup>. Для масштаба показан координатный параллелепипед. Красной стрелкой отмечена нормаль к внутренней искаженной области (warp).

Как было отмечено выше, в ходе столкновения струи газа с диском происходит торможение вещества, в связи с чем ожидается движение части этого вещества в сторону звезды. При падении этого вещества на звезду (аккреции) можно ожидать: всплеск аккреционной активности звезды, которая порождает, вспышку ее блеска, изменение формы отдельных спектральных линий. На эти характеристики в первую очередь влияет темп аккреции (количество вещества, упавшего на звезду в единицу времени).

Анализ показывает, что внутрь области 0.2 а.е. около звезды происходит резкое увеличение темпа аккреции как в случае ОП (с  $1.6 \times 10^{19}$  до  $4 \times 10^{20}$  г/с) так и в случае ДП (с  $1.6 \times 10^{19}$  до  $1.4 \times 10^{21}$  г/с) за время порядка нескольких лет. Это напоминает вспышку типа FU Ori [7].

### **3. Заключение**

В работе было продемонстрировано, что модель падения газовой струи на протопланетный диск способна объяснить ряд наблюдательных особенностей различных молодых звезд: яркую вспышку типа FU Ori, вызванную аккрецией вещества, наличие внутреннего диска, как, например, у звезды CQ Tau. Кроме того, отмечено, что внутренний диск, образовавшийся в ходе столкновения струи с протопланетного диском для случая двойного пересечения, (варп) со временем меняет свои геометрические характеристики.

### **Литература**

1. Mignone A., Bodo G., Massaglia S., et al. PLUTO: A Numerical Code for Computational Astrophysics // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. 2007. 170, 228. doi:10.1086/513316
2. Брагинский С.И. Явление переноса в плазме // *Вопросы теории плазмы*. Под ред. М.А. Леонтовича. М. : Госатомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183–272.
3. Shakura N.I., Sunyaev R.A. Black holes in binary systems. Observational appearance // *Astronomy and Astrophysics*. 1973. 24, 337.
4. Demidova T.V., Grinin V.P. Clumpy Accretion in Pre-main-sequence Stars as a Source of Perturbations in Circumstellar Disks // *The Astrophysical Journal*. 2022. 930, 111. DOI 10.3847/1538-4357/ac53a6
5. Savin G.I., Shabanov B.M., Telegin P.N., Baranov A.V. Joint Supercomputer Center of the Russian Academy of Sciences: Present and Future // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019. 40. DOI: 10.1134/S1995080219110271
6. Eisner J.A., Lane B.F., Hillenbrand L.A. et al. Resolved Inner Disks around Herbig Ae/Be Stars // *The Astrophysical Journal*. 2004. 613, 2. DOI: 10.1086/423314
7. Herbig G.H. Eruptive phenomena in early stellar evolution // *The Astrophysical Journal*. 1997. 217. DOI: 10.1086/155615

MSC 85A30

## Simulation of stream falling onto a protoplanetary disk

V.V. Grigoryev, T.V. Demidova

Crimean astrophysical observatory

*Abstract:* Numerical modeling has shown that in the early stages of the evolution of the protoplanetary disk of a young star, remnants of a protostellar cloud in the form of clumps of matter can be preserved in its vicinity. The accretion of such clumps onto a protoplanetary disk may occur in the immediate vicinity of the star. In the process of falling onto a protoplanetary disk, a compact cloud is pulled into a stream of gas, the collision of which with the disk leads to distortion of its plane, as well as a number of photometric features that can be detected in observations. To study this process, a three-dimensional gas dynamic simulation was performed of the fall of a finite stream of gas, comparable in mass to Jupiter, onto a protoplanetary disk orbiting a Sun-like star. The collision of the stream with the protoplanetary disk occurs at a distance of  $\sim 7$  au from the star. The calculations took into account the viscosity and thermal conductivity in the gas. During the dynamic evolution, the inner regions of the original disk were deformed, forming an inner disk of a smaller size inclined to the original plane. The features of this process were analyzed: the angle of inclination of the inner disk and its evolution, the rate of accretion into the 0.2 au region, and the shape of the disks.

*Keywords:* numerical gas dynamics, protoplanetary disks, T Tauri stars.

### References

1. Mignone A., Bodo G., Massaglia S., et al. PLUTO: A Numerical Code for Computational Astrophysics // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. 2007. 170, 228. doi:10.1086/513316
2. Braginskii S.I. Transport Processes in a Plasma // *Reviews of Plasma Physics*. 1965.1.
3. Shakura N.I., Sunyaev R.A. Black holes in binary systems. Observational appearance // *Astronomy and Astrophysics*. 1973. 24, 337.
4. Demidova T.V., Grinin V.P. Clumpy Accretion in Pre-main-sequence Stars as a Source of Perturbations in Circumstellar Disks // *The Astrophysical Journal*. 2022. 930, 111. DOI 10.3847/1538-4357/ac53a6
5. Savin G.I., Shabanov B.M., Telegin P.N., Baranov A.V. Joint Supercomputer Center of the Russian Academy of Sciences: Present and Future // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019. 40. DOI: 10.1134/S1995080219110271
6. Eisner J.A., Lane B.F., Hillenbrand L.A. et al. Resolved Inner Disks around Herbig Ae/Be Stars // *The Astrophysical Journal*. 2004. 613, 2. DOI: 10.1086/423314
7. Herbig G.H. Eruptive phenomena in early stellar evolution // *The Astrophysical Journal*. 1997. 217. DOI: 10.1086/155615

УДК 519.63

## Сравнение методов моделирования взаимодействия ударной волны и покоящегося газа в задаче о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова\*

Григорьев В.В., Жалнин Р.В.

ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

*Аннотация:* При кратковременном боковом воздействии ударной волны на контактный разрыв между газами разной плотности начинает развиваться гидродинамическая неустойчивость (неустойчивость Рихтмайера-Мешкова), переходящая стадию турбулентного перешивания газов. В текущей работе производится сравнение результатов численного решения этой задачи в конкретной двухмерной постановке различными газодинамическими кодами. Эти коды реализуют идеологически разные подходы к решению уравнений газодинамики: различные вариации годуновских схем и SPH-подход. Для исследования точности расчетов турбулентных течений были применены различные схемы WENO в годуновских схемах, а в случае SPH – разные ядра сглаживания. Численное решение задачи производилось в параллельном режиме на видеокартах и компьютере с распределенной памятью.

*Ключевые слова:* численная газодинамика, годуновские схемы, неустойчивость Рихтмайера-Мешкова, WENO, SPH.

### 1. Математическая модель, начальные и граничные условия

Будем исследовать развитие неустойчивости Рихтмайера-Мешкова, численно решая стандартные уравнения газодинамики (уравнения неразрывности, движения и сохранения энергии) в двухмерной расчетной области, изображенной на рис. 1. Они замыкаются уравнением состояния идеального газа с  $\gamma = 1.4$ .

Слева в расчетную область, окруженную тремя стенками, входит ударная волна (SW) с параметрами (величины указаны в СИ): плотность 1.6672, горизонтальная скорость 133.273, давление 163256.0. Изначально внутри расчетной области покоится газ плотности  $\rho_0 = 1.53$ , и давления 96856.0, а также два параллелепипеда более тяжелого газа с плотностью  $\rho = 6.03$  и давлением 96856.0.

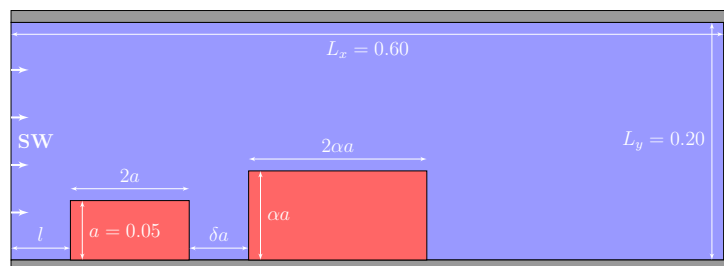


Рис. 1. Начальные условия в задаче. Все величины приведены в системе СИ.

\*Исследование выполнено за счет средств гранта РНФ № 23-11-00142.

## 2. Схемы расчета

### 2.1. Самописный годуновский код с WENO5 на GPU

Был реализован конечно-объемный метод годуновского типа [1] для расчета на видеокартах. Для реконструкции решения на границах между ячейками использовались реконструкции WENO 5-го порядка точности [2] и линейная реконструкция с ограничителем `minmod` [3]. Для решения задачи Римана о распаде разрыва использовался солвер `hllc`.

### 2.2. PLUTO с LimO3, WENOZ

В арсенале открытого численного пакета PLUTO [4], реализующего годуновские схемы расчетов [5], есть несколько вариантов реконструкции макропараметров в пределах одной ячейки. Были выбраны доступные реконструкции третьего и пятого порядков. Интегрирование по времени производилось методом Рунге-Кутты 3-го порядка точности. Задача Римана о распаде разрыва аппроксимационно решалась солвером `hllc`.

### 2.3. OpenFPM: SPH с ядрами $M_4$ и Wendland C4O4

Численный пакет OpenFPM [6] предоставляет возможность параллельных расчетов для решения самых разных задач в рамках различных подходов [7], в частности – Smooth Particle Hydrodynamics (SPH).

SPH использует ядро сглаживания для интерполяции макропараметров газа по пространству. В рамках данного исследования было выбрано два ядра: «стандартный» кубический сплайн (оно же ядро  $M_4$ ) и ядро Вендланда C4O4 (четвертый порядок гладкости и ошибки). Радиус ядра брался одинаковым для каждого разрешения, в самой разреженной области в ядро сглаживания попадало не менее 50 частиц согласно начальным условиям.

Кроме того, итоговый результат расчетов был интерполирован на сетку с размером ячейки, равной длине сглаживания, а также более мелкой. Тем самым проверялась гипотеза о разрешении более мелких вихрей, нежели позволяет исходное распределение SPH-частиц.

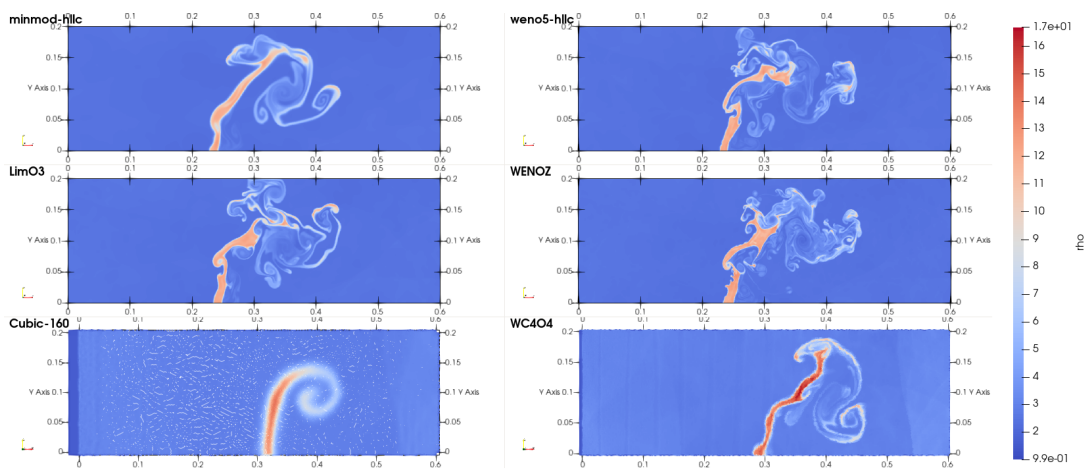
## 3. Результаты и анализ

На рис. 2 представлено распределение плотности в момент времени 5 мс от начала расчетов с использованием различных методов, описанных выше, с разрешением 320 ячеек или частиц (160 в случае ядра  $M_4$ ) по вертикали для плотности  $\rho_0$ .

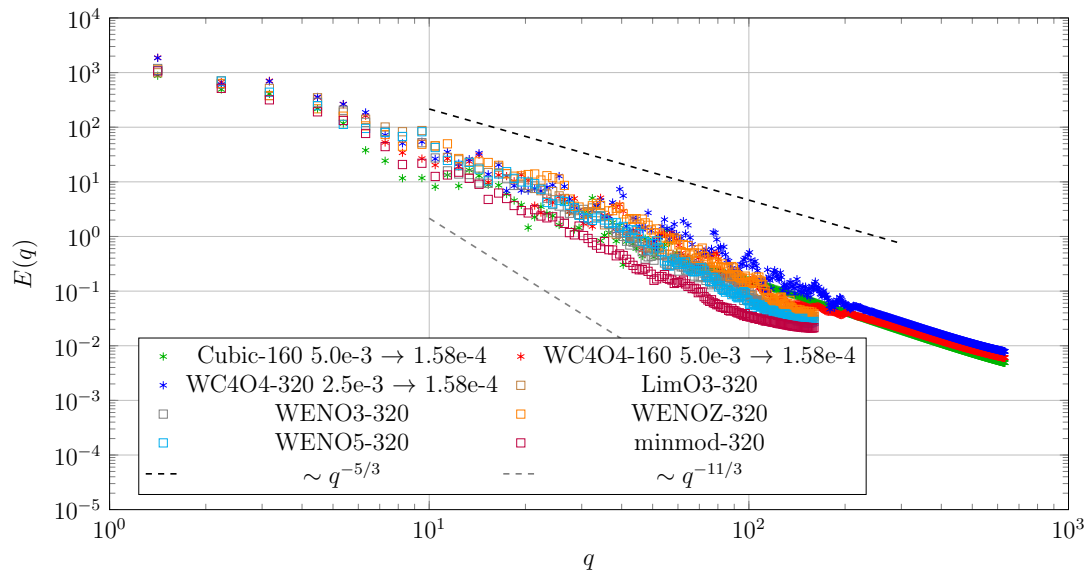
Из рис. 2 видно, что результаты качественно согласуются друг с другом, но фактически картина отличается в деталях. В расчетах SPH использовалась искусственная вязкость, что, вероятно, повлияло на число наблюдаемых деталей.

На рис. 3 представлены энергетические спектры турбулентности в расчетной области. SPH-расчеты были интерполированы с указанной длины сглаживания на более мелкую сетку (указан размера ячейки).

Из рис. 3 заметно, что SPH-расчеты позволяют довольно хорошо показать инерционную область спектра с наклоном  $q^{-5/3}$  ( $q$  – пространственная частота вихрей), а методы конечных объемов дают несколько меньший наклон. Кроме того, интерполяция SPH на более мелкую сетку позволяет экстраполировать энергетический спектр



**Рис. 2.** Распределение плотности ( $\rho$ ) в расчетной области на момент времени 5 мс.



**Рис. 3.** Энергетические спектры турбулентности.

в область более высоких пространственных частот.

## Литература

1. Жалнин Р.В. О построении параллельного вычислительного алгоритма для прямого численного моделирования сложных газодинамических течений // Труды Средневолжского математического общества. 2008. Т. 10, № 1. С. 137–146.
2. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // Journal of Computational Physics. 1996. 126. P. 202–228. DOI: 10.1006/jcph.1996.0130
3. Тишкин В.Ф., Никишин В.В., Попов И.В., Фаворский А.П. Разностные схемы трехмерной газовой динамики для задачи о развитии неустойчивости Рихтмайера–Мешкова // Матем. моделирование. 1995. Т. 7, № 5. С. 15–25.



4. <https://plutocode.ph.unito.it/>
5. Mignone A., Bodo G., Massaglia S., et al. PLUTO: A Numerical Code for Computational Astrophysics // The Astrophysical Journal Supplement Series. 2007. 170, 228. DOI:10.1086/513316
6. <http://openfpm.mpi-cbg.de/>
7. Incardona P., Leo A., Zaluzhnyi Ya., Ramaswamy R., Sbalzarini I.F. OpenFPM: A scalable open framework for particle and particle-mesh codes on parallel computers // Computer Physics Communications. 2019. 241. DOI: 10.1016/j.cpc.2019.03.007.

MSC 65C20

## Comparison of methods for modeling the interaction of a shock wave and a stationary gas in the problem of the development of Richtmayer-Meshkov instability

V.V. Grigoryev, R.V. Zhalnin

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS

*Abstract:* With a short-term lateral impact of a shock wave on the contact gap between gases of different densities, hydrodynamic instability (Richtmayer-Meshkov instability) begins to develop, passing through the stage of turbulent cross-linking of gases. In the current work, the results of the numerical solution of this problem in a specific two-dimensional formulation by various gas dynamic codes are compared. These codes implement ideologically different approaches to solving the equations of gas dynamics: the discontinuous Galerkin method, various variations of Godunov schemes, and the SPH approach. To study the accuracy of calculations of turbulent flows, various WENO schemes in Godunov schemes were used, and in the case of SPH, different smoothing kernels were used. The numerical solution of the problem was performed in parallel mode on video cards and a computer with distributed memory.

*Keywords:* numerical gas dynamics, Godunov schemes, Richtmayer-Meshkov instability, WENO, SPH.

### References

1. Zhalnin R.V. On the construction of parallel computing algorithm for direct numerical simulation of complex gas dynamic flows // Proceedings of the Middle Volga Mathematical Society. 2008. V. 10, No. 1. P. 137–146.
2. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // Journal of Computational Physics. 1996. 126. P. 202–228. DOI: 10.1006/jcph.1996.0130
3. Тишкин В.Ф., Никишин В.В., Попов И.В., Фаворский А.П. Разностные схемы трехмерной газовой динамики для задачи о развитии неустойчивости Рихтмайера–Мешкова // Матем. моделирование. 1995. Т. 7, № 5. С. 15–25.
4. <https://plutocode.ph.unito.it/>
5. Mignone A., Bodo G., Massaglia S., et al. PLUTO: A Numerical Code for Computational Astrophysics // The Astrophysical Journal Supplement Series. 2007. 170, 228. DOI:10.1086/513316
6. <http://openfpm.mpi-cbg.de/>
7. Incardona P., Leo A., Zaluzhnyi Ya., Ramaswamy R., Sbalzarini I.F. OpenFPM: A scalable open framework for particle and particle-mesh codes on parallel computers // Computer Physics Communications. 2019. 241. DOI: 10.1016/j.cpc.2019.03.007

УДК 004.94

## Математическое моделирование и оптимизация флюидодинамических процессов в пористых средах\*

Губайдуллин И.М.

Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН,  
Уфимский государственный нефтяной технический университет

*Аннотация:* В статье представлен обзор развития математического моделирования нестационарных процессов в зерне и слое катализатора. Отмечена необходимость исследования детальных процессов различной природы: химических, диффузионных и конвективных.

*Ключевые слова:* физическая химия, нестационарные процессы, математическое моделирование, вычислительный алгоритм.

Флюидодинамические процессы – это движение твёрдых, жидких и газообразных веществ. В данной работе рассматриваются процессы в порах катализаторов, которые являются одним из основных компонентов химических реакторов и аппаратов. На современном этапе химики-экспериментаторы в лабораторных условиях, а также химики-технологи в промышленном масштабе научились разрабатывать отечественные катализаторы с заданной внутренней структурой на уровне атомов и молекул. Сочетание химических и вычислительных экспериментов заметно ускоряет разработку катализаторов. Адекватная математическая модель в основе компьютерных стендов позволит оперативно смоделировать практически все технологические режимы использования катализаторов в химико-технологических реакторах. Это естественным образом существенно сокращает материальные и временные затраты на испытание новых отечественных промышленных катализаторов.

В химических реакторах катализаторы представляют собой в основном частицы (зёрна) размером от  $10^{-2}$  до 4 мм в виде гранул сферической, цилиндрической и других форм, уложенных в несколько слоев. Различают несколько видов слоев катализатора: неподвижный, движущийся и кипящий. В промышленности преобладают реакторы с неподвижным слоем катализатора. Несмотря на обилие форм зерен и типов слоев катализаторов, необходимо учитывать химические реакции во время проникновения сырья в катализатор и внутри зерна, а также выход продуктов реакций. Большинство исследователей ограничивают химизм процесса только анализом компонентного состава сырья и продуктов реакций, без учета процессов, сопутствующих реакциям, например, изменения объема реакционной смеси в порах зерна.

Необходимость учёта дополнительных процессов в пористых средах за счёт химических реакций при моделировании промышленных процессов был предложен член-корр. АН СССР, д.х.н. М.Г. Слинько [1]. В 1946 г. при его участии на основе математического моделирования был спроектирован и построен завод получения тяжелой воды по методу многоступенчатого электролиза в сочетании с каталитическим изотопным обменом дейтерия между водородом и парами воды. Трудность создания производства тяжелой воды определялась низким содержанием дейтерия в природ-

---

\*Работа выполнена в рамках государственного задания Института нефтехимии и катализа УФИЦ РАН (тема № FMRS-2022-0078).

ной воде, что требовало перерабатывать на начальных стадиях процесса от 10 до 100 м<sup>3</sup> сырьевой воды на каждый литр производимой тяжелой воды и строить многоступенчатый каскад из разделительных элементов сложной структуры. В основу разработанной математической модели процесса разделения изотопов была положена идея структурных уровней. На первом, молекулярном, уровне решены термодинамические и кинетические задачи; на втором, зерне катализатора, – определены кинетические уравнения с учетом диффузионных процессов; на третьем определена структура разделительного элемента; на четвертом рассчитан оптимальный каскад. Взаимозависимость и связь этих уровней отражают целостность и специфичность каталитического процесса разделения. Этот подход был в дальнейшем развит и применен при моделировании химических реакторов. В частности, в 80х гг. прошлого столетия одному из учеников М.Г. Слинько д.х.н. А.В. Балаеву со своими учениками (в том числе, и с автором настоящей работы) удалось разработать математическую модель окислительной регенерации закоксованных катализаторов с учетом дополнительных процессов, сопутствующих химическим реакциям. Уравнения материального баланса для зерна катализатора с учётом изменения объема за счёт химических реакций приводят к возникновению переноса массы в порах зерна дополнительным (стефановским) потоком [2].

Благодаря учёту дополнительных процессов было проведено динамическое моделирование и оптимизация ряда промышленных процессов. Например, для четырехслойного реактора гидрокрекинга длины 20 м установлен оптимальный режим, который позволил сократить время восстановления активности катализатора почти в 2 раза.

Развитие этих подходов при моделировании сложных химико-технологических систем на современном этапе представлено в работах [4, 4, 6, 7, 7].

В работе [7] построен вычислительный алгоритм на основе принципа расщепления по физическим процессам для нестационарного процесса в сферическом зерне катализатора. Процесс описан пространственно одномерной задачей математической физики в силу предположения о центральной симметрии зерна. Расщепление заключается в раздельном расчете химических задач и диффузионных потоков. Это позволяет получить существенный выигрыш в расчетном времени даже в сравнении с параллельной реализацией алгоритма [4].

Обобщение алгоритма на пространственно двумерную задачу – моделирование нестационарных процессов в цилиндрическом зерне катализатора описано – в [4]. Новая математическая модель исследована в осесимметричной постановке, что позволяет эффективно применять для ускорения расчетов технологию MPI [6].

Моделирование слоя катализатора влечет дополнительное усложнение задачи в связи с переходом на следующий уровень – уровень реактора. Это приводит к возникновению вычислительных трудностей при разработке численных моделей и требует дополнительных средств для сохранения устойчивости расчетов [8, 8, 9].

В статье [7] проведен численный анализ движения фронта горения при окислительной регенерации неподвижного слоя в случае одностадийного описания химизма. Численное моделирование фронта горения проведено в условиях динамического режима выжигания, т.е. при переменных граничных условиях. Расчеты подтвердили экспериментально обнаруженные преимущества динамического выжигания в сравнении со стационарным.

В настоящее время математическая модель слоя [7] обобщена с учетом детальной кинетики процесса и стефановского потока в зерне. Это позволило получить хорошее

совпадение расчетных и экспериментальных данных, полученных на лабораторной установке в УГНТУ (г. Уфа). Далее планируется разработка новой математической модели нестационарного процесса в слое катализатора с цилиндрической формой зерна, что позволит более детально исследовать процессы, например, в катализаторе гидроочистки. Апробация модели будет проведена также на примере окислительной регенерации. Для этого планируется реализация натурального эксперимента в УГНТУ, в том числе и в условиях динамического режима.

## Литература

1. Слинько М.Г. История развития математического моделирования каталитических процессов и реакторов // Теоретические основы химической технологии. 2007. Т. 41, № 1. С. 16–34.
2. Балаев А.В. Моделирование каталитических процессов с переменными свойствами реакционной среды. Уфа, 2008. 47 с.
3. Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Yazovtseva O.S., Zagoruiko A.N. Numerical Simulation of Oxidative Regeneration of a Spherical Catalyst Grain // Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. V. 15. P. 485–495. DOI: 10.1134/S2070048223030079.
4. Yazovtseva O., Grishaeva O., Gubaydullin I., Peskova E. Construction of a Parallel Algorithm for the Numerical Modeling of Coke Sediments Burning from the Spherical Catalyst Grain. // Communications in Computer and Information Science Series. 2022. V. 1618. DOI: 10.1007/978-3-031-11623-0\_17.
5. Yazovtseva O.S., Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Sukharev L.A., Zagoruiko A.N. Computer Simulation of Coke Sediments Burning from the Whole Cylindrical Catalyst Grain // Mathematics. 2023. Vol. 11, No. 3. P. 669. DOI: 10.3390/math11030669.
6. Yazovtseva O.S., Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Usmanova A.A., Zagoruiko A.N. MPI-Based Computational Algorithm for Modeling a Cylindrical Catalyst Grain During Oxidative Regeneration // Communications in Computer and Information Science. 2023. V. 1868. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-031-38864-4\_24.
7. Язовцева О.С., Губайдуллин И.М., Загоруйко А.Н. Моделирование фронта горения в процессе окислительной регенерации катализатора // Многофазные системы. 2023. Т. 18, № 4. С. 362–363. DOI: 10.21662/mfs2023.4.111.
8. Zhukov V.T., Feodoritova O.V., Novikova N.D., Duben A.P. Explicit-iterative scheme for the time integration of a system of Navier–Stokes equations // Mathematical Models and Computer Simulations. 2020. V. 12(6). P. 958–968. DOI: 10.1134/S2070048220060174.
9. Peskova E.E., Yazovtseva O.S. Application of the Explicitly Iterative Scheme to Simulating Subsonic Reacting Gas Flows // Comput. Math. and Math. Phys. 2024. V. 64. P. 326–339. DOI: 10.1134/S0965542524020106.
10. Chetverushkin B.N., Olkhovskaya O.G., Gasilov V.A. An Explicit Difference Scheme for a Nonlinear Heat Conduction Equation // Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. V. 15. P. 529–538. DOI: 10.1134/S2070048223030031.

MSC 93A30

## Mathematical modeling and optimization of fluid dynamic processes in porous media

I.M. Gubaydullin

Institute of Petrochemistry and Catalysis of RAS,  
Ufa State Oil Technical University

*Abstract:* The article provides an overview of the development of mathematical modeling of nonstationary processes in the grain and the catalyst layer. It is noted that it is necessary to study detailed processes of various nature: chemical, diffusive and convective.

*Keywords:* physical chemistry, nonstationary processes, mathematical modeling, computational algorithm.

### References

1. Slinko M.G. The history of the development of mathematical modeling of catalytic processes and reactors // Theoretical foundations of chemical technology. 2007. Vol. 41, No. 1. pp. 16-34.
2. Balaev A.V. Modeling of catalytic processes with variable properties of the reaction medium. Ufa, 2008. 47 p.
3. Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Yazovtseva O.S., Zagoruiko A.N. Numerical Simulation of Oxidative Regeneration of a Spherical Catalyst Grain // Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. V. 15. P. 485–495. DOI: 10.1134/S2070048223030079.
4. Yazovtseva O., Grishaeva O., Gubaydullin I., Peskova E. Construction of a Parallel Algorithm for the Numerical Modeling of Coke Sediments Burning from the Spherical Catalyst Grain. // Communications in Computer and Information Science Series. 2022. V. 1618. DOI: 10.1007/978-3-031-11623-0\_17.
5. Yazovtseva O.S., Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Sukharev L.A., Zagoruiko A.N. Computer Simulation of Coke Sediments Burning from the Whole Cylindrical Catalyst Grain // Mathematics. 2023. Vol. 11, No. 3. P. 669. DOI: 10.3390/math11030669.
6. Yazovtseva O.S., Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Usmanova A.A., Zagoruiko A.N. MPI-Based Computational Algorithm for Modeling a Cylindrical Catalyst Grain During Oxidative Regeneration // Communications in Computer and Information Science. 2023. V. 1868. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-031-38864-4\_24.
7. Yazovtseva O.S., Gubaydullin I.M., Zagoruiko A.N. Modeling of the combustion front in the process of oxidative regeneration of the catalyst // Multiphase systems. 2023. Vol. 18, No. 4. P. 362–363. DOI: 10.21662/mfs2023.4.111.
8. Zhukov V.T., Feodoritova O.V., Novikova N.D., Duben A.P. Explicit-iterative scheme for the time integration of a system of Navier–Stokes equations //

- Mathematical Models and Computer Simulations. 2020. V. 12(6). P. 958–968. DOI: 10.1134/S2070048220060174.
9. Peskova E.E., Yazovtseva O.S. Application of the Explicitly Iterative Scheme to Simulating Subsonic Reacting Gas Flows // Comput. Math. and Math. Phys. 2024. V. 64. P. 326–339. DOI: 10.1134/S0965542524020106.
10. Chetverushkin B.N., Olkhovskaya O.G., Gasilov V.A. An Explicit Difference Scheme for a Nonlinear Heat Conduction Equation // Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. V. 15. P. 529–538. DOI: 10.1134/S2070048223030031.

УДК 519.6, 539.3

## Функция влияния в континуальной модели перидинамики

Дерюгин Ю.Н., Шишканов Д.А.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

*Аннотация:* В работе представлено исследование поведения численной модели перидинамики для различных функций влияния на примере двумерных задачи упругости, имеющей аналитическое решение, и задачи разрушения. Функция влияния используется при определении модели в интегральных соотношениях и описывает поведение нелокальных взаимодействий частиц. Показано, что наилучшая сходимость реализованной модели достигается при использовании функции влияния типа кубический сплайн.

*Ключевые слова:* перидинамика, механика сплошной среды, горизонт взаимодействия, тензор градиента деформаций, функция влияния.

### 1. Введение

Перидинамика – альтернативный подход для решения задач механики разрушения твердых тел. Она основана на интегральных уравнениях с целью ухода от пространственных производных, не существующих на поверхностях разрыва в классической теории. Твердое тело представляется набором дискретных частиц, каждая из которых наделена объемом. Предполагается, что частицы в континууме взаимодействуют друг с другом на конечном расстоянии, как в молекулярной динамике, в пределах нелокального масштаба длины  $\delta$ . Способ взаимодействия частиц называется связью.

Перидинамика, основанная на связи (bond-based), была введена Силингом [1] для описания хрупкого разрушения. В этой модели сила взаимодействия двух частиц линейно зависит от деформации связи. Такая модель используется с ограничениями на свойства материала [2]. Для расширения возможностей перидинамики была разработана модель, основанная на состоянии, которая в свою очередь подразделяется на ordinary state-based (OSB) и non-ordinary state-based (NOSB) модели [3]. В NOSB модели используется формулировка механики сплошной среды (MCC) [4], что позволяет более реалистично моделировать задачи классической теории и избавляет от ограничений, свойственные модели на основе связи.

Вектор силы каждой частицы в NOSB модели зависит от тензора напряжений и нелокального тензора градиента деформаций, который вычисляется в результате интегрирования по дискретной области частиц, взаимодействующих друг с другом посредством связи. Природа взаимодействия не уточняется, поэтому в качестве меры влияния частиц друг на друга используется скалярная функция  $\omega$ , зависящая от расстояния между частицами [5, 6]. Таким образом, точность численных расчетов зависит от результата численного интегрирования тензора градиента деформаций и от выбора функции влияния  $\omega$ .

Согласно теории сходимости [7] предельные численные решения уравнения перидинамики будут совпадать с решением уравнения теории упругости при уменьшении

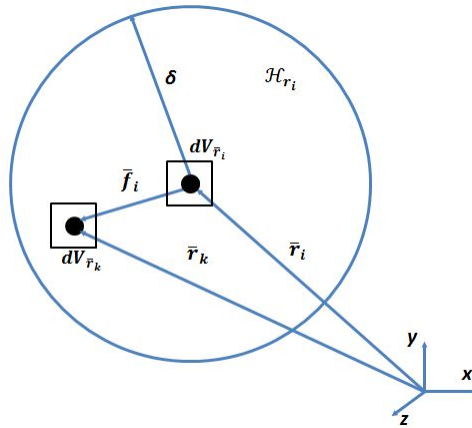


$\delta$ , а также при измельчении сетки в механике сплошной среды (МСС) и увеличении числа частиц в дискретной модели. Однако результаты расчетов различаются при конечных размерах сетки и при конечном числе частиц. Для задач упругости можно выбрать любое достаточно малое значение  $\delta$ , так как с помощью функции влияния корректируется поведение нелокального взаимодействия частиц и результаты моделирования можно согласовывать с экспериментальными данными для любого значения  $\delta$ . В задачах разрушения чтобы исключить влияние шага сетки на разрывы и не допустить больших диссипаций упругих волн рекомендуется использовать  $\delta \approx 3\Delta x$  [2].

В данной работе представлено исследование поведения численной модели перидинамики для различных функций влияния на примере двумерных задач упругости и разрушения.

## 2. Формулировка перидинамики

Перидинамическая теория, введенная Силингом [1], является нелокальным представлением механики твердого тела. Твердое тело представляется конечным набором частиц, наделенных массой —  $m_i$ , плотностью —  $\rho_i$ , начальными координатами —  $\vec{r}_i^0(x_i^0, y_i^0, z_i^0)$ . Движение деформируемой среды характеризуется дискретным вектором смещений —  $\vec{u}_i(u_i^x, u_i^y, u_i^z)$ . Взаимодействие между частицами осуществляется посредством связи, то есть влияние частиц друг на друга происходит на конечном расстоянии внутри замкнутого горизонта —  $\delta$ .



**Рис. 1.** Взаимодействие частиц в пределах замкнутого горизонта:  $\delta$  — горизонт взаимодействия;  $\vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $\vec{r}_k(x_k, y_k, z_k)$  — координаты частиц  $i$  и  $k$ ;  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$  — множество соседей частицы  $i$ ;  $dV_{\vec{r}_i}$ ,  $dV_{\vec{r}_k}$  — объемы частиц  $i$  и  $k$ ;  $\vec{f}_i$  — сила, определяющая взаимодействие частиц  $i$  и  $k$ .

Основное уравнение перидинамики записывается в интегральном виде, что позволяет избежать пространственных производных, не существующих на поверхностях разрыва в МСС. Аппроксимационные свойства метода определяются длиной связи на начальный момент времени  $\vec{\xi}_i = \vec{r}_k - \vec{r}_i$ , относительным смещением  $\vec{\eta}_i = \vec{u}_k - \vec{u}_i$  и относительным положением  $\vec{Y}_i = \vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i$  на дискретном множестве частиц  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i} : |\vec{\xi}_i| < \delta$ .

Уравнение движения частицы  $\vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)$  задается в виде

$$\rho_i \ddot{u}(\vec{r}_i, t) = \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \vec{f}_i(\vec{u}_k - \vec{u}_i, \vec{r}_k - \vec{r}_i) dV_{\vec{r}_k} + \vec{b}(\vec{r}_i, t). \quad (1)$$

где  $\vec{b}$  — граничные условия.

Существуют две основные формулировки перидинамики – на основе связи (bond-based) [8] и на основе состояний (state-based) [3]. Континуальная модель (NOSB), исследуемая в данной работе, относится к формулировке на основе состояний и является обобщением рассмотренных ранее моделей [9, 10]. Более подробно теория перидинамики представлена в [11, 12].

### 3. NOSB модель

Рассматриваемая модель сочетает в себе ключевые особенности МСС и нелокального метода [4]. На первом этапе вычисляется нелокальный тензор градиента деформаций:

$$F_i = \left( \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \omega(|\vec{\xi}_i|) (\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i) \otimes \vec{\xi}_i dV_{\vec{r}_k} \right) \cdot K_i^{-1}, \quad (2)$$

где  $\omega(|\vec{\xi}_i|)$  — функция влияния,  $K_i$  — шаровой тензор деформаций:

$$K_i = \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \omega(|\vec{\xi}_i|) (\vec{\xi}_i \otimes \vec{\xi}_i) dV_{\vec{r}_k}, \quad (3)$$

После этого через тензор градиента скорости деформаций получается тензор напряжений Коши, как показано в (4) – (12). Тензор градиента скорости деформации задается в виде:

$$L_i = \dot{F}_i F_i^{-1}, \quad (4)$$

где  $\dot{F}_i$  — производная тензора градиента деформаций по времени:

$$\dot{F}_i = \left( \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \omega(|\vec{\xi}_i|) \dot{Y}_i \otimes \vec{\xi}_i dV_{\vec{r}_k} \right) \cdot K_i^{-1}. \quad (5)$$

Скорость тензора деформаций описывается симметричной частью тензора градиента скорости:

$$d_i = \frac{1}{2} (L_i + L_i^T). \quad (6)$$

Тензор напряжений Коши обновляется на каждом временном шаге как

$$\sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n + \Delta\sigma_i, \quad (7)$$

где  $\Delta\sigma_i$  — тензор приращения напряжений.

Тензор приращения напряжений  $\Delta\sigma_i$  получается в зависимости от тензора приращения деформаций  $\Delta E_i$ .

$$\Delta\sigma_i = \lambda_i Tr(\Delta E_i) g_{kl} + 2G_i \Delta E_i, \quad (8)$$

где  $\lambda_i$  — коэффициенты Ламэ,  $g_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$  — дельта-функция,  $G_i$  — модуль сдвига.

$$\Delta E_i = d_i \cdot \Delta t \quad (9)$$

Подставляя (4) и (6) в (9), получаем зависимость от тензора приращения градиента деформации  $\Delta F_i$ .

$$\Delta E_i = \frac{1}{2} (\Delta F_i F_i^{-1} + F_i^{-T} \Delta F_i^T). \quad (10)$$

$$\Delta F_i = \left( \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \omega(|\vec{\xi}_i|) \Delta \vec{Y}_i \otimes \vec{\xi}_i dV_{\vec{r}_k} \right) \cdot K_i^{-1}, \quad (11)$$

где  $\Delta \vec{u}_i$  — приращение смещения частицы  $i$ :

$$\Delta \vec{u}_i = \Delta \vec{u}_i^{n+1} - \Delta \vec{u}_i^n. \quad (12)$$

Вектор силы  $\vec{T}_i$  для каждой частицы в связи задается как:

$$\vec{T}_i = \omega(|\vec{\xi}_i|) P_i K_i^{-1} \vec{\xi}_i, \quad (13)$$

где  $P_i$  — первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа:

$$\vec{P}_i = J \sigma_i F_i^{-T}, \quad J = \det(F_i). \quad (14)$$

Тогда сила парного взаимодействия в связи  $\vec{f}_i$  для (1) вычисляется как:

$$\vec{f}_i = \omega(|\vec{\xi}_i|) P_i K_i^{-1} \vec{\xi}_i - \omega(|\vec{\xi}_k|) P_k K_k^{-1} \vec{\xi}_k, \quad (15)$$

где  $i$  и  $k$  — индексы данной частицы  $\vec{r}_i$  и частицы  $\vec{r}_k$  из множества соседей  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$  соответственно.

#### 4. Функция влияния

Общая идея перидинамической модели предполагает взаимодействие точек континуума на конечном расстоянии друг от друга посредством связей в пределах заданного горизонта  $\delta$ . Физическая природа взаимодействия не уточняется, поэтому в качестве меры влияния частиц друг на друга используется скалярная функция  $\omega(|\vec{\xi}_i|)$ , зависящая от расстояния между частицами [5]. В случае постоянного значения функции, влияние каждой частицы континуума в пределах горизонта взаимодействия будет одинаковым. В данной работе используются функции влияния из таблицы 1 [6]. Поведение каждой функции при увеличении длины связи представлено на рис. (2).

Функция влияния	$\omega\left(\left \vec{\xi}_i\right \right)$
Постоянная	1
Треугольная	$1 - \frac{\left \vec{\xi}_i\right }{\delta}$
Квадратичная	$\left(1 - \left(\frac{\left \vec{\xi}_i\right }{\delta}\right)^2\right)^2$
Полуэллиптическая	$1 - \left(\frac{\left \vec{\xi}_i\right }{\delta}\right)^2$
Экспоненциальная	$e^{-\frac{\left \vec{\xi}_i\right }{\delta}}$
Гауссова	$e^{-\frac{\left \vec{\xi}_i\right ^2}{\delta^2}}$
Кубический сплайн	$\begin{cases} \frac{2}{3} - 4d^2 + 4d^3, & d \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4d + 4d^2 - \frac{4}{3}d^3, & \frac{1}{2} < d \leq 1, \quad d = \frac{\left \vec{\xi}_i\right }{\delta} \\ 0, & d > 1 \end{cases}$
Многочлен четвертой степени	$1 - \left(\frac{\left \vec{\xi}_i\right }{\delta}\right)^4$
Многочлен шестой степени	$\left(1 - \left(\frac{\left \vec{\xi}_i\right }{\delta}\right)^2\right)^3$
Косинус	$\cos\left(\frac{\pi\left \xi_i\right }{2\delta}\right)$

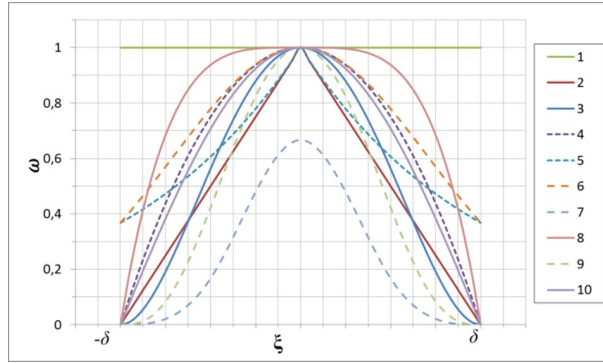
**Таблица 1.** Функции влияния  $\omega\left(\left|\vec{\xi}_i\right|\right)$

## 5. Численное интегрирование уравнения движения

При численном интегрировании, уравнения движения (1) аппроксимируются дискретными объемами частиц в пределах горизонта взаимодействия и записываются в виде

$$\rho_i \vec{u}_i^n = \sum_{k \in \mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \vec{f}_i(\vec{u}_k^m - \vec{u}_i^m, \vec{r}_k^0 - \vec{r}_i^0) \Delta V_k + \vec{b}_i^n \quad (16)$$

Предположим, что  $\delta \approx 3\Delta x$ , тогда в (16) суммирование идет по всем частицам из  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$  (см. рис. 3а). Учитывая, что в классической теории область интегрирования сплошная (см. рис. 3б), то для повышения точности численных расчетов необходимо корректировать объемы граничных частиц области интегрирования [11], [12]. В работе используется линейная масштабирующая функция:

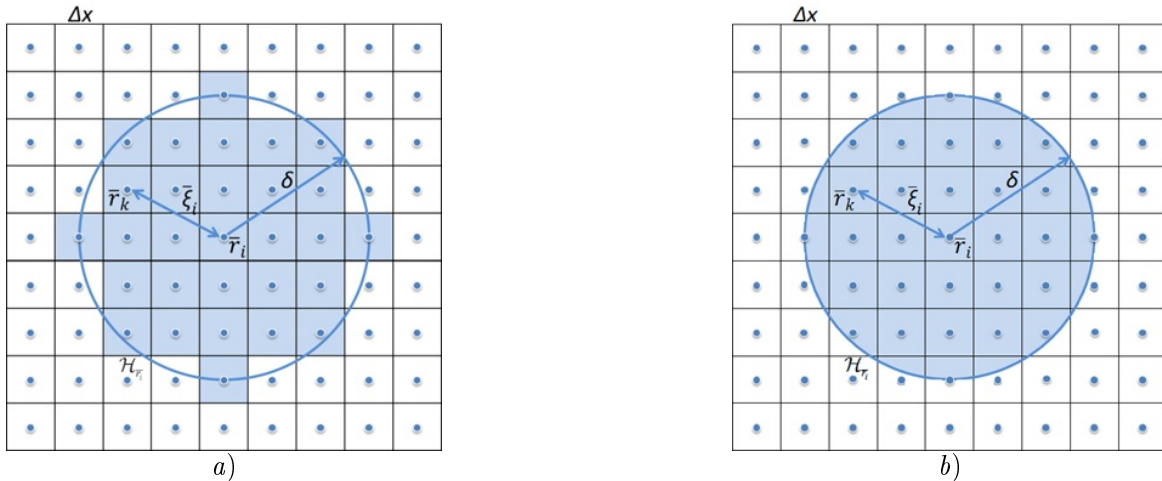


**Рис. 2.** Функции влияния из таблицы 1: 1 — постоянная; 2 — треугольная; 3 — квадратичная; 4 — кубическая; 5 — экспоненциальная; 6 — гауссова; 7 — кубический сплайн; 8 — многочлен четвертой степени; 9 — многочлен шестой степени; 10 — косинус.

$$k(\vec{\xi}_i) = \begin{cases} \frac{\delta + \frac{\Delta x}{2} - |\vec{\xi}_i|}{\Delta x}, & \delta - \frac{\Delta x}{2} \leq |\vec{\xi}_i| \leq \delta \\ 1, & |\vec{\xi}_i| \leq \delta - \frac{\Delta x}{2} \\ 0, & |\vec{\xi}_i| > \delta \end{cases} \quad (17)$$

Таким образом, дискретный объем в (16) примет вид:

$$\Delta V_k = k(\vec{\xi}_i) \cdot \Delta x^3 \quad (18)$$



**Рис. 3.** Объемы частиц области интегрирования частицы  $i$ : а) в перидинамике, б) в классической теории.

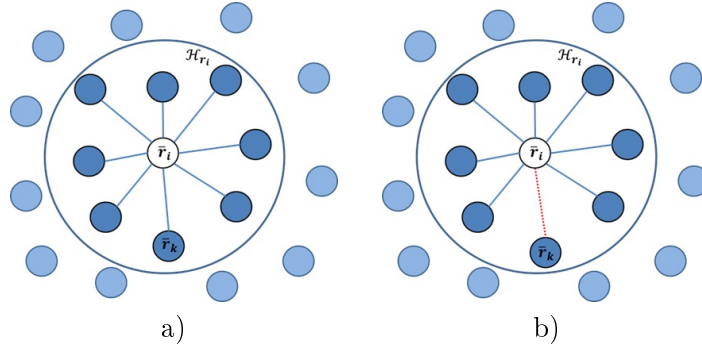
## 6. Алгоритм разрыва связи

Частица  $\vec{r}_i$  взаимодействует со всеми своими соседями из  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$  пока максимальное главное напряжение связи  $\sigma_{ij}^I$  (19) не достигает критического значения (рис. 4а) [13]. Вектора сил взаимодействующих частиц в связи вычисляются на каждом временном

шаге в зависимости от градиента деформаций – функции относительных смещений. После достижения критического значения напряжения, взаимодействие прекращается (рис. 4b) и тензор градиента деформации вычисляется уже без учета влияния той частицы, с которой связь разорвана.

$$\sigma_{ij}^I = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{11} + \sigma_{ij}^{22}) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{ij}^{11} - \sigma_{ij}^{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{ij}^{12})^2}, \quad (19)$$

где  $\sigma_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_i + \sigma_j)$  – тензор напряжений связи,  $j$  – индекс частицы из  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$ ,  $\sigma_{ij}^{11}$ ,  $\sigma_{ij}^{22}$ ,  $\sigma_{ij}^{12}$  – компоненты тензора напряжений связи.



**Рис. 4.** Схема взаимодействующих частиц: а) – взаимодействие со всеми частицами из  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$ ; б) – взаимодействие с частицами из  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$ , за исключением  $\vec{r}_k$ .

## 7. Тестовые расчеты

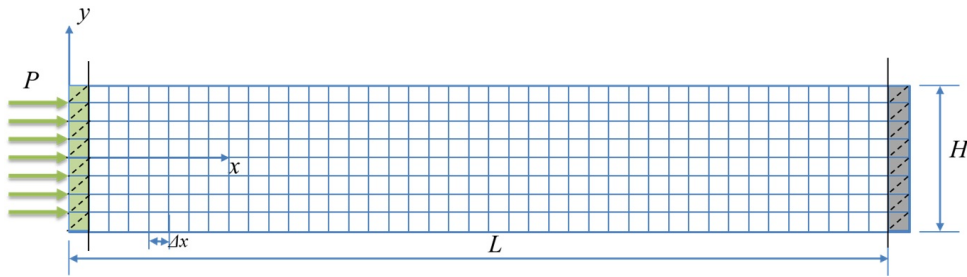
Дискретная модель является нелокальной теорией с масштабом длины  $\delta$ . Ранее рассмотрена сходимость метода перидинамики на примере задачи упругости при уменьшении  $\delta$ , увеличении числа частиц [9] и показана зависимость результатов моделирования от выбора функции влияния [10] для модели на основе связи. При использовании NOSB модели возникает численная нестабильность, связанная с аппроксимацией нелокального тензора градиента деформации [14]. Существует несколько способов повышения точности численных расчетов [15–17]. В данной работе исследуется поведение результатов моделирования при использовании функций влияния из таблицы 1 на примере задачи с аналитическим решением и тестовой задачи хрупкого разрушения.

## 8. Задача о растяжении двумерного стержня

Тонкий стержень подвергается растяжению с левого конца при фиксированном правом. Начальная постановка задачи и аналитическое решение взяты из [15]. Используются безразмерные величины. Длина стержня  $L = 100$ , ширина  $H = 10$ .

Свойства материала: модуль Юнга  $E = 100$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0$ , плотность  $\rho = 1$ . Граничные условия применяются для одного слоя частиц с каждого конца стержня как показано на рис. 5. К левому концу прикладывается постоянное давление  $P = -1$ .

Параметры дискретной модели выбраны следующие: шаг сетки  $\Delta x = 0.2$ , горизонт взаимодействия  $\delta = 3.015\Delta x$ , временной шаг  $\Delta t = 0.001$ , конец счета при



**Рис. 5.** Геометрия задачи и граничные условия

$t = 20$ .

Данная задача рассматривается при условии плоского напряжения. Результаты численного моделирования сравниваются с аналитическим решением из [15].

Используются графики смещения и напряжения вдоль оси  $Ox$  на момент времени  $t = 4$  (рис. 6), смещения и напряжения частицы в сечении  $x = L/2$  на всем временном интервале (рис. 8), а также диаграмма среднеквадратичного отклонения смещения от аналитического решения (рис. 7).

В расчетах исследуется поведение модели при использовании функций влияния из таблицы 1. Вблизи области приложения растягивающей силы видно скачкообразное поведение смещения частиц с постепенным затуханием по мере удаления от границы (рис. 6а,с). Наименьшая амплитуда возмущений наблюдается при использовании кубического сплайна (рис. 6с). По графикам и среднеквадратичному отклонению смещения от эталона (рис. 6, 7) видно, что использование функций влияния типа кубический сплайн и многочлена шестой степени дают наилучшее приближение к аналитическому решению. На рис. 8 представлены зависимости смещения и напряжения частицы в сечении  $x = L/2$  от времени.

## 9. Задача разрушения пластины с начальным дефектом в виде горизонтальной трещины

Начальная геометрия и постановка задачи взяты из [13] и представлены на рис. 9. Длина пластины  $L = 0.1$  м, ширина  $h = 0.04$  м, длина горизонтальной трещины  $d = 0.05$  м.

Свойства материала: используется стекло с модулем Юнга  $E = 65$  ГПа, коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.2$  и плотностью  $\rho = 2235$  кг/м<sup>3</sup>.

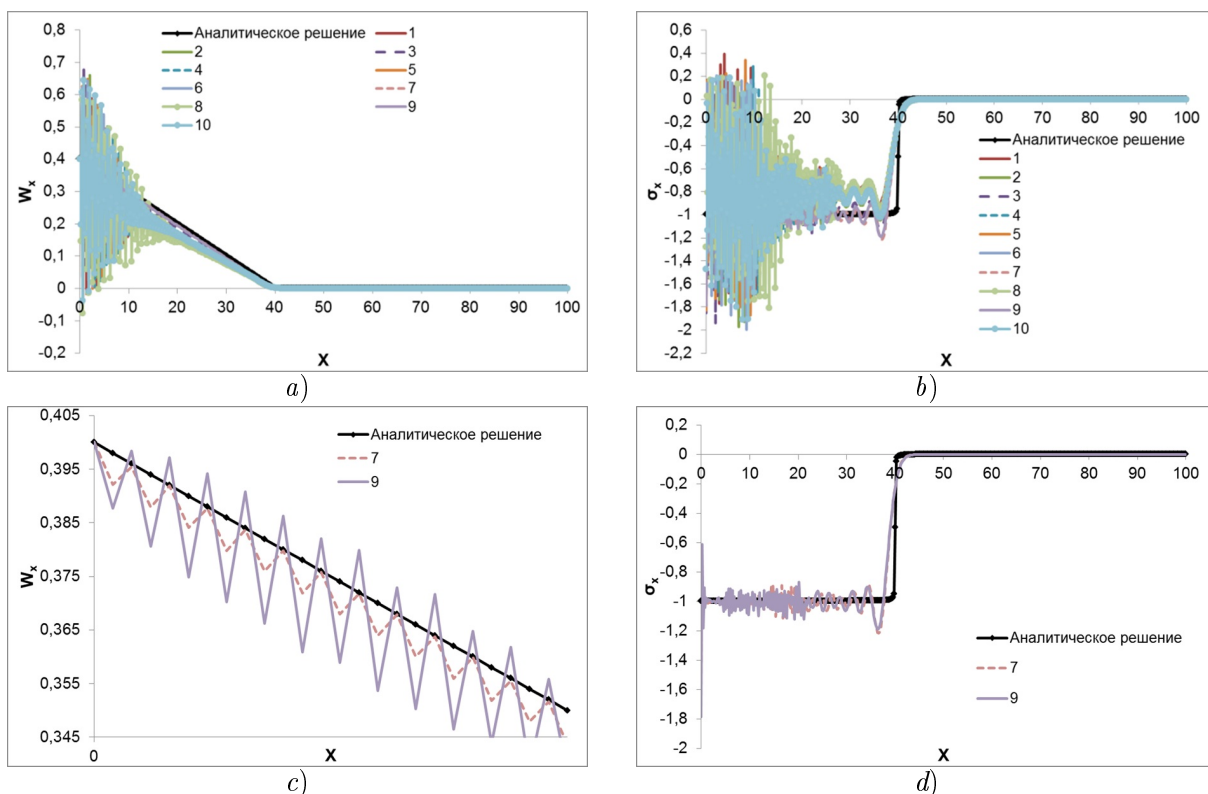
Локальное повреждение  $\phi_i$  задается в виде:

$$\phi_i = 1 - \frac{\int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \mu(\vec{r}_i, t, \vec{\xi}_i) dV_{\vec{r}_k}}{\int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} dV_{\vec{r}_k}}, \quad (20)$$

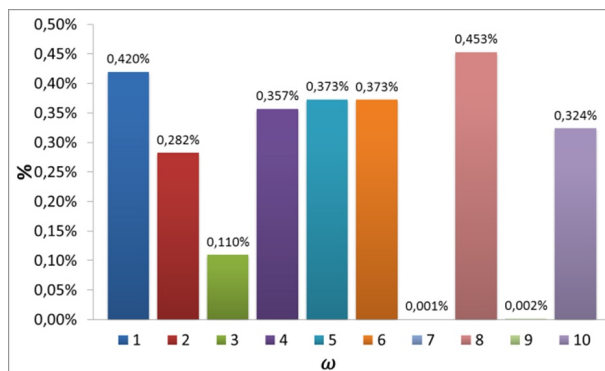
где  $\mu$  — функция, задающая положение частицы:

$$\mu(\vec{r}_i, t, \vec{\xi}_i) = \begin{cases} 1, & \sigma_{ij}^I < f_t \quad \forall 0 \leq t' \leq t \\ 0, & \sigma_{ij}^I \geq f_t \quad \forall 0 \leq t' \leq t \end{cases}, \quad (21)$$

где  $f_t = 10$  МПа — критическое значение напряжения связи.



**Рис. 6.** Смещение (а, с) и напряжение (b, d) вдоль оси  $Ox$  в момент времени  $t = 4$  для функций влияния из таблицы 1: 1 — постоянная; 2 — треугольная; 3 — квадратичная; 5 — экспоненциальная; 6 — гауссова; 7 — кубический сплайн; 8 — многочлен четвертой степени; 9 — многочлен шестой степени; 10 — косинус.



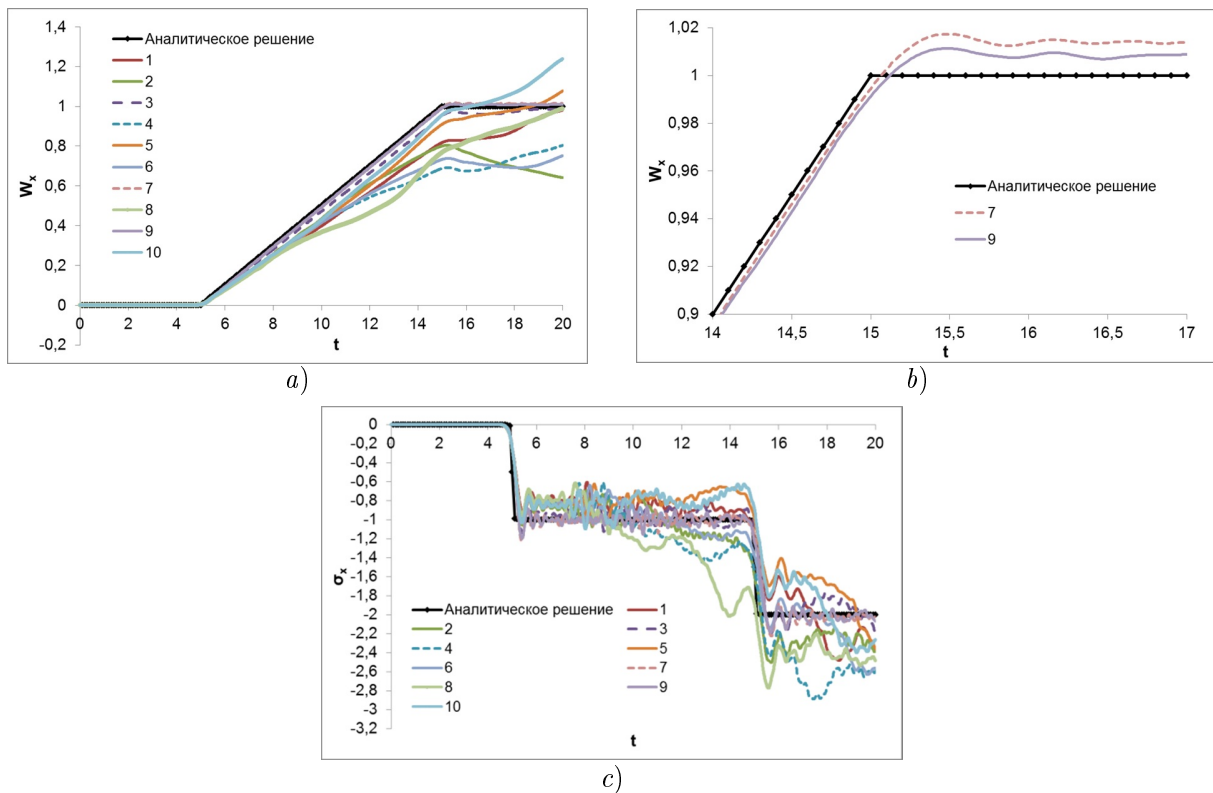
**Рис. 7.** Среднеквадратичное отклонение смещения от эталона в момент времени  $t = 4$  для функций влияния из таблицы 1: 1 — постоянная; 2 — треугольная; 3 — квадратичная; 5 — экспоненциальная; 6 — гауссова; 7 — кубический сплайн; 8 — многочлен четвертой степени; 9 — многочлен шестой степени; 10 — косинус.

Прикладываемая нагрузка  $\sigma_0 = 1$  МПа.

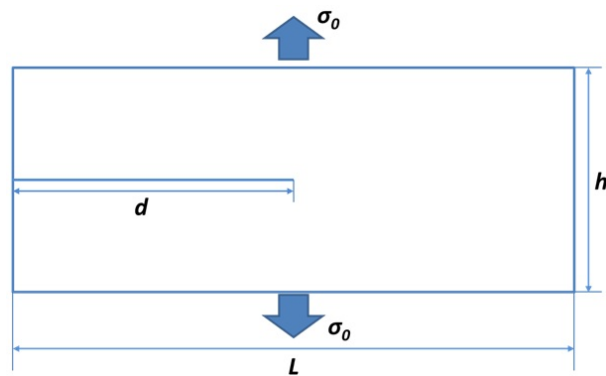
Горизонт взаимодействия  $\delta = 3.015\Delta x$ , шаг сетки  $\Delta x = 5 \cdot 10^{-4}$  м, число частиц  $N = 16000$ , временной шаг  $\Delta t = 0.01$  мкс. Конец счета при  $t = 60$  мкс.

Проведено два расчета с функциями влияния типа кубический сплайн и многочленом шестой степени. На рис. 10 изображены растровые картины эволюции трещины для каждого расчета. Наблюдаются процессы зарождения, линейного распространения и ветвления трещины. Видно, что распространение повреждений проте-



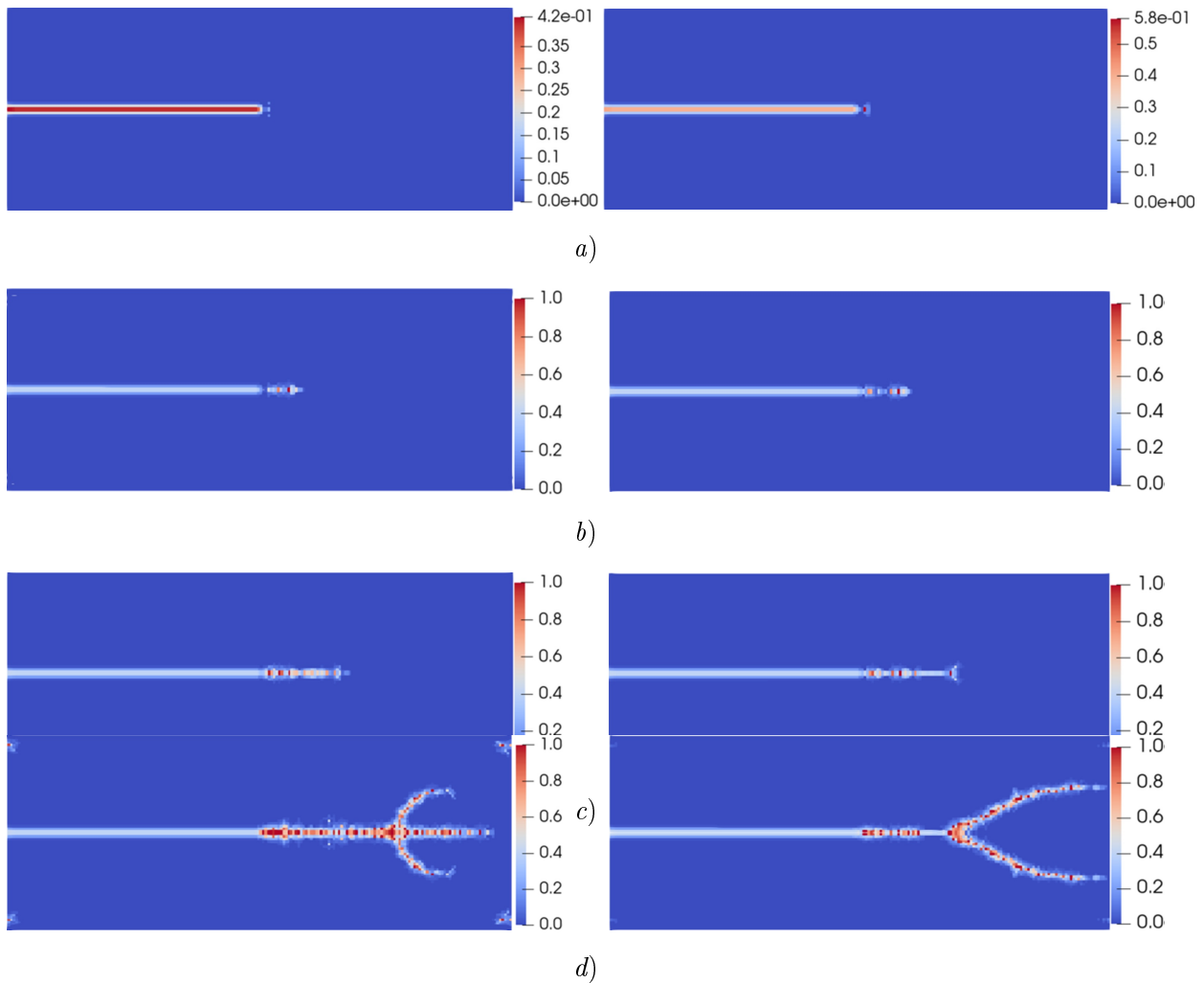


**Рис. 8.** Зависимость смещения (а, б) и напряжения (с) частицы в сечении  $x = L/2$  от времени для функций влияния из таблицы 1: 1 — постоянная; 2 — треугольная; 3 — квадратичная; 5 — экспоненциальная; 6 — гауссова; 7 — кубический сплайн; 8 — многочлен четвертой степени; 9 — многочлен шестой степени; 10 — косинус.

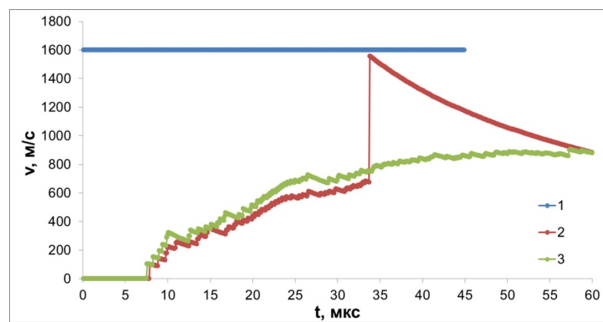


**Рис. 9.** Геометрия задачи и условия нагрузки для прямоугольной пластины

кает с разной скоростью для разных функций влияния (рис. 11). Наилучшая картина разрушения наблюдается при использовании функции влияния типа кубический сплайн (рис. 10, 12b). Качественное сравнение результатов моделирования с экспериментом [18] (рис. 12) показывает адекватное поведение разрушения с сохранением осевой симметрии при более медленном распространении трещины (рис 11).



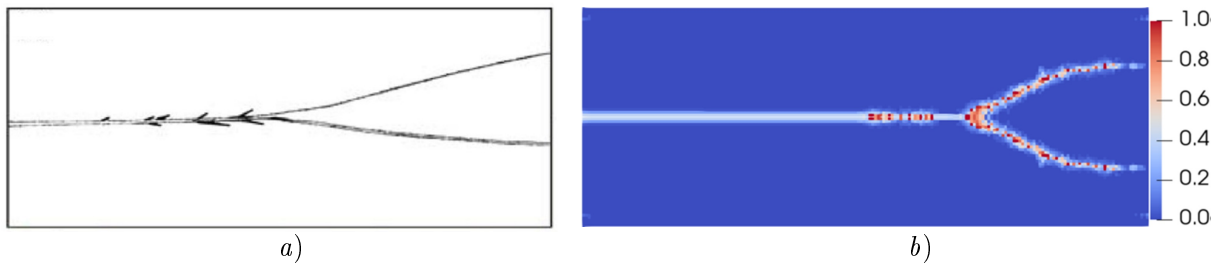
**Рис. 10.** Картина разрушения пластины на времена для функций влияния типа многочлена шестой степени (первый столбец) и кубический сплайн (второй столбец): а)  $t = 10$  мкс; б)  $t = 20$  мкс; в)  $t = 29$  мкс; д)  $t = 60$  мкс.



**Рис. 11.** Скорость распространения трещины: 1 — эксперимент [18]; 2 — NOSB модель с многочленом шестой степени; 3 — NOSB модель с кубическим сплайном.

## 10. Заключение

Результаты проделанной работы показали, что использование функции влияния типа кубический сплайн в NOSB модели перидинамики дает сходимость реализованной модели к аналитическому решению для двумерной задачи упругости с погреш-



**Рис. 12.** Сравнение картин разрушения пластины: а) эксперимент [18]; б) NOSH модель с функцией влияния типа кубический сплайн.

ностью 0.001%, адекватное поведение эволюции разрушения пластины и сохранение осевой симметрии ветвления трещины. При этом наблюдается медленное распространение разрушения, связанное с потерей энергии при численном интегрировании основных выражений перидинамики.

## Литература

1. Silling S.A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // *Journal of Mechanics and Physics of Solids*. 2000. Vol. 48, Iss.1. P. 175–209.
2. Silling S.A., Askari E.A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics // *Computers and Structures*. 2005. Vol. 83, Iss. 17-18. P. 1526–1535
3. Silling S.A., Epton M., Weckner O., Xu J. Askari E Peridynamic states and constitutive modeling // *University of Nebraska – Lincoln*. 2007. Vol. 34.
4. Foster T. Dynamic crack initiation toughness: experiments and peridynamic modeling // *Purdue University, West Lafayette. Ind, USA*. 2009. Vol. 34.
5. Chen Z., Ju J. W., Su G., Huang X., Li S., Zhai L. Influence of micro-modulus functions on peridynamics simulation of crack propagation and branching in brittle materials // *Engineering Fracture Mechanics*. 2019. Vol. 216
6. Li S., Jin Y., Huang X., Zhai L. An extended bond-based peridynamic approach for analysis on fracture in brittle materials // *Mathematical Problems in Engineering*. 2020. Vol. 12. P. 1-12.
7. Silling S.A., Lehoucq R.B. Convergence of Peridynamics to Classical Elasticity Theory Sandia National Laboratories. 2007. Vol. 25.
8. Liu W. Discretized bond-based peridynamics for solid mechanics // *Michigan State University*. 2012. Vol. 213.
9. Шишканов Д.А., Ветчинников М.В., Дерюгин Ю.Н. Метод перидинамики для решения задач разрушения твердых тел // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2022. Т. 24, № 4. С. 452–468. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.452-468>
10. Дерюгин Ю.Н., Ветчинников М.В., Шишканов Д.А. Исследование различных функций влияния в перидинамике // *Журнал Средневолжского*

математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 342–360. DOI:  
<https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.342-360>

11. Siling S.A., Geubelle P.H., Foster J.T., Bobaru F. Handbook of Peridynamic Modeling // CRC Press by Taylor and Francis Group, LLC. 2017. Vol. 568.
12. Erdogan M., Erkan O. Peridynamic Theory and Its Applications // New York: Springer. 2014. Vol. 284.
13. Zhou X., Wang Y., Qian Q. Numerical simulation of crack curving and branching in brittle materials under dynamic loads using the extended non-ordinary state-based peridynamics // European Journal of Mechanics A/Solids. 2016. Vol. 23. P. 277-299.
14. Erdogan Madenci, Barut A., Futch M. Peridynamic differential operator and its applications // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2016. Vol. 304. P. 408-451.
15. Gu X., Zhang Q., Yu Y. An effective way to control numerical instability of a nonordinary state-based peridynamic elastic model // Department of Engineering Mechanics. 2017. Vol. 8.
16. Yaghoobi A., Chorzepa MG. Higher-order approximation to suppress the zero-energy mode in non-ordinary state-based peridynamics // Computers and Structures. 2017. Vol. 18. P. 63-79.
17. Becker R., Lucas R.J., An assessment of peridynamics for pre and post failure deformation // Tech. rep., DTIC Document. 2011. Vol. 45.
18. Ravi-Chandar K., Knauss W.G. An experimental investigation into dynamic fracture: II. Microstructural aspects. // Int. J. Fract. 1984. Vol. 26. P. 65-80.

MSC 45K05

## Influence function in the continuum model of peridynamics

Yu.N. Deryugin, D.A. Shishkanov

National Research Mordovia State University

*Abstract:* The paper presents a study of the behavior of a numerical model of peridynamics for various influence functions using the example of two-dimensional elasticity problems with an analytical solution and fracture problems. The influence function is used to define the model in integral relations and describes the behavior of non-local particle interactions. It is shown that the best convergence of the implemented model is achieved by using the cubic spline type influence function.

*Keywords:* peridynamics, continuum mechanics, interaction horizon, strain gradient tensor, influence function.

### References

1. Silling S.A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // *Journal of Mechanics and Physics of Solids*. 2000. Vol. 48, Iss.1. P. 175–209.
2. Silling S.A., Askari E.A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics // *Computers and Structures*. 2005. Vol. 83, Iss. 17-18. P. 1526–1535
3. Silling S.A., Epton M., Weckner O., Xu J. Askari E Peridynamic states and constitutive modeling // *University of Nebraska – Lincoln*. 2007. Vol. 34.
4. Foster T. Dynamic crack initiation toughness: experiments and peridynamic modeling // *Purdue University, West Lafayette. Ind, USA*. 2009. Vol. 34.
5. Chen Z., Ju J. W., Su G., Huang X., Li S., Zhai L. Influence of micro-modulus functions on peridynamics simulation of crack propagation and branching in brittle materials // *Engineering Fracture Mechanics*. 2019. Vol. 216
6. Li S., Jin Y., Huang X., Zhai L. An extended bond-based peridynamic approach for analysis on fracture in brittle materials // *Mathematical Problems in Engineering*. 2020. Vol. 12. P. 1-12.
7. Silling S.A., Lehoucq R.B. Convergence of Peridynamics to Classical Elasticity Theory Sandia National Laboratories. 2007. Vol. 25.
8. Liu W. Discretized bond-based peridynamics for solid mechanics // *Michigan State University*. 2012. Vol. 213.
9. Shishkanov D.A., Vetchinnikov M.V., Deryugin Yu. N. Peridynamics method for problems solve of solids destruction. // *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 2022. T. 24, № 4. P. 452–468. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.452-468>
10. Deryugin Yu.N., Vetchinnikov M.V., Shishkanov D.A. Investigation of different influence functions in peridynamics. // *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo*

obshchestva. 2023. Т. 25, № 4. P. 342–360. DOI:  
<https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.342-360>

11. Siling S. A., Geubelle P.H., Foster J.T., Bobaru F. Handbook of Peridynamic Modeling // CRC Press by Taylor and Francis Group, LLC. 2017. Vol. 568.
12. Erdogan M., Erkan O. Peridynamic Theory and Its Applications // New York: Springer. 2014. Vol. 284.
13. Zhou X., Wang Y., Qian Q. Numerical simulation of crack curving and branching in brittle materials under dynamic loads using the extended non-ordinary state-based peridynamics // European Journal of Mechanics A/Solids. 2016. Vol. 23. P. 277-299.
14. Erdogan Madenci, Barut A., Futch M. Peridynamic differential operator and its applications // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2016. Vol. 304. P. 408-451.
15. Gu X., Zhang Q., Yu Y. An effective way to control numerical instability of a nonordinary state-based peridynamic elastic model // Department of Engineering Mechanics. 2017. Vol. 8.
16. Yaghoobi A., Chorzepa MG. Higher-order approximation to suppress the zero-energy mode in non-ordinary state-based peridynamics // Computers and Structures. 2017. Vol. 18. P. 63-79.
17. Becker R., Lucas R.J., An assessment of peridynamics for pre and post failure deformation // Tech. rep., DTIC Document. 2011. Vol. 45.
18. Ravi-Chandar K., Knauss W.G. An experimental investigation into dynamic fracture: II. Microstructural aspects. // Int. J. Fract. 1984. Vol. 26. P. 65-80.

УДК 519.24; 004.8; 519.6

## Исключение методической погрешности оценки показателя Хёрста, возникающей из-за малого объема выборок

Иванов А.И.<sup>1</sup>, Тарасов Д.В.<sup>2</sup>

АО «Пензенский научно-исследовательский электротехнический институт»<sup>1</sup>,  
ФГБОУ ВО Пензенский государственный университет<sup>2</sup>

*Аннотация:* В настоящее время показатель Хёрста достаточно легко интерпретируется применительно к биометрическим, медицинским и экономическим данным, однако его принято оценивать на больших выборках. Целью работы является нейтрализация методической ошибки, возникающей из-за недостаточного объема исходных данных. В работе используется связь показателя Хёрста с автокорреляционными функционалами. Предложено средствами имитационного моделирования заранее вычислять аддитивную методическую погрешность и устранять ее для каждой выборки. Получена связь значения аддитивной методической погрешности оценки показателя Хёрста с размерами малых выборок в пределе от 20 до 80 опытов. Это позволяет повысить точность оценок, за счет корректировки аддитивной методической погрешности.

*Ключевые слова:* белый шум, показатель Хёрста, малые выборки, биометрические данные, методическая погрешность.

### 1. Введение

При анализе параметров рынка [1–3] и коллективной биометрии [9] одним из активно используемых инструментов является показатель Хёрста. К сожалению, эмпирический показатель Хёрста по умолчанию предполагает использование больших выборок из-за того, что он является степенным:

$$\frac{R(N)}{\sigma(N)} = \left( \frac{\pi N}{2} \right)^H, \quad (1)$$

где  $N$  – размер выборки;  $R$  – размах выборки;  $\sigma$  – стандартное отклонение выборки;  $H$  – степенной показатель Хёрста, изменяющийся в интервале от 0,5 до 1,0 для предсказуемых персистентных систем и, в интервале от 0,0 до 0,5 для антиперсистентных систем с периодическим переключением рынка из состояния «медведи» в состояние «быки».

Другой вариант записи показателя Хёрста получается путем перехода от уравнения (1) в его логарифмическую форму:

$$H(N) = \frac{\log_2 \frac{R(N)}{\sigma(N)}}{\log_2 \left( \frac{\pi N}{2} \right)}, \quad (2)$$

Вторая форма удобна для пояснения причин, по которым при анализе данных рынков и данных коллективной биометрии необходимы большие выборки. Если предположить, что логарифм нормированного размаха данных является константой, то

ошибка оценки показателя будет оцениваться следующим соотношением:

$$\Delta H(N) \approx \frac{\text{const}}{\log_2\left(\frac{\pi N}{2}\right)}, \quad (3)$$

Из этого следует, что ошибки из-за сокращения размеров выборки реальных данных должны расти обратно пропорционально логарифму объема выборки.

Проведенные численные эксперименты показали, что вместе со случайной составляющей погрешности оценки (2) содержится методическая составляющая погрешности, которую можно устранить. Одна из первых работ, отмечающая наличие мультипликативной составляющей методической погрешности, является работа Е. Федера [5] при слишком низких и слишком больших значениях показателя Хёрста. Одним из первых попытался устранить мультипликативную погрешность Э. Найман [6], однако работ о том, насколько эффективен мультипликативный корректор Э. Наймана нами не обнаружено. Это и послужило толчком к выполнению данной работы по корректировке только аддитивной составляющей методической погрешности.

## 2. Численное моделирование значений показателя Хёрста для малых выборок на эталонном «белом шуме»

Первоначально в рамках численного эксперимента построим порядка 10000 выборок имеющих нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и с величиной  $\sigma$  близкой к единице (здесь будем подавать незначительный шум как равномерно распределенную на интервале  $(0; 0,01)$  величину). Результаты численного моделирования значений показателя Хёрста для выборок объема  $N = 50$  показывают, что выборочное среднее значение показателя Хёрста здесь составляет 0,3470 (рис. 1), хотя его величина должна быть равна 0,5.

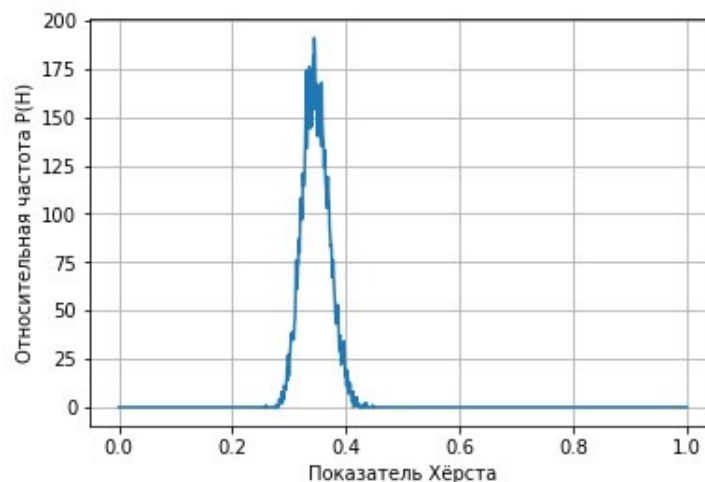


Рис. 1. Результаты численного эксперимента по оценке показателя Хёрста для независимых данных. Объем выборки  $N = 50$ , выборочное среднее значение показателя составляет 0,3470.

Напомним, что если бы формулы (1)-(2) оценки показателя Хёрста верно отражали действительность, то с ростом размеров выборки мы наблюдали бы постоянное значение математического ожидания распределений. Однако случайная составляющая погрешности с ростом объема выборки падает и, кроме того, существует значи-



тельная методическая составляющая погрешности оценок [7,8]. Таким образом, методическая погрешности для нашего примера составляет  $\Delta H \approx 0,5 - 0,3470 = 0,1530$ .

В табл. 1 представлены значения соответствующих поправок для 12-ти выборок объемом от 10 до 320 значений.

**Таблица 1.** Методическая погрешность как функция объема выборки

$N$	10	20	30	40	50	60	80	100	120	140	160	320
$\Delta H$	0,054	0,108	0,13	0,143	0,153	0,161	0,172	0,181	0,187	0,192	0,197	0,218

Устранение методической погрешности позволяет поднять точность оценок примерно в 2 раза на выборках в 30 опытов и более, однако при этом остается не скомпенсированной случайная составляющая погрешности.

### 3. Влияние размеров выборки на относительную погрешность оценки показателя Хёрста в эталонной выборке «белого шума»

Если методическую составляющую погрешности полностью устранить из оценок (2), то мы будем наблюдать идеальную ситуацию, когда математическое ожидание показателя Хёрста уже не будет зависеть от размеров выборки:

$$E(H(N)) \approx \text{const} = 0,5, \quad (4)$$

Для того, что бы наблюдать соотношение (4) придется многократно повторять вычисления с заданным объемом выборки. При этом случайную составляющую погрешности в первом приближении можно считать равной величине стандартного отклонения. В этом случае мы будем наблюдать монотонное снижение случайной составляющей по мере роста объема выборки (табл. 2). Отметим, что для нашего первоначально примера (рис. 1) случайная составляющая ошибки составит величину 0,0232.

**Таблица 2.** Случайная составляющая ошибки как функция объема выборки

$N$	10	20	30	40	50	60	80	100	120	140	160	320
$\Delta H$	0,035	0,031	0,027	0,025	0,023	0,022	0,02	0,019	0,018	0,017	0,017	0,013

Зависимость, определяющая случайную составляющую ошибки (табл. 2), в логарифмической системе координат хорошо описывается линейным приближением. Т.е., оценивая случайную составляющую, мы можем воспользоваться следующим приближением:

$$\Delta H(N) \approx \sigma(N) \approx 0,036 - 0,09 \cdot \lg N, \quad (5)$$

Последнее означает, что для выборки в 40 опытов значение относительной ошибки показателя Хёрста составит порядка 5%. Если же мы будем оценивать ошибку по

более жесткому правилу трех стандартных отклонений («трех сигм»), то на выборке в 40 опытов мы получим относительную ошибку в 15%. Крайне важным моментом является так же то, что относительная случайная ошибка очень медленно снижается. Так при увеличении выборки с 40 до 320 опытов происходит всего лишь двукратное снижение относительной составляющей случайной ошибки.

## 4. Заключение

Компенсация методической погрешности является принципиально важным технологическим элементом оценки значений показателя Хёрста как на малых, так и на больших выборках. Если методическая погрешность оценок не устраняется, то увеличение объема исследуемых выборок не приводит к снижению ошибок.

## Литература

1. Калуш Ю.А., Логинов В.М. Показатель Хёрста и его скрытые свойства // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. Т. 5, Вып. 4. С. 29–37.
2. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка / пер. с англ. В. И. Гусевой. М. : МИР, 2000. 333 с.
3. Мандельброт Б., Хадсон З. Л. (НЕ)послушные рынки. Фрактальная революция в финансах. М. ; СПб. ; Киев : Вильямс, 2006. 408 с.
4. Иванов А. И. Высокорамерная коллективная биометрия подсознательного поведения людей на рынке и производстве : препринт. Пенза : Изд-во ПГУ, 2021. 60 с.
5. Федер Е. Фракталы. М. : Мир, 1991. 254 с.
6. Найман Э. Как покупать дешево и продавать дорого : пособие для разумного инвестора. М. : Альпина Паблишерз, 2011. 552 с.
7. Иванов А. И., Герасин В. Ю. Перспективы использования автокорреляционных статистических критериев как аналогов показателя Хёрста при обработке малых выборок данных экономики и биометрии // Труды международного симпозиума «Надёжность и качество». Пенза, 2023. Т. 2, С. 59–61.
8. Иванов А. И., Тарасов Д. В. Дополнительная коррекция аддитивной методической погрешности оценок показателя Хёрста при анализе эмпирических данных // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике : сб. ст. XXIII Междунар. науч.-техн. конф., посвящ. 80-летию Пензенского государственного университета (г. Пенза, 24–25 ноября 2023 г.) / под ред. А. В. Кузьмина, В. В. Дрождина. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2023. С. 14–18.

MSC 91B82

## Elimination of the methodological error in estimating the Hurst index, which occurs due to the small volume of samples

A.I. Ivanov<sup>1</sup>, D.V. Tarasov<sup>2</sup>

Penza Scientific Research Electrotechnical Institute<sup>1</sup>, Penza State University<sup>2</sup>

*Abstract:* Currently, the Hurst indicator is quite easily interpreted in relation to biometric, medical and economic data, but it is customary to evaluate it on large samples. The aim of the work is to neutralize the methodological error that occurs due to insufficient amount of initial data. The paper uses the connection of the Hurst exponent with autocorrelation functionals. It is proposed to calculate the additive methodological error in advance by means of simulation modeling and eliminate it for each sample. The relationship between the value of the additive methodological error in estimating the Hurst index and the size of small samples in the range from 20 to 80 experiments was obtained. This makes it possible to increase the accuracy of estimates by correcting the additive methodological error.

*Keywords:* white noise, Hurst index, small samples, biometric data, methodological error.

### References

1. Kalush Yu.A., Loginov V.M. Hurst exponent and its hidden properties. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki* [Siberian journal of industrial mathematics]. 2002. 5(4). P. 29-37. (In Russ.)
2. Peters. E. *Khaos i poryadok na rynkakh kapitala. Novyy analiticheskiy vzglyad na tsikly, tseny i izmenchivost' rynka* [Chaos and order in capital markets. A new analytical look at cycles, prices and market volatility]. Transl. from Eng. by V.I. Guseva. Moscow: MIR, 2000. 333 p. (In Russ.)
3. Mandel'brot B., Khadson Z.L. (NE)poslushnye rynki. *Fraktal'naya revolyutsiya v finansakh* [(NOT)obedient markets. Fractal revolution in finance]. Transl. from Eng. and ed. by A.Yu. Zayakin. Moscow; Saint Petersburg; Kiev: Vil'yams, 2006. 408 p. (In Russ.)
4. Ivanov A.I. *Vysokorazmernaya kollektivnaya biometriya podsoznatel'nogo povedeniya lyudey na rynke i proizvodstve: preprint* [High-dimensional collective biometrics of subconscious behavior of people in the market and production: preprint]. Penza: Iz-vo PGU, 2021. 60 p. (In Russ.)
5. Feder E. *Fraktaly* [Fractals]. Moscow: MIR, 1991. 254 p. (In Russ.)
6. Nayman E. *Kak pokupat' deshevo i prodavat' dorogo: posobie dlya razumnogo investora* [How to buy low and sell high: guidance for the smart investor]. Moscow: Al'pina Pablishez, 2011. 552 p. (In Russ.)
7. Ivanov A.I., Gerasin V.Yu. Prospects for the use of autocorrelation statistical criteria as analogues of the Hurst index in processing small samples of economic and

- biometrics data. Trudy mezhdunarodnogo simpoziuma «Nadezhnost' i kachestvo» [Proceedings of the International Symposium "Reliability and Quality"] . Penza, 2023. 2. P. 59–61.
8. Ivanov A.I., Tarasov D.V. Additional correction of the additive methodological error of estimates of the Hurst index in the analysis of empirical data. Problemy informatiki v obrazovanii, upravlenii, ekonomike i tekhnike : sb. st. XXIII Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf., posvyashch. 80-letiyu Penzenskogo gosudarstvennogo universiteta (g. Penza, 24–25 noyabrya 2023 g.) [Problems of computer science in education, management, economics and technology : collection of Articles XXIII International Scientific and Technical conf., dedicated. The 80th anniversary of Penza State University (Penza, November 24-25, 2023)]. Penza: Iz-vo PGU, 2023. P. 14-18.

УДК 519.63

## Новый тип колебаний в системе с трением\*

Иванов А.П., Маурах Г.М.

Научно-технологический университет «Сириус»

*Аннотация:* Рассмотрена динамика утолщённого стержня на плоскости. Сила, приложенная к центру стержня, вынуждает двигаться его с постоянной скоростью. В начальный момент стержень покоится перпендикулярно линии действия силы. В ходе проведенных экспериментов было обнаружено изменение угла между стержнем и нитью, передающей нагрузку, попеременно в положительном и отрицательном направлениях. Показано, что если считать распределение нормальной нагрузки равномерным, то этот эффект невозможен ни при каком законе трения. В качестве объяснения предлагается использовать динамически непротиворечивую модель сухого трения, в которой центр давления находится в передней части стержня (по направлению движения), что приводит к возникновению момента, который поворачивает стержень.

*Ключевые слова:* распределённое трение, колебательные системы.

### 1. Введение

Как известно [1–3], относительное движение шероховатых тел часто сопровождается колебаниями в нормальном или тангенциальном направлениях. Простейшая модель тангенциальных колебаний показана на рис. 1: их причиной является разница в коэффициентах статического и динамического трения. На практике такие колебания в звуковом диапазоне наблюдаются, когда тормоза «визжат». С другой стороны, наличие колебаний может изменить динамику системы с трением [3–6].



Рис. 1. Пример колебаний из-за сил трения.

Во всех упомянутых работах распределение нагрузки в зоне контакта считалось равномерным, и вопрос о необходимости учета неравномерности не возникал. В данной статье рассматривается экспериментально обнаруженный эффект колебаний, который не может быть объяснен в рамках модели равномерного распределения для любого закона трения. Обратите внимание, что динамика цилиндра с неравномерным законом распределения обсуждается в статье [2], которая также содержит обширный обзор литературы. Статья организована следующим образом. Во второй главе описывается экспериментальная установка и обнаруженные автоколебания нового типа.

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект №24-11-20009).

В третьей главе построена математическая модель системы, а четвертая глава посвящена расчету распределения нормальной нагрузки в зоне контакта. В пятой главе на основе этой математической модели дается объяснение обнаруженного эффекта.

## 2. Описание эксперимента

Для изучения динамики удлиненного твердого тела (бруска) с плоским основанием, движущегося по шероховатой плоскости под действием тянущей силы, была проведена серия экспериментов. Брусок изготовлен из акрила. Края бруска скошены для уменьшения момента инерции (рис. 2). Брус имеет углубления, в которые помещаются равные дополнительные массы. Таким образом, основная масса расположена близко к центру бруска, он имеет большую массу и малый момент вращения по сравнению со сплошным акриловым бруском. В центр бруска вставлена ось диаметром 3 мм. Шайба с резьбой свободно вращается вокруг оси, проходящей через центр масс стержня. Центр масс утяжелителя находится на высоте  $h = 20$  мм, резьба закреплена выше, на высоте 29 мм, на вертикальной оси. Шайба способна поворачиваться на углы в широком диапазоне, не касаясь бруска. Поверхность бруска отшлифована с шероховатостью R1000 и выровнена. Таким образом, основные неровности, создающие трение, расположены на поверхности стола (опоры). Последний представляет собой окрашенную деревянную поверхность.

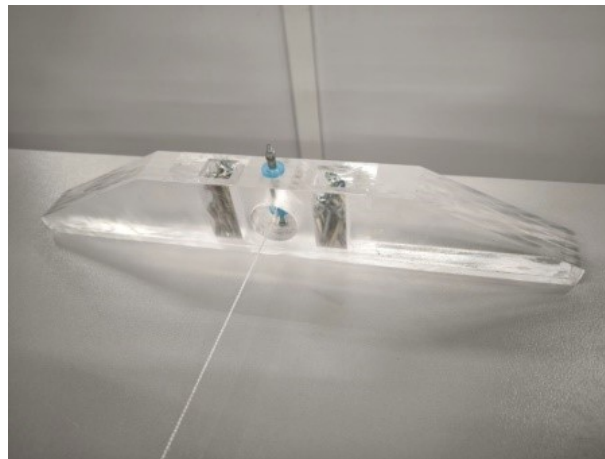


Рис. 2. Экспериментальная модель.

В ряде экспериментов были обнаружены колебания бруска с изменением направления вращения (рис. 3). Положения бруска обозначены числами 1-5.

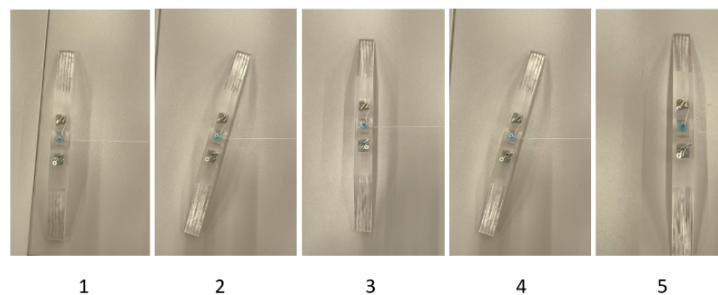


Рис. 3. Фазы вращения.

Сначала брусок находится в состоянии покоя **1**, затем он начинает вращаться по часовой стрелке **2**, достигая примерно 20 градусов. Далее движение начинается против часовой стрелки. Затем он возвращается в исходное положение **3** и движение периодически повторяется **4-5**. Очевидно, что такое поведение может быть вызвано только действием сил трения. В идеальной ситуации, когда нить закреплена в центре масс блока и нормальная нагрузка распределена равномерно, ориентация блока оставалась бы неизменной. Чтобы объяснить колебания, необходимо использовать закон Амонтона-Кулона, учитывающий неравномерное распределение нормальной нагрузки в зоне контакта.

### 3. Математическая модель системы

Мы изучим динамику блока в ограниченной постановке, учитывая, что его центр  $O$  перемещается вправо по прямой с постоянной скоростью  $V$ , а основной вектор сил трения  $\vec{F}_T$  сонаправлен нити и не изменяется по величине, тогда сила натяжения нити постоянна и равна  $|\vec{F}_T| = \mu P$ , где  $\mu$  – коэффициент трения скольжения, а  $P$  – вес тела. Введем инерциальную систему координат, где ось  $OZ$  направлена вверх, а ось  $OX$  направлена вдоль нити. Вторая система координат  $OX'Y'Z'$  относится к корпусу: ось перпендикулярна блоку и проходит через середину контактной зоны. Ориентация стержня определяется углом между двумя соответствующими осями (рис. 4).

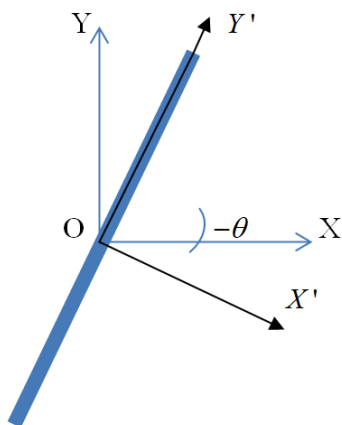


Рис. 4. Системы координат

Уравнение Эйлера, описывающее изменение ориентации тела, имеет вид

$$J_C \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_N + \vec{M}_T + \vec{M}_t,$$

$$\vec{M}_N = \iint_D (x, y, -h) \times \vec{k} p(x, y) dx dy, \vec{M}_t = f \Delta \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} f \Delta, \quad (1)$$

$$\vec{M}_T = \iint_D (x, y, -h) \times \vec{F}(x, y) dx dy, \vec{F}(x, y) = -\mu p(x, y) \frac{\vec{v}(x, y)}{|\vec{v}(x, y)|},$$

Здесь  $J_C$  – центральный момент инерции;  $\vec{M}_N$ ,  $\vec{M}_T$  и  $\vec{M}_t$  – суммарные моменты реакции опоры, трения и реакции нити, вычисленные относительно центра масс;  $\Delta$  – расстояние между точкой крепления нити и точкой  $C$ ;  $\vec{\omega}$  угловая скорость тела;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы системы  $OXYZ$ ;  $p(x, y)$  и  $v(x, y)$  – нормальное давление в данной точке поверхности контакта  $D$  и её скорость.

Чтобы вычислить функцию  $p(x, y)$  в уравнениях (1), предположим линейную зависимость [8, 9]:

$$p(x, y) = p_0 + p_1x' + p_2y'. \quad (2)$$

Здесь коэффициенты определяются из условий контакта [9]:

$$p_0 = \frac{P}{S(D)}, \quad (\vec{\omega}, \vec{i}) = (\vec{\omega}, \vec{j}) \equiv 0, \quad (3)$$

где  $S(D)$  – окрестность точки  $D$ . Движение тела параллельно основанию, таким образом, система имеет одну степень свободы, и уравнение движения имеет вид:

$$J_z \ddot{\theta} = (\vec{M}_N + \vec{M}_T + \vec{M}_t, \vec{k}) = M_T, \\ M_T = \iint_D DM(x, y) dx dy, \quad M(x, y) = (x, y, 0) \times \vec{F}(x, y). \quad (4)$$

Здесь  $J_z$  – вертикальный момент инерции тела;  $M_T$  – суммарный момент трения относительно точки  $O$ ;  $M(x', y')$  – момент трения в точке тела с координатами  $(x', y')$ ;  $\vec{F}(x, y)$  и  $\vec{v}(x, y)$  – сила трения и скорость в той же точке. В формулах (1)

$$\vec{v}(x, y) = \vec{v}(O) + \dot{\theta} \vec{k} \times (x, y, 0) = (V - \dot{\theta}y, \dot{\theta}x).$$

Чтобы вычислить интеграл (2) удобно перейти в систему  $OX'Y'Z'$  по формулам

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \quad y = x' \sin \theta + y' \cos \theta.$$

Тогда

$$\vec{F}(x', y') = -\mu p(x', y') \frac{\vec{v}(x', y')}{|\vec{v}(x', y')|}, \quad \vec{v}(x', y') = (-V \sin \theta - \dot{\theta}y', V \cos \theta + \dot{\theta}x'),$$

$$M(x', y') = (x', y', 0) \times \vec{F}(x', y') = \\ = -\mu \frac{p(x', y')}{\sqrt{V^2 + \dot{\theta}^2 + 2V\dot{\theta}(x' \sin \theta - y' \cos \theta)}} \vec{k} (V(x' \cos \theta - y' \sin \theta) + \dot{\theta}(x'^2 + y'^2)). \quad (5)$$

#### 4. Вычисление нормальной нагрузки

Чтобы объяснить колебательные движения тела, необходимо оценить распределение нормальной нагрузки по формуле (2). В соответствии с условиями контакта, отрыва от опоры не происходит, т.е. в формуле (1) проекции угловой скорости на оси  $OX'$  и  $OY'$  равны нулю. В формуле (1)

$$J_Z(\vec{\omega}, \vec{i}) = (\vec{M}_N, \vec{i}) + (\vec{M}_T, \vec{i}) = \iint_D yp(x, y) dx dy - \iint_D (h\vec{j}, \vec{F}(x, y)) dx dy = 0,$$

$$J_Z(\vec{\omega}, \vec{j}) = (\vec{M}_N, \vec{j}) + (\vec{M}_T, \vec{j}) + (\vec{M}_t, \vec{j}) = \\ = - \iint_D xp(x, y) dx dy + \iint_D (h\vec{i}, \vec{F}(x, y)) dx dy + f\Delta = 0. \quad (6)$$



Система двух уравнений (6) позволяет определить коэффициенты в формуле (2).

**Пример.** Предположим  $\dot{\theta} = 0$ , что соответствует исходному положению **1** на рис. 3, а также точкам поворота. Чтобы сделать понятной далеко не очевидную идею этой статьи, давайте максимально упростим модель, представив область в виде сегмента, а тело – в вертикальном положении. При таких упрощениях система (6) заменяется одним уравнением

$$\begin{aligned}
 J_Z(\vec{\omega}, \vec{i}) &= (\vec{M}_N, \vec{i}) + (\vec{M}_T, \vec{i}) + (\vec{M}_t, \vec{i}) = \\
 &\iint_D y' p(x') dy' - \mu h \sin \theta \iint_D p_0 dy' + f \Delta \cos \theta = 0, \\
 p'(x) &= p_0 + p_1 y', \vec{M}_T = -\mu \iint_D (0, y', -h) \times (\cos \theta, -\sin \theta, 0) p(y') dy' = \\
 &= \mu \iint_D (h, \sin \theta, h \cos \theta, y' \cos \theta) (p_0 + p_1 y') dy'. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \iint_D y' p(x') dy' + \mu h P \sin \theta + f \Delta \cos \theta &= 0, \\
 p'(x) &= p_0 + p_1 y', \vec{M}_T = -\mu \iint_D (0, y', -h) \times (\cos \theta, -\sin \theta, 0) p(y') dy' = \\
 &= \mu \iint_D (h, \sin \theta, h \cos \theta, y' \cos \theta) (p_0 + p_1 y') dy', \\
 p_1 \iint_D y'^2 dy' &= -\mu h P \sin \theta - f \Delta \cos \theta, (\vec{M}_T, \vec{k}) = \mu p_1 \cos \theta \iint_D y'^2 dy'. \quad (8)
 \end{aligned}$$

## 5. Обоснование динамики колебаний

Подстановка выражений (8) в формулу (7) приводит к следующему результату:

$$J_Z \ddot{\theta} = -\mu(\mu h P \sin \theta + f \Delta \cos \theta). \quad (9)$$

Обсудим этапы движения на рис. 3.

1. В положении **1**, угол нулевой, так же как и его первая производная. Вторая производная отрицательна, поэтому брусок вращается по часовой стрелке.

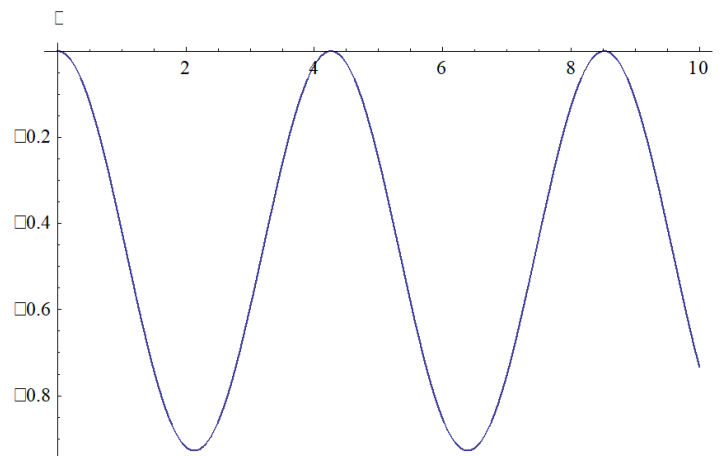
2. Если неравенство

$$\mu h P \sin \theta + f \Delta \cos \theta < 0 \quad (10)$$

имеет решение при  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ , тогда вращение останавливается (положение **3** на рис. 3) и возобновляется в обратном направлении (положение **4** на рис. 3).

3. Когда движение попадает в область, где неравенство (10) выполняется с противоположным знаком, движение по часовой стрелке продолжается, пока решение не попадёт в область неравенства (10), и т.д.

График численного решения изображён на рис. 5. Функция решения периодическая, а угол вращения остаётся отрицательным во время движения тела.



**Рис. 5.** Пример колебаний

## 6. Заключение

В статье построена математическая модель движения утолщённого стержня по шероховатой плоскости. На основе ее анализа качественно обосновано возникновение автоколебаний, обнаруженных в экспериментах. Ключевым свойством модели является зависимость нормального распределения нагрузки от координат и скоростей тела, указанная в [10]. Количественное исследование этого явления будет проведено в последующих работах.

## Благодарности

Научный коллектив выражает благодарность Соколову В.С. за помощь в создании экспериментального оборудования.

## Литература

1. Andronov A.A., Khaikin S.É. Theory of oscillations. Princeton University Press, 1949.
2. Mao X. et al. Reduction of friction by normal oscillations. II. In-plane system dynamics // Friction. 2017. Т. 5. С. 194-206.
3. Bengisu M.T., Adnan Akay. Stick-slip oscillations: Dynamics of friction and surface roughness // The Journal of the Acoustical Society of America. 1999. 105, 1. P. 194-205.
4. Blekhman I.I. Vibrational Mechanics/Nonlinear Dynamic Effects, General Approach, Applications. World Scientific, Singapore, 2000.
5. Armstrong-Helouvry B., Dupont P., Canudas de Wit C. A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for Control of Machines with Friction // Automatika. 1994. Vol. 30, № 7. P. 1083-1138.
6. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Kuznetsov S.P. The Chaplygin sleigh with friction moving due to periodic oscillations of an internal mass // Nonlinear Dynamics. 2019. 95. P. 699-714.

7. Borisov A.V. et al. Experimental investigation of the motion of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. T. 20. С. 518–541.
8. MacMillan W. D. Dynamics of rigid bodies. Dover Publications Inc., 1936.
9. Ivanov A. P. A dynamically consistent model of the contact stresses in the plane motion of a rigid body // Journal of applied mathematics and mechanics. 2009. V. 73, No. 2. P. 134–144.

MSC 74A55

## A New Type of Oscillations in a System With Friction

A.P. Ivanov, G.M. Maurakh

Sirius University of Science and Technology

*Abstract:* The dynamics of a thick rod on a rough plane is considered. A force is applied to the center of the rod causing it to move at a constant speed. At the initial moment, the rod is at rest and perpendicular to the line of action of the force. In the experiments carried out, a change in the angle between the rod and the thread transmitting the load was detected, alternately in positive and negative directions. It is shown that if we consider the distribution of the normal load to be uniform, then this effect is impossible for any friction law. As an explanation, it is proposed to use a dynamically consistent model of dry friction, in which the center of pressure lies in the front part of the rod (in the direction of movement), which leads to the occurrence of a moment that turns the rod.

*Keywords:* distributed friction, oscillation system.

### References

1. Andronov A.A., Khaikin S.É. Theory of oscillations. Princeton University Press, 1949.
2. Mao X. et al. Reduction of friction by normal oscillations. II. In-plane system dynamics // Friction. 2017. T. 5. P. 194-206.
3. Bengisu M. T., Adnan Akay. Stick-slip oscillations: Dynamics of friction and surface roughness // The Journal of the Acoustical Society of America. 1999. 105, 1. P. 194-205.
4. Blekhman I.I. Vibrational Mechanics/Nonlinear Dynamic Effects, General Approach, Applications. World Scientific, Singapore, 2000.
5. Armstrong-Helouvry B., Dupont P., Canudas de Wit C. A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for Control of Machines with Friction // Automatika. 1994. Vol. 30, № 7. P. 1083-1138.
6. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Kuznetsov S.P. The Chaplygin sleigh with friction moving due to periodic oscillations of an internal mass // Nonlinear Dynamics. 2019. 95. P. 699-714.
7. Borisov A.V. et al. Experimental investigation of the motion of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. T. 20. C. 518-541.
8. MacMillan W. D. Dynamics of rigid bodies. Dover Publications Inc., 1936.
9. Ivanov A. P. A dynamically consistent model of the contact stresses in the plane motion of a rigid body // Journal of applied mathematics and mechanics. 2009. V. 73, No. 2. P. 134-144.

УДК 517.9

## О вырожденных резонансах в системах, близких к двумерным нелинейным гамильтоновым, при квазипериодических по времени параметрических возмущениях\*

Костромина О.С.

Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

*Аннотация:* Изучается структура вырожденной резонансной зоны в случае параметрического резонанса на примере уравнения маятникового типа с немонотонным вращением при квазипериодическом по времени неконсервативном возмущении. С помощью анализа усредненных систем определяются условия существования квазипериодических решений в случае, когда порядок вырождения больше единицы. Особое внимание уделяется характерному для параметрических возмущений существованию квазипериодических решений нового типа, отвечающих предельным циклам усредненной системы, не имеющих порождающих предельных циклов в возмущенной автономной системе, соответствующей исходному уравнению.

*Ключевые слова:* вырожденный резонанс, квазипериодические параметрические возмущения, предельный цикл, уравнение маятникового типа, усреднение.

Рассматриваемый в работе круг вопросов относится к области исследования неконсервативных двухчастотных квазипериодических возмущений двумерных нелинейных гамильтоновых систем с немонотонным вращением. Системы такого класса могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} + \varepsilon g(x, y, \theta_1, \theta_2), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + \varepsilon f(x, y, \theta_1, \theta_2), \end{cases} \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – малый положительный параметр,  $\theta_i = \omega_i t$ ,  $i = 1, 2$ ; функции  $g$  и  $f$  – непрерывные и  $2\pi$ -периодические по  $\theta_i$ ; гамильтониан  $H$  и функции  $g$  и  $f$  – достаточно гладкие по переменным  $x$  и  $y$  в некоторой области  $D \subset \mathbb{R}^2$  или  $D \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$ ;  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – несоизмеримые над полем рациональных чисел частоты возмущения. Предполагается выполнение условия  $g'_x + f'_y \neq 0$  в области  $D$ , что означает неконсервативность исходной системы (1). Рассматриваются возмущения, содержащие нелинейные параметрические члены вида  $p(\theta_1, \theta_2)x^k y^l$ ,  $k + l \geq 2$ .

Относительно соответствующей невозмущенной системы ( $\varepsilon = 0$ ) предполагается, что она является нелинейной гамильтоновой и имеет ячейку  $D_0 \subset D$ , заполненную замкнутыми фазовыми кривыми  $H(x, y) = h$ ,  $h \in [h_{min}, h_{max}]$ , и не содержащую малых окрестностей состояний равновесия и сепаратрис.

Переходя в  $D_0$  от переменных  $x, y$  к переменным «действие  $I$  – угол  $\theta$ »:

$$x = X(I, \theta), \quad y = Y(I, \theta),$$

---

\*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФ, грант № 24-21-00050.

где  $X, Y$  – решение невозмущенной системы на замкнутых фазовых кривых, система (1) запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon(f(X, Y, \theta_1, \theta_2)X'_\theta - g(X, Y, \theta_1, \theta_2)Y'_\theta), \\ \dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon(-f(X, Y, \theta_1, \theta_2)X'_I + g(X, Y, \theta_1, \theta_2)Y'_I), \\ \dot{\theta}_1 = \omega_1, \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2. \end{cases} \quad (2)$$

Предполагается, что собственная частота  $\omega(I)$  невозмущенной системы не является монотонной функцией и не обращается в нуль на интервале

$$(I_{min}, I_{max}) \equiv (I(h_{min}), I(h_{max})).$$

Фазовое пространство системы (2) – декартово произведение  $[I_{min}, I_{max}] \times \mathbb{T}^3$ , где  $\mathbb{T}^3$  – трехмерный тор.

Говорят, что в системе (2) имеет место резонанс, если выполняется условие:

$$n\omega(I) = m_1\omega_1 + m_2\omega_2, \quad (3)$$

где  $n, m_1, m_2$  – взаимно простые натуральные числа. Вещественные решения  $I$  этого уравнения на отрезке  $[I_{min}, I_{max}]$  будем обозначать  $I_{nm}$ ,  $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$ . Тогда уровни  $I = I_{nm}$  (замкнутые фазовые кривые  $H(x, y) = h_{nm}$  невозмущенной системы) будем называть резонансными уровнями. Окрестность  $U_\mu = \{(I, \theta) : I_{nm} - C\mu < I < I_{nm} + C\mu, 0 \leq \theta < 2\pi, C = \text{const} > 0\}$ ,  $\mu = \sqrt{\varepsilon}$ , индивидуального резонансного уровня  $I = I_{nm}$  будем называть резонансной зоной.

При условии, что  $I = I_{nm}$  является стационарной точкой функции  $\omega(I)$ , такой что

$$\frac{d^k \omega}{dI^k}(I_{nm}) = 0, \quad k = \overline{1, j}, \quad \frac{d^{j+1} \omega}{dI^{j+1}}(I_{nm}) \neq 0, \quad j \geq 1,$$

резонансный уровень  $I = I_{nm}$  будем называть вырожденным с порядком вырождения  $j$ .

В работах [1–3] получены двумерные автономные усредненные системы, описывающие топологию резонансных зон, близких к вырожденным в случае, когда порядок вырождения больше единицы. Простому устойчивому (неустойчивому) состоянию равновесия усредненной системы соответствует двумерный устойчивый (неустойчивый) инвариантный тор в системе (2), или устойчивое (неустойчивое) квазипериодическое резонансное решение с периодами  $\frac{2\pi n}{\omega_1}, \frac{2\pi n}{\omega_2}$  в системе (1). Грубому устойчивому (неустойчивому) предельному циклу усредненной системы с частотой  $\omega_0$  соответствует трехмерный устойчивый (неустойчивый) инвариантный тор в системе (2).

Установлено существование трехмерных инвариантных торов двух типов [2, 3]. Тор первого типа порождается предельным циклом соответствующей возмущенной автономной системы. Ему соответствует квазипериодическое резонансное решение с периодами  $\frac{2\pi}{\omega_0}, \frac{2\pi n}{\omega_1}, \frac{2\pi n}{\omega_2}$  в системе (1). Поскольку возмущение системы содержит параметрические члены, зависящие как от фазовых координат, так и от времени, то дивергенция усредненной системы является знакопеременной функцией, что приводит к возникновению предельных циклов в колебательной области ее фазового пространства. Инвариантные торы, отвечающие таким предельным циклам, будем

называть торами второго типа. Движение по таким торах условно периодическое с периодами  $\frac{2\pi}{\omega_\varepsilon}, \frac{2\pi n}{\omega_1}, \frac{2\pi n}{\omega_2}$ , где  $\omega_\varepsilon \sim \varepsilon^{1-s}\omega_0$ ,  $s = \frac{1}{j+2}$ , при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В работах [2, 3] полученные результаты проиллюстрированы на примере асимметричного уравнения типа Дуффинга с немонотонным вращением при параметрическом квазипериодическом возмущении.

В настоящей работе изучается задача о воздействии неконсервативных двухчастотных квазипериодических возмущений на уравнение маятникового типа с немонотонным вращением в случае, когда возмущение содержит нелинейные параметрические члены. Проводится анализ двумерных автономных усредненных систем, позволяющий исследовать структуру вырожденной резонансной зоны с порядком вырождения, большим единицы. Для нахождения предельных циклов усредненных систем используется метод построения порождающей функции Пуанкаре–Понтрягина; для определения расстояния между возмущенными сепаратрисами седел применяется метод Мельникова.

## Литература

1. Morozov K.E., Morozov A.D. Degenerate Resonances and Synchronization of Quasiperiodic Oscillations // Journal of Mathematical Sciences. 2023. V. 269, № 6. P. 823–834.
2. Morozov A.D., Morozov K.E. Parametric Perturbations of a Duffing–Type Equation with Nonmonotonic Rotation // Communications in Computer and Information Science 1914 Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. Nizhny Novgorod, Russia, November 13–16, 2023. Revised Selected Papers: Springer, Communications in Computer and Information Science 1914, 318. 2023. P. 86–97.
3. Morozov A.D., Morozov K.E. Quasi-Periodic Parametric Perturbations of Two-Dimensional Hamiltonian Systems with Nonmonotonic Rotation // Regular and Chaotic Dynamics. 2024. V. 29, № 1. P. 64–76.

MSC 34C15

# On degenerate resonances in systems close to two-dimensional nonlinear Hamiltonian ones under quasi-periodic parametric perturbations

O.S. Kostromina

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

*Abstract:* Using the example of a pendulum-type equation with nonmonotonic rotation under a quasi-periodic nonconservative perturbation, the structure of the degenerate resonance zone in the case of parametric resonance is studied. Using the analysis of averaged systems, the conditions for the existence of quasi-periodic solutions are determined in the case when the order of degeneracy is greater than one. Particular attention is paid to the existence of quasi-periodic solutions of a new type, which are characteristic of parametric perturbations. Such solutions correspond to limit cycles of an averaged system that do not have generating limit cycles in the perturbed autonomous system corresponding to the original equation.

*Keywords:* degenerate resonance, quasi-periodic parametric perturbations, limit cycle, pendulum-type equation, averaging.

## References

1. Morozov K.E., Morozov A.D. Degenerate Resonances and Synchronization of Quasiperiodic Oscillations // Journal of Mathematical Sciences. 2023. V. 269, № 6. P. 823–834.
2. Morozov A.D., Morozov K.E. Parametric Perturbations of a Duffing–Type Equation with Nonmonotonic Rotation // Communications in Computer and Information Science 1914 Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. Nizhny Novgorod, Russia, November 13–16, 2023 Revised Selected Papers: Springer, Communications in Computer and Information Science 1914, 318. 2023. P. 86–97.
3. Morozov A.D., Morozov K.E. Quasi-Periodic Parametric Perturbations of Two-Dimensional Hamiltonian Systems with Nonmonotonic Rotation // Regular and Chaotic Dynamics. 2024. V. 29, № 1. P. 64–76.



УДК 519.63

## О точности модифицированного метода Галеркина с разрывными базисными функциями, зависящими от времени\*

Кочурова И.Д.<sup>1</sup>, Ладонкина М.Е.<sup>1,2</sup>, Тишкин В.Ф.<sup>2</sup>

МФТИ<sup>1</sup>, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН<sup>2</sup>

*Аннотация:* В работе исследуется модификация разрывного метода Галеркина, где в качестве альтернативы применению процедуры лимитирования используются базисные функции, подстраивающиеся под решение задачи, и в случае нарушения энтропийного неравенства в ячейке, локально переводящие исходный метод в метод Годунова первого порядка, но на измельченной вдвое сетке. В работе показана возможность использования данного метода без подключения лимитирующих функций при решении задач, содержащих сильные ударные волны. Исследованы порядки точности метода на задаче о прохождении простой волны до момента времени пока газодинамические функции сохраняют гладкость.

*Ключевые слова:* метод Галеркина с разрывными базисными функциями, уравнения Эйлера, метод Годунова, ударные волны.

### 1. Базисные функции, зависящие от времени

При применении классического разрывного метода Галеркина [1] к решению задач газовой динамики, содержащих области высоких градиентов, для сохранения монотонности решения возникает необходимость использования лимитирующих функций. Применение таких лимитеров может повлиять на точность полученного решения, понижая ее. Возможной причиной необходимости применения процедуры лимитирования может оказаться невыполнение разностного аналога энтропийного неравенства. В настоящей работе в качестве альтернативы применению процедуры лимитирования используются базисные функции, подстраивающиеся под решение задачи, и, в случае нарушения энтропийного неравенства в ячейке, локально переводящие исходный метод в метод первого порядка [2], но на измельченной вдвое сетке. Для метода первого порядка энтропийное неравенство гарантировано выполнено. Это достигается автоматической заменой кусочно-линейной базисной функции на кусочно-постоянную в конкретной ячейке.

Рассмотрим одномерную систему уравнений Эйлера:

$$\partial_t U + \nabla \cdot F(U) = 0, \quad (1)$$

дополненную подходящими начально-краевыми условиями, вид которых зависит от конкретной задачи. Консервативные переменные  $U$  и компоненты потоковых функции  $F(U)$ , заданы в виде:

$$U = (\rho, \rho u, E)^T, \quad (2)$$
$$F(U) = (\rho u, \rho u^2 + p, (E + p)u)^T.$$

---

\*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РНФ, проект № 22-11-00060

Приближенное решение системы (1) в классическом разрывном методе Галеркина ищется как решение следующей системы [1]:

$$\frac{d}{dt} \int_{T_j} \phi_k(x) \cdot U_h(x, t) d\Omega + \oint_T \phi_k(x) \cdot h_F(U_h^+, U_h^-, n) d\sigma - \int_{T_j} \frac{\partial \phi_k(x)}{\partial x} F(U_h(x, t)) d\Omega = 0. \quad (3)$$

Базис пространства выберем в виде ортогональных полиномов, где первая функция равна единице, вторая базисная функция представляет собой кусочно-линейную функцию, вид которой зависит от времени (рис. 1) [3].

$$\phi_0 = 1, \phi_1(x, t) = \begin{cases} (x - x_c)(1 - \alpha(t)) + \frac{\alpha(t)\Delta x}{2}, & x \in [x_c, x_{i+1/2}] \\ (x - x_c)(1 - \alpha(t)) - \frac{\alpha(t)\Delta x}{2}, & x \in [x_{i-1/2}, x_c] \end{cases}, \quad (4)$$

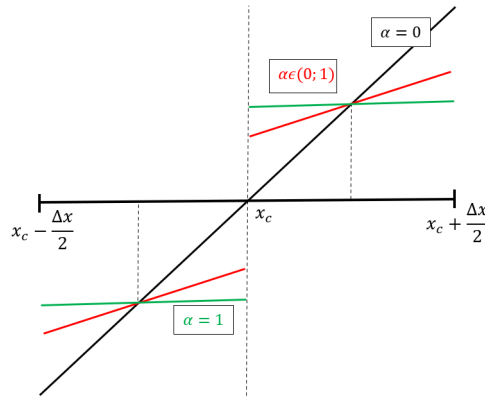


Рис. 1. Базисная функция  $\varphi_1(x, t)$

Основные формулы (3) в одномерном случае переписутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_c - \frac{\Delta x}{2}}^{x_c + \frac{\Delta x}{2}} U(x, t) \phi_k(x, t) dx &= (F(x, t) \phi_k(x, t)) \Big|_{x_c + \frac{\Delta x}{2}} - (F(x, t) \phi_k(x, t)) \Big|_{x_c - \frac{\Delta x}{2}} - \\ &- \int_{x_c - \frac{\Delta x}{2}}^{x_c + \frac{\Delta x}{2}} \left( F(x, t) \frac{\partial \phi_k(x, t)}{\partial x} + U(x, t) \frac{\partial \phi_k(x, t)}{\partial t} \right) dx, \quad k = 0, 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Второе уравнение при  $k = 1$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1(t)}{\partial t} \frac{\Delta x^3}{12} (1 + \alpha(t) + \alpha^2(t)) + U_1(t) \frac{\partial \alpha}{\partial t} (1 + 2\alpha) \frac{\Delta x^3}{24} - \int_{x_c - \frac{\Delta x}{2}}^{x_c} F(x, t) (1 - \alpha) dx - \\ - \int_{x_c}^{x_c + \frac{\Delta x}{2}} F(x, t) (1 - \alpha) dx - F^*(x_c) \alpha \Delta x + F^*(x_{i-1/2}) \alpha \frac{\Delta x}{2} + F^*(x_{i+1/2}) \alpha \frac{\Delta x}{2} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для определения  $\alpha$  в  $i$ -ой ячейке будем использовать следующий алгоритм:

1. Определяем границы:  $MMAX$  и  $MMIN$  для каждой конкретной задачи.
2. Вычисляем:  $Mmax_i$  и  $Mmin_i$ , интенсивность ударных волн, образующихся при решении задач распада произвольного разрыва на границах  $i$ -ой ячейки сетки и в точке  $x_i$ .
3. Определяем  $\alpha_i$ :

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & Mmin_i > MMAX, \\ 0, & Mmax_i < MMIN, \\ \frac{Mmax_i - Mmin}{Mmax - Mmin}, & MMIN < Mmax_i, Mmin_i < MMAX \end{cases}, \quad (7)$$

При решении задачи приведенным методом возможно возникновение мелкомасштабных осцилляций. С целью получения монотонного решения применим схему сглаживания:

$$U_i^{sm} = U_i + \beta_{i+\frac{1}{2}}(U_{i+1} - U_i) + \beta_{i-\frac{1}{2}}(U_i - U_{i-1}),$$

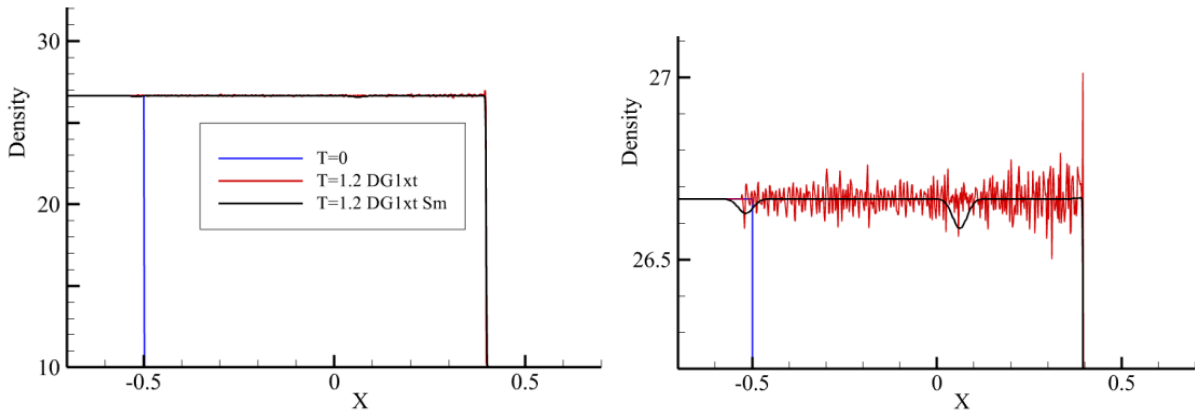
$$\beta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{B_{i+1} + 2B_i + B_{i-1}}{4},$$

$$B_i = \frac{(C_i + C_{i+1}) |\rho_{i+1} - \rho_i| \Delta t}{2 \rho_i \Delta x},$$

$$C_i = \sqrt{\frac{\gamma p_i}{\rho_i}}.$$

## 2. Численные эксперименты

В работе проведена серия расчётов прохождения ударных волн с различными числами Маха от  $M = 2$  до  $M = 10$  по однородному фону. На рис. 2 представлены результаты расчета ударной волны с числом Маха  $M = 2$  (задача 1) на момент времени  $T = 1, 2$ : синяя линия – начальное положение ударной волны, красная линия – решение модифицированным РМГ без усреднения.



**Рис. 2.** Профили плотностей в задаче 1 о прохождении ударной волны с числом Маха  $M = 2$ , слева – в обычном масштабе, справа – при сильном увеличении

При численном моделировании проходящих ударных волн различной интенсивности до числа Маха  $M = 10$ , также как и для  $M = 2$  (рис. 2) наблюдалось наличие

мелкомасштабных осцилляций. Черная линия – решение модифицированным РМГ с усреднением (8). Как видно из рис. 2, применение процедуры усреднения (8) полностью гасит нефизичные осцилляции и позволяет получить четкий профиль ударной волны с наличием небольших энтропийных следов.

В качестве тестовой задачи, на которой проводилось исследование порядка точности метода, использовали задачу о прохождении простой волны, в которой энтропия  $\frac{p}{\rho^\gamma}$  и инвариант Римана  $R^+ = u + \frac{2}{\gamma - 1}$  являются постоянными (задача 2). Вычисления проводились до момента времени  $t = 0.07$  пока газодинамические функции (плотность, давление, скорость) сохраняют гладкость. При решении данной задачи использовалось усреднение (8). Зная аналитическое решение задачи [4], для получения порядка точности метода, достаточно провести два численных расчета с шагами  $h$  и  $h/3$ . Значения порядков точности метода вычислялись локально в каждой ячейке по правилу Рунге.

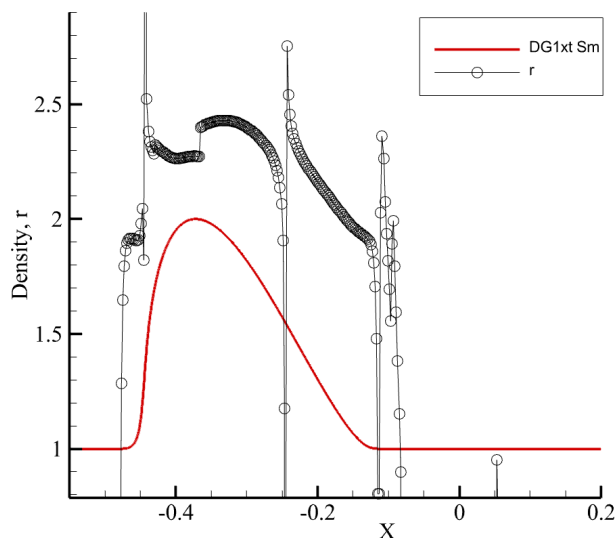


Рис. 3. Профиль плотности в задаче 2 о прохождении простой волны и локальные порядки точности метода

Как видно из рис. 3, использование осреднения такого вида позволяет сохранить повышенный порядок точности метода, не понижая его до первого, как при использовании лимитирующих функций.

## Литература

1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems // Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations. Lecture Notes in Mathematics. Cetraro: Springer, 1997. P. 150–268.
2. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник. 1959. Т. 47, № 3. С. 271–306.
3. Краснов М.М. [и др.]. Обобщение метода Годунова, использующее кусочно-полиномиальные аппроксимации // Труды XVI Международной

конференции «Супервычисления и математическое моделирование» / под ред. Р. М. Шагалиева. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ». 2017. С. 168–183.

4. Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Тишкин В. Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Препринт ИПМ № 34. Москва, 2012 г.

MSC 65M22

## On the accuracy of the modified Godunov method with discontinuous time-dependent basis functions

I.D. Kochurova<sup>1</sup>, M.E. Ladonkina<sup>1,2</sup>, V.F. Tishkin<sup>2</sup>

MIPT<sup>1</sup>, Keldysh Institute of Applied Mathematics, KIAM<sup>2</sup>

*Abstract:* The paper explores the modification of the Godunov method using discontinuous basis functions. Instead of applying the traditional procedure, these basis functions are used, which adapt to the solution of the problem. In case of a violation of the entropy inequality in a cell, the original method is locally translated into a first-order method on a grid that has been halved. The paper shows that this method can be used without limiting functions when solving problems that contain strong shock waves. The accuracy of the method is investigated by solving a problem involving a simple wave, until the gas dynamic functions become smooth.

*Keywords:* the Godunov method with discontinuous basis functions, Euler's equations, the Godunov method, shock waves.

### References

1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems // Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations. Lecture Notes in Mathematics. Cetraro: Springer, 1997. P. 150–268.
2. Godunov S.K. The difference method of numerical calculation Discontinuous solutions to hydrodynamic equations // Mat. collection of materials. 1959. V. 47, № 3. P. 271–306.
3. Krasnov M.M. [и др.]. .]. A generalization of the Godunov method based on piecewise polynomial approximations // Proceedings of the XVI International Conference "Supercomputations and Mathematical Modeling" / edited by R. M. Shagaliev. Sarov: FSUE «RFNC- VNIIEF». 2017. P. 168–183.
4. Ladonkina M.E., Neklyudova O.A., Tishkin V. F. Investigation of the Limiter Effect on the Order of Accuracy of the Solution by the Discontinuous Galerkin Method //IPM Preprint No. 34. Moscow, 2012.

УДК 519.65; 517.521

# Приближение гёльдеровых функций их коэффициентами Фурье для гармонически модулированного аргумента

Кузьмичев Н.Д.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

*Аннотация:* В работе приводится доказательство теоремы, согласно которой любую функцию, принадлежащую классу Гёльдера  $C^\alpha(G)$ , можно аппроксимировать с любой наперед заданной точностью конечной суммой её коэффициентов Фурье для гармонически модулированного аргумента.

*Ключевые слова:* класс Гёльдера, гармонически модулированный аргумент, зависимости коэффициентов Фурье, аппроксимация функции.

## 1. Введение

Во многих прикладных задачах необходимо иметь в своем арсенале не только исследуемую зависимость, но и её производные. Например, в экспериментальной физике и радиотехнике [1]. Часто на эксперименте измеряют зависимости гармоник исследуемой физической характеристики при одновременном статическом и гармоническом воздействиях на изучаемый объект. В этом случае возникает задача восстановления изучаемой характеристики из ее гармоник. Во многих задачах изучаемая зависимость является нелинейной и имеет особенности, тогда в сигнале отклика имеется много гармоник. На этот случай разработаны основы метода модуляционного Фурье-анализа (МФА) [2–6] с анализом корректности задачи восстановления. Идеи и методы МФА появились давно [1], получили свое развитие в работах [2–6] и используются на практике. Ряд положений метода МФА требуют расширения на более широкий класс функций. В работе приводится теорема обобщающая применение МФА для функций принадлежащих классу Гёльдера-Липшица.

## 2. Теорема об аппроксимации функции, принадлежащей классу Гёльдера-Липшица её коэффициентами Фурье

**Теорема 1.** Любую функцию  $f(y)$ , принадлежащую классу Гёльдера-Липшица  $C^\alpha$ , на некотором множестве  $G$  можно аппроксимировать с любой наперед заданной точностью следующей суммой коэффициентов её ряда Фурье для гармонически модулированного аргумента  $y = x + h \cos t$

$$\left| \frac{A_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^N (-1)^n A_{2n}(x) - f(x) \right| < \varepsilon.$$

Здесь  $h \leq \frac{(b-a)}{2}$ ,  $h$  – амплитуда модуляции,  $t \in [-\pi, \pi]$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $y \in [a-h, b+h] = G$  и  $A_m(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos t) \cos(mt) dt$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Будем считать, что функция  $f(y)$  принадлежит классу Гёльдера-Липшица [7] на некотором множестве  $G$ :  $f(y) \in C^\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ). Аргумент  $y$  заставим изменяться по гармоническому закону  $y(t) = x + h \cos t$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$ . Тогда, если  $x \in [a, b]$ , то  $y \in G = [a - h, b + h]$ . Здесь  $h$  – амплитуда модуляции. Суперпозиция функций  $f(y(t))$  удовлетворяет условию:  $f(-\pi) = f(\pi)$  для любых  $x \in [a, b]$ . Из вышеотмеченного следует, что ряд Фурье функции  $f(x + h \cos t)$  сходится равномерно для любых  $x \in [a, b]$  и  $t \in [-\pi, \pi]$  [7–9], т.е.

$$f(x + h \cos t) = \frac{A_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_{2n}(x) \cos(nt).$$

В данной формуле положим  $t = \frac{\pi}{2}$ , получим:

$$f(x) = \frac{A_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_{2n}(x). \quad (1)$$

Действительно. Рассмотрим следующую сумму, составленную из коэффициентов Фурье

$$A_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + h \cos t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x + h \cos t) \cos(nt) dt,$$

$$f_N(x) = \frac{A_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^N (-1)^n A_{2n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + h \cos t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N (-1)^n \cos(2nt) \right] dt. \quad (2)$$

Подынтегральную сумму (2), состоящую из косинусов, просуммируем:

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x + h \cos t) \frac{\sin \left[ (2N + 1) \left( t + \frac{\pi}{2} \right) \right]}{\sin \left( t + \frac{\pi}{2} \right)} dt. \quad (3)$$

Введем новую переменную  $z = t + \frac{\pi}{2}$  и, в силу периодичности подынтегрального выражения, сместим пределы интегрирования (3):

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x + h \sin z) \frac{\sin((2N + 1)z)}{\sin z} dz. \quad (4)$$

Рассмотрим оценку модуля разности  $|f_N(x) - f(x)| = R_N$ . Учитывая (4) получим:

$$f_N(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [f(x + h \sin z) - f(x)] \frac{\sin((2N + 1)z)}{\sin z} dz. \quad (5)$$

Область интегрирования интеграла (5)  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  разобьем на три области:  $\left[-\frac{\pi}{2}, -\delta\right]$ ,  $[-\delta, \delta]$  и  $\left[\delta, \frac{\pi}{2}\right]$ , выделяя особую точку  $z = 0$  [7, 8]. Для оценки остатка  $R_N$  выберем произвольное число  $\varepsilon > 0$  и по нему  $\delta > 0$  так, чтобы выполнялось неравенство:



$\frac{M}{\alpha} h^\alpha \delta^\alpha < \frac{\varepsilon}{3}$ . Оценим по модулю второй интеграл по области  $[-\delta, \delta]$  в указанной сумме:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} [f(x + h \sin z) - f(x)] \frac{\sin((2N+1)z)}{\sin z} dz \right| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} |f(x + h \sin z) - f(x)| \left| \frac{\sin((2N+1)z)}{\sin z} \right| dz. \quad (6)$$

В силу того, что  $f(x) \in C^\alpha$  следует существование  $M > 0$  и выполнение неравенства:

$$|f(x + h \sin z) - f(x)| \leq M |h \sin z|^\alpha. \quad (7)$$

Учитывая (7), имеем:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} |f(x + h \sin z) - f(x)| \left| \frac{\sin((2N+1)z)}{\sin z} \right| dz < M h^\alpha \int_0^{\delta} z^{\alpha-1} dz = \frac{M}{\alpha} h^\alpha \delta^\alpha.$$

Поскольку  $\delta$  выбрано из условия  $\frac{M}{\alpha} h^\alpha \delta^\alpha < \frac{\varepsilon}{3}$ , в итоге получим:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} [f(x + h \sin z) - f(x)] \frac{\sin((2N+1)z)}{\sin z} dz \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (8)$$

Первый и третий интегралы разбитого на три интеграла (5) стремятся к нулю при  $N \rightarrow \infty$  в силу замкнутости тригонометрической системы [7–9]. Для них можно указать такие номера  $N_1$  и  $N_2$ , что для  $N > N_1, N_2$  каждый из интегралов по модулю будет меньше  $\frac{\varepsilon}{3}$ . В итоге мы получим, что  $|f_N(x) - f(x)| = R_N < \varepsilon$ .

Перейдя к переменной  $t$  имеем неравенство для любых  $x \in [a, b]$ :

$$R_N = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x + h \cos t) - f(x)] \frac{\sin \left[ (2N+1) \left( t + \frac{\pi}{2} \right) \right]}{\sin \left( t + \frac{\pi}{2} \right)} dt \right| < \varepsilon. \quad (9)$$

Другими словами, мы получили, что любую функцию  $f$ , принадлежащую классу Гёльдера-Липшица ( $f(y) \in C^\alpha(G)$ ), можно аппроксимировать с любой наперёд заданной точностью следующей конечной суммой зависимостей от  $x$  коэффициентов её ряда Фурье:

$$\left| \frac{A_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^N (-1)^n A_{2n}(x) - f(x) \right| < \varepsilon.$$

Напомним, что  $x \in [a, b], y \in [a-h, b+h] = G$ .

Доказательство завершено.

**Замечание 1.** Теорему 1 можно обобщить и на кусочно-гёльдеровы функции [7–9], применяя вышеописанный метод доказательства для каждого куса гладкости функции и рассматривая пределы справа и слева в точках разрыва функции.

## Литература

1. Солимар Л. Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение. М.: Мир, 1974. 430 с.
2. Кузьмичев Н.Д. Поведение намагниченности поликристаллических образцов  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$  в слабых магнитных полях // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17, №7. С. 56 – 60.
3. Кузьмичев Н.Д. Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: Анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников // ЖТФ. 1994. Т. 64, № 12. С. 63 – 74.
4. Кузьмичев Н.Д. Применение рядов Тейлора-Фурье для численного и экспериментального определения производных изучаемой зависимости // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 1. С. 70 – 80.
5. Кузьмичев Н.Д. Оценки ошибок модуляционного восстановления функции отклика и ее производных // ЖТФ. 1997. Т. 67, № 8. С. 124 – 127.
6. Кузьмичев Н.Д. Применение метода модуляционного Фурье-анализа для задачи восстановления производных // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 1. С. 44 – 59.
7. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Под. Ред. А.Н. Тихонова. Математический анализ. Продолжение курса. М.: Изд-во МГУ, 1987. 358 с.
8. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: Государственное изд-во физ. мат. литературы, 1961. 936 с.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1989. 624 с.

MSC 41A05; 42A10

## Approximation of helder functions by its Fourier coefficients for a harmonically modulated argument

N.D. Kuzmichev

National Research Mordovian State University

*Abstract:* The paper provides a proof of the theorem according to which any function belonging to the Helder class  $C^\alpha(G)$  can be approximated with any predetermined accuracy by a finite sum of its Fourier coefficients for a harmonically modulated argument.

*Keywords:* Helder class, harmonically modulated argument, dependences of Fourier coefficients, approximation of function.

### References

1. Solymar L. Tunneling effect in superconductors and its application. Mir Publ., Moscow, 1974. 430 p.
2. Kuzmichev N.D. Behavior of the magnetization of polycrystalline YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7-x</sub> samples in weak magnetic fields // Letters to ZhTF. 1991. V. 17, No. 7. P. 56–60.
3. Kuzmichev N.D. Hysteresis magnetization and generation of harmonics by magnetic materials: Analysis of the spectrum of magnetization harmonics on the example of high-temperature superconductors // ZhTF. 1994. V. 64, No. 12. P. 63 – 74.
4. Kuzmichev N.D. Application of the Taylor-Fourier series for the numerical and experimental determination of the derivatives of the dependence under study // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2011. Vol. 13, No 1. P. 70 – 80.
5. Kuzmichev N.D. Estimates of errors in the modulation recovery of the response function and its derivatives // ZhTF. 1997. 37, No. 7. P. 124 – 127.
6. Kuzmichev N.D. Application of the Fourier Modulation Analysis Method to the Problem of Derivatives Recovery // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2024. Vol. 26, No 1. P. 44 – 59.
7. Ilyin V.A., Sadovnichy V.A., Sendov B.Kh. Mathematical analysis. Continuation of the course, Moscow State University Publ., 1987. 358 p.
8. Bari N.K. Trigonometric series. M.: State Publishing House of Physics. mat. literature, 1961. 936 p.
9. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. M.: Nauka, 1989. 624 p.

УДК 519.63

## Сравнительный анализ некоторых итерационных процессов для реализации полностью консервативных разностных схем для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера

Ладонкина М.Е.<sup>1,2</sup>, Повещенко Ю.А.<sup>1,2</sup>, Чжан Х.<sup>1,2</sup>

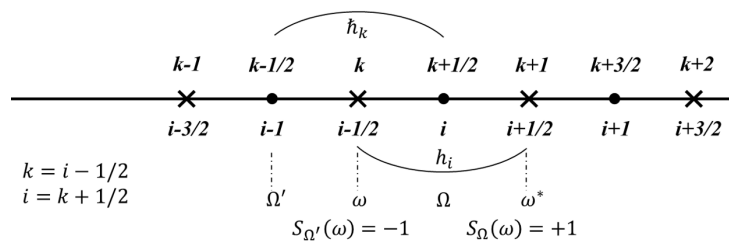
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН<sup>1</sup>, МФТИ<sup>2</sup>

*Аннотация:* В итерационных алгоритмах для полностью консервативных разностных схем (ПКРС) для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера разработаны новые методы выбора адаптивной искусственной вязкости (АИВ), применяемые как в явных итерационных процессах, так и в методе отдельных прогонок. Проведен их сравнительный анализ на примере расчётов задачи Сода.

*Ключевые слова:* полностью консервативные разностные схемы, метод опорных операторов, газовая динамика, задача Сода.

### 1. Полностью консервативная разностная схема

В предыдущей работе [1] численно исследовались газодинамические течения идеального газа в эйлеровых переменных, моделируемые полностью консервативными разностными схемами (ПКРС) [2-6]. На рис. 1 представлена соответствующая разностная сетка, где  $\omega$  – узлы разностной сетки, а  $\Omega$  – ячейки. Термодинамические величины  $\rho$ ,  $\varepsilon$ ,  $P$  и также внутренняя энергия  $E = \rho\varepsilon$  относятся к узлам  $\omega$ . Будем также относить скорость  $\vec{u}$ , объём  $v$  и приузловую массу  $m = \rho v$  к узлам  $\omega$ , а объём  $V$  – к ячейкам.



**Рис. 1.** Разностная сетка.

Очевидно, что

$$v_\omega = \tilde{h}_k = \frac{h_{k+1/2} + h_{k-1/2}}{2} = \frac{h_i + h_{i-1}}{2}, \quad V_\Omega = h_i, \quad \rho_\omega = \frac{m_\omega}{v_\omega} = \rho_k.$$

Выпишем полностью консервативную разностную схему (ПКРС) в переменных

Эйлера [6]:

$$m_t = -\nu DIN_D \vec{\mu}_D^{\sim} \quad (1)$$

$$(mu)_t = -\nu GRAD_\sigma \pi^{\sim} - \nu DIT_D(\vec{\mu}_D^{\sim} \cdot \vec{u}_D^{\sim}) \quad (2)$$

$$(m\varepsilon)_t = -\frac{1}{2} \sum_{\Omega(\omega)} (\pi^{\sim} VDIV_\sigma \vec{u}^{\sim})_\Omega - \nu DIN_D(\vec{\mu}_{ED}^{\sim} + \vec{\chi}_D^{\sim}) \quad (3)$$

$$(m \frac{\vec{u}^2}{2})_t = -\nu(u^{\sim}, GRAD_\sigma \pi^{\sim}) - \nu DIN_D(\vec{\mu}_D^{\sim} \frac{\vec{u}_D^2}{2}) \quad (4)$$

Здесь величины обозначим следующим образом:

$$\vec{\mu} = \rho \vec{u}, \quad \vec{\mu}_E = \varepsilon \vec{\mu} = E \vec{u}, \quad E = \rho \varepsilon, \quad \rho^{\sim} = \rho^{(\psi_\rho)}, \quad \psi_\rho = const;$$

$$M_D^{\sim} = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (\rho_\omega u_\omega)^{(0.5)}, \quad \mu_D^{\sim} = M_D^{\sim} - \nu^{\sim} GRAN_D \rho^{\sim};$$

$$\pi_\Omega^{\sim} = P_\Omega^{(0.5)} - v_u^{\sim} DIV_\sigma(\rho^{\sim} u^{(\psi_u)}), \quad P_\Omega = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} P_\omega, \quad \psi_u = const;$$

$$\vec{\chi}_D^{\sim} = \{\vec{\chi}_{\varepsilon D}^{\sim} | \vec{\chi}_{ED}^{\sim}\}, \quad \vec{\chi}_{\varepsilon D}^{\sim} = -k_\varepsilon GRAN_D \hat{\varepsilon}, \quad \vec{\chi}_{ED}^{\sim} = -k_E GRAN_D \hat{E};$$

$$M_{ED}^{\sim} = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (E_\omega u_\omega)^{(0.5)}, \quad \mu_{ED}^{\sim} = M_{ED}^{\sim} - \nu_E^{\sim} GRAN_D(\rho^{\sim} \varepsilon^{(\psi_\varepsilon)}), \quad \psi_\varepsilon = const.$$

Используемые обозначения аналогичны работе [6].

## 2. Метод вычисления ПКРС

В предыдущей работе [6] для реализации нелинейной неявной ПКРС применялся метод явных итераций. На каждой явной итерации использовался внутренний итерационный процесс для выбора адаптивной искусственной вязкости (АИВ). При решении тестовой задачи Сода [7] были получены удовлетворительные результаты, однако, процессорное время, потраченное на итерационные процессы оказалось значительным. В данной работе для оптимизации вычислительного процесса реализации ПКРС и выбора АИВ предложен метод совместных итераций, одновременно уточняющих итерационное разностное решение и корректирующих АИВ. Также наряду с явным итерационным процессом (реализующим неявную ПКРС) применялся и метод отдельных прогонок для разностных балансов (1)-(3).

Для задачи Сода проведены численные эксперименты, представленные на рис. 2 и рис. 3. Из графиков следует, что применение новых итерационных методик существенно улучшает разностные решения и сокращает процессорное время, затрачиваемое на расчёты.

На рис. 2 представлены профили плотностей в задаче Сода для аналитического решения. Первый профиль получен новым разрабатываемым методом прогонки (совместными итерациями с одновременной коррекцией АИВ) – линия Метод 1. Вторым профилем (линия Метод 2) – ранее предложенным методом явных итераций (с внутренним итерационным процессом АИВ без её оптимизации во внутренних структурах волны разрежения, ударной волны и контактного разрыва).

Аналогичная кривая (Метод 1), полученная новым разрабатываемым методом, представлена на рис. 3, сравнение приведено с методом явных итераций, выполненным с оптимизацией выбора АИВ в структурах волны разрежения, ударной волны и контактного разрыва – линия Метод 3.



Рис. 2. Профили плотностей в задаче Сода: Метод 1 – разрабатываемый метод, Метод 2 – ранее используемый

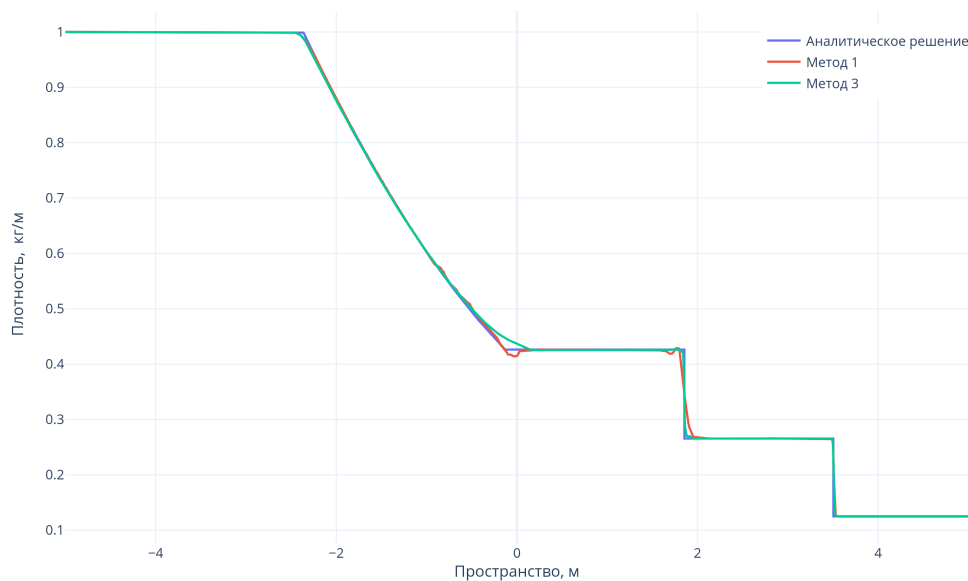


Рис. 3. Профили плотностей в задаче Сода: Метод 1 – разрабатываемый метод, Метод 3 – ранее используемый

## Литература

1. Ladonkina M.E., Poveschenko Y.A., Zhang H. Application of viscous-filled nodal completely conservative difference schemes to the gas dynamics equations in Euler variables on the Soda problem [Electronic resource]. Proceedings of the XVI International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling". (Saransk, July 17-20, 2023). Saransk: SVMO Publ, 2023. P. 129-134. Available at: <https://conf.svmo.ru/files/2023/papers/paper19.pdf>. - Date of access: 04.07.2024.

2. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. Москва, наука, 1980.
3. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики при наличии источников массы // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша, АН СССР. 1982. № 160.
4. Повещенко Ю.А., Ладонкина М.Е., Подрыга В.О., Рагимли О.Р., Шарова Ю.С. Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша АН. 2019. № 14. 23 с.
5. Rahimly O., Podryga V., Poveshchenko Y., Rahimly P., Sharova Y. Two-Layer Completely Conservative Difference Scheme of Gas Dynamics in Eulerian Variables with Adaptive Regularization of Solution. In: Lirkov I., Margenov S. (eds) Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2019. Lecture Notes in Computer Science, 2020. Vol 11958. Springer.
6. Ладонкина М.Е., Повещенко Ю.А., Рагимли О.Р., Чжан Х. Теоретическое исследование устойчивости узловых полностью консервативных разностных схем с вязким наполнением для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 3. С. 317–330.
7. Sod G.A. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws // IJournal of Computational Physics. Elsevier. 1978. 27, 1. P. 1–31.

MSC 65M22

## Comparative analysis of several iterative processes for realisation of fully conservative difference schemes for gas dynamics equations in Euler variables

M.E. Ladonkina<sup>1,2</sup>, Yu.A. Poveschenko<sup>1,2</sup>, H. Zhang<sup>1,2</sup>

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS<sup>1</sup>,  
Moscow Institute of Physics and Technology<sup>2</sup>

*Abstract:* In iterative algorithms for fully conservative difference schemes (FCDS) for the equations of gas dynamics in Euler variables, new methods of selecting adaptive artificial viscosity (AAV) applied in the tridiagonal matrix algorithm on the example of calculation of the Sod problem as in explicit iterative processes are developed.

*Keywords:* completely conservative difference scheme, method of reference operators, gas dynamics, Sod problem.

### References

1. Ladonkina M.E., Poveschenko Y.A., Zhang H. Application of viscous-filled nodal completely conservative difference schemes to the gas dynamics equations in Euler variables on the Soda problem [Electronic resource]. Proceedings of the XVI International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling". (Saransk, July 17-20, 2023). Saransk: SVMO Publ, 2023. P. 129-134. Available at: <https://conf.svmo.ru/files/2023/papers/paper19.pdf>. - Date of access: 04.07.2024.
2. Samarsky A.A., Popov Yu.P. Difference methods for solving problems of gas dynamics. Moscow, Science, 1980.
3. Koldoba A.V., Poveschenko Yu.A. Completely conservative difference schemes for gas dynamics equations in the presence of mass sources // Preprints of the KIAM, ANSSR. 1982. № 160.
4. Poveschenko Yu.A., Ladonkina M.E., Podryga V.O., Rahimli O.R., Sharova Yu.S. On one two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Euler variables with adaptive regularization // Preprints of the KIAM, AN. 2019. № 14. 23 p.
5. Rahimly O., Podryga V., Poveschenko Y., Rahimly P., Sharova Y. Two-Layer Completely Conservative Difference Scheme of Gas Dynamics in Eulerian Variables with Adaptive Regularization of Solution. In: Lirkov I., Margenov S. (eds) Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2019. Lecture Notes in Computer Science. 2020. Vol. 11958. Springer.
6. Ladonkina M.E., Poveschenko Yu.A., Rahimly O.R., Zhang H. Theoretical study of stability of nodal completely conservative difference schemes with viscous filling for gas dynamics equations in Euler variables // Zhurnal SVMO. 2022. Vol. 24, № 3. P. 31-330.



7. Sod G.A. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws // IJournal of Computational Physics. Elsevier. 1978. Vol. 27, № 1. P. 1–31.

УДК 517.977.5

## Разработка программного комплекса для решения задач оптимального управления\*

Лутошкин И.В., Чекмарев А.Г.

Ульяновский государственный университет

*Аннотация:* В статье проведен анализ существующих подходов к разработке программных решений, предназначенных для решения задач оптимального управления (ОУ). Описывается метод параметризации – численный метод решения задач ОУ, позволяющий на основе единого подхода решать задачи ОУ достаточно общего вида, в том числе с запаздыванием как по фазовым переменным, так и по управлению. Предлагается концепция разработки программного комплекса, реализующего метод параметризации.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, численные методы, метод параметризации, программный комплекс.

### 1. Введение

Задачи моделирования управляемых нелинейных динамических систем возникают в разных областях науки, техники и технологии – машиностроении, робототехнике, авиации, химической промышленности, медицине, экономике и др. Наиболее известными и широко применяемыми пакетами программ общего назначения являются Mathlab, Maple, GNU Octave, Mathematica, Scilab, SCADE Suite, OpenModelica, Julia и другие. Часть пакетов базируется на специализированных высокоуровневых мультипарадигменных интерпретируемых «полных» языках программирования, ориентированных на математические вычисления. Другие пакеты (OpenModelica) реализуют декларативные компилируемые объектно-ориентированные языки, поддерживающие прежде всего компонентно-ориентированную парадигму проектирования. Альтернативный подход заключается в расширении существующих языков общего назначения специализированными библиотеками, примером может служить Python с библиотеками SciPy, NumPy и др.

Для моделирования динамических систем, формулируемых в терминах теории оптимального управления (ОУ) [1,2], создан ряд методов и специализированных инструментов численного решения задач ОУ, реализованных как приложения, библиотеки или дополнения к существующим пакетам общего назначения: CasADi, PSOPT, PROPT, GPOPS, ICLOCS2, ACADO, acados, GPOPS-II, CGPOPS, GEKKO, MEOPT, OPTCON и др. Большая часть существующих инструментов решения задач ОУ либо являются библиотеками (например, CGPOPS), либо реализуют eDSL (например, GEKKO, PROPT) и базируются на полных языках общего назначения (Python, Matlab, Modelica), наследуя синтаксические решения и парадигмы, что требует от пользователя соответствующих знаний и значительно повышает уровень входа. Кроме этого, постоянно увеличивающаяся количественная сложность состава пакетов программ общего назначения приводит к усложнению процесса обучения. Таким образом, создание простых,

---

\*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда N 24-28-00542, <https://rscf.ru/project/24-28-00542/>.

удобных и эффективных предметно-ориентированных инструментов является актуальной задачей. Далее рассматривается метод параметризации [3, 4], позволяющий на основе единого концептуального подхода решать задачи ОУ достаточно общего вида.

## 2. Метод параметризации

Рассмотрим задачу оптимального управления в виде:

$$J = g(x(T)) \quad (1)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \psi \left( t, x(t), u(t), \int_{t_0}^t f(t, s, x(s), u(s)) ds \right), \\ x(t_0) = x^0; \end{cases} \quad (2)$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

$x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^r$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $U$  замкнуто в  $\mathbb{R}^r$ . Функции  $\psi : \mathbb{R}^{1+n+r+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^{2+n+r} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывны и непрерывно-дифференцируемы.

Введем разбиение отрезка  $[t_0; T]$  :

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \equiv T; \quad (4)$$

и на каждом отрезке разбиения определим структуру управления:

$$u_\mu(t) = u_\mu^k(t; v_\mu^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad \mu = \overline{1, r}. \quad (5)$$

Тогда управление зависит от параметров  $v_\mu^k \in R^d$ . Введем

$$w^k = (t_k, v^k) \equiv (w_{0,0}^k, w_{1,1}^k, \dots, w_{r,d}^k).$$

В этом случае решение задачи (2) зависит от введенных параметров:

$$x(t) = z(t; v^1, t_1, \dots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k. \quad (6)$$

Определим функцию

$$\varphi(w^1, \dots, w^N) = g(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N)). \quad (7)$$

Таким образом, получаем задачу нелинейного программирования (НП):

$$\varphi(w^1, \dots, w^N) \rightarrow \min \quad \text{при ограничениях}$$

$$W = \{w^k : w_0^{k-1} \leq w_0^k, u^k(t; v^k) \in U, w_0^{k-1} \leq t \leq w_0^k, k = \overline{1, N}; \\ w_{0,0}^0 = t_0, w_{0,0}^N \equiv T \leq T^*\}. \quad (8)$$

Обозначим  $q(t) = \int_{t_0}^t f(t, s, x(s), u(s)) ds$ ,  $h(t, s, x, u) = \frac{\partial f(t, s, x, u)}{\partial t}$ .

Для применения методов первого порядка к задаче (8) необходимо вычисление первых производных функции  $\varphi(w^1, \dots, w^N)$ . Поскольку данная функция задана опосредованно, то вычисление производных нетривиально.

Для решения этой проблемы введем

$$H(t, x, q, u, p_x, p_q) = \langle p_x(t), \psi(t, x, u, q) \rangle + \langle p_q(t), f(t, t, x, u) \rangle + \int_t^T \langle p_q(s), h(s, t, x, u) \rangle ds. \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_x(t) = & - \left[ \frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial x} \right]^T p_x(t) - \\ & - \left[ \frac{\partial f(t, t, x(t), u(t))}{\partial x} \right]^T p_q(t) - \int_t^T \left[ \frac{\partial h(s, t, x(t), u(t))}{\partial x} \right]^T p_q(s) ds; \quad (10) \end{aligned}$$

$$\dot{p}_q(t) = - \left[ \frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial q} \right]^T p_x(t). \quad (11)$$

$$p_x(T) = \frac{\partial g(x(T))}{\partial x}, \quad p_q(T) = 0. \quad (12)$$

**Теорема 1.** Пусть функции  $f, g, \psi$ , входящие в постановку задачи (1)-(2), непрерывно дифференцируемы по всем переменным. Тогда для вычисления первых производных целевого функционала задачи (8) верны формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} = & H(t_k, x(t_k), q(t_k), u(t_k - 0), p_x(t_k), p_q(t_k)) - \\ & - H(t_k, x(t_k), q(t_k), u(t_k + 0), p_x(t_k), p_q(t_k)); \quad (13) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial T} = H(T, x(T), q(T), u(T), p_x(T), p_q(T)); \quad (14)$$

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(\tau, x(\tau), q(\tau), u(\tau), p_x(\tau), p_q(\tau))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(\tau, v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} d\tau. \quad (15)$$

Таким образом, Теорема 1 дает алгоритм вычисления производных в задаче НП (8). Аналогичные теоремы удалось получить в задачах ОУ с точечным запаздыванием, в задачах ОУ с ОДУ без запаздывания. Реализация алгоритмов, реализующих метод параметризации для задач ОУ как с запаздыванием, так и без запаздывания, проводится в рамках программного комплекса.

### 3. Концепция программного комплекса

При работе с программным комплексом вводятся роль разработчика (исследователя) модели и роль пользователя модели. Различие ролей определяется набором используемых функций. Разработчик модели описывает: задачу ОУ с ОДУ, с точечным и/или распределенным запаздыванием как в фазовых, так и в управляющих переменных; параметры модели; функционал задачи в терминальной форме;

частные производные функций, входящих в исходную постановку задачи ОУ. В ходе решения задачи ОУ пользователь может: менять параметризацию управляющих функций, тем самым изменяя вид обобщенного сплайна и соответствующую задачу НП; выбирать сценарий решения задачи НП; обрабатывать отчеты, полученные при решении задачи.

В методе параметризации независимо можно применять различные методы решения задачи НП и задачи Коши, так как дискретная схема решения задачи Коши разделена с переменными задачи НП. Это позволяет в структуре ПО использовать не связанные библиотеки: для решения задач НП и для решения задач Коши. Поскольку вычисление производных целевой функции в получаемой задаче НП представляет собой отдельный алгоритм, в рамках программного комплекса реализуется несколько подходов к реализации этого алгоритма: на основе решения задач Коши для прямой и сопряженной систем и последующего численного интегрирования; аппроксимация на основе конечных разностей; комбинация разностного дифференцирования и решения задач Коши для прямой и сопряженной систем.

Таким образом, реализуется единый подход к решению задач ОУ достаточно общего вида.

## Литература

1. Lutoshkin I.V., Rybina M.S. Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 264–273. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-264-273>, EDN: BTQTSM
2. Eichmeir P., Nachbagauer K., Lauf T. et al. Time-Optimal Control of Dynamic Systems Regarding Final Constraints // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 16, № 3. article ID: 031003. 12 p. DOI: 10.1115/1.404933476.
3. Горбунов В.К. Метод параметризации задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1979. Т. 19, № 2. С. 292–303.
4. Лутошкин И. В. Оптимизация нелинейных систем с интегро-дифференциальными связями методом параметризации // Известия Иркутского государственного университета. Сер. "Математика". 2011. Т. 4, № 1. С. 44–56.

MSC 49M99

## Development of a software package for solving optimal control problems

I.V. Lutoshkin, A.G. Chekmarev

Ulyanovsk State University

*Abstract:* An analysis of existing approaches to the development of software solutions designed to solve OC problems is carried out. The parameterization method is described. It's a numerical method for solving OC problems, including delays in both phase variables and control. A concept for developing a software package that implements the parameterization method is proposed.

*Keywords:* optimal control, numerical methods, parameterization method, software package.

### References

1. Lutoshkin I. V., Rybina M. S. Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023. V. 23, № 2. P. 264-273. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-264-273>, EDN: BTQTSM
2. Eichmeir P., Nachbagauer K., Lauf T. et al. Time-Optimal Control of Dynamic Systems Regarding Final Constraints // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2021. V. 16, № 3. article ID: 031003. 12 p. DOI: 10.1115/1.404933476.
3. Gorbunov V.K. The parameterization method for optimal control problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1979. V. 19, № 2. P. 292–303.
4. Lutoshkin I.V. The parameterization method for optimizing the systems which have integro-differential equations // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2011. V. 4, Iss. 1. P. 44–56 (in Russian). EDN: NQWBZH

УДК 51-72:004.942:532.529:544.77

## Моделирование периодического режима работы установок электроцентробежных насосов с учетом разгазирования нефти\*

Макеев А.А.<sup>1,2</sup>, Мартынов С.И.<sup>2</sup>

ООО «ЛУКОЙЛ-Инжиниринг», филиал «КогалымНИПИнефть» (Тюмень)<sup>1</sup>,  
Сургутский государственный университет<sup>2</sup>

*Аннотация:* Предлагается модель работы установки электроцентробежного насоса в периодическом режиме с учетом времени восстановления давления в скважине и влияния процесса разгазирования нефти. На основе разработанной модели проведено компьютерное моделирование динамики изменения давления на приеме электроцентробежного насоса и определены параметры, позволяющие прогнозировать переход в аварийный режим работы в результате процесса разгазирования нефти. Результаты проведенного численного моделирования также позволяют оценить влияние процесса дегазации нефти на изменение давления на приеме и насоса и в затрубном пространстве.

*Ключевые слова:* компьютерное моделирование, электроцентробежный насос, периодический режим, оптимизация режима, прогнозирование.

### 1. Актуальность исследования

Одной из ключевых проблем нефтедобывающей отрасли страны является высокая доля низкодебитных месторождений. Можно считать, что рост фонда низкодебитных скважин происходит, в том числе и в результате снижения эффективности применения технологий повышения нефтеотдачи пластов. Отбор жидкости из скважин на таких месторождениях возможен в периодическом режиме эксплуатации, при котором необходимо учитывать время для восстановления давления в пласте. С учетом того, что доля установок электроцентробежных насосов (УЭЦН), применяемых для эксплуатации скважин, ежегодно возрастает, достигая во многих нефтяных компаниях более 90 % [1], такой режим предполагает оптимизацию циклов работы и остановки. Интервалы времени зависят от динамики физико-химических процессов, происходящих как в пласте, так и в межтрубном пространстве вокруг УЭЦН [2]. При этом необходимо учитывать многообразие осложняющих факторов, возникающих при их эксплуатации. К их числу относится и высокое содержание свободного газа в скважинной продукции. Фактор разгазирования нефти влияет на работу системы электроцентробежного оборудования в скважине и приводит к увеличению удельного расхода электроэнергии, снижению ресурса всей установки, и как следствие, к снижению такого технологического показателя, как наработка УЭЦН на отказ. В связи с этим актуальной задачей является разработка верифицированной модели работы УЭЦН с учетом динамики указанных процессов и осложняющих факторов, позволяющей также прогнозировать отказ оборудования и необходимую корректировку оптимальных параметров режима работы УЭЦН в зависимости от

---

\*Работа выполнена в рамках проекта «Моделирование гидродинамических процессов с наночастицами для решения задачи повышения нефтеотдачи пласта», финансируемым департаментом образования и науки ХМАО-Югра.

динамики изменений условий в пласте. В настоящей работе предлагается математическая модель работы УЭЦН с учетом процесса разгазирования нефти в межтрубном пространстве.

## 2. Математическая модель

В работе [3] предложена гидродинамическая модель работы УЭЦН, учитывающая строение скважины и гидродинамические процессы, происходящие в скважине. Однако процесс разгазирования нефти не входит в модель. В настоящей работе предлагается модель, описывающая процессы, происходящие в скважине, с учетом разгазирования нефти. Так же, как и в работе [3] при построении модели периодического режима работы УЭЦН учитывается строение скважины, а именно, наличие межтрубного пространства, занятого слоем нефти высотой  $h_1$  над точкой измерения давления и слоем газа с давлением  $p_1$ . Причем этот слой газа имеет высоту порядка нескольких километров и доходит до поверхности скважины. В затрубное пространство нефть поступает через зону перфорации трубы. Высота слоя нефти от зоны перфорации трубы до точки, в которой происходит измерения давления (на приеме насоса) равна  $h_2$ . Давление нефти в пласте в зоне перфорации трубы равно  $p_2$ . В равновесии должно выполняться условие

$$p_2 = p_1 + \rho_f g(h_1 + h_2) \quad (1)$$

здесь  $\rho_f$  – средняя плотность нефти,  $g$  – ускорение силы тяжести. С учетом разгазирования плотность нефти представляется в виде  $\rho_f = \rho_{f0}(1 - \varphi) + \rho_g\varphi$ . Здесь  $\rho_{f0}$  – истинная плотность нефти,  $\rho_g$  – плотность газа,  $\varphi$  – объемное содержание газа в нефти. В режиме «насос включен» происходит отбор нефти из межтрубного пространства с расходом  $q(1 - \varphi)$ . Этот отбор приводит к понижению уровня нефти  $h_1$  и возникновению потока нефти из пласта в межтрубное пространство через зону перфорации. Объем нефти  $q_1$ , притекающей в затрубное пространство из пласта, находится из закона Дарси в интегральной форме:

$$q_1 = \frac{(p_c - p_2)kS}{\eta l}. \quad (2)$$

Здесь  $k$  – проницаемость пласта,  $S$  – площадь перфорации,  $l$  – характерный размер, на котором происходит перепад давления,  $\eta$  – вязкость нефти,  $p_c$  – давление в пласте в зоне перфорации. При отборе объема  $q_1$  нефти из пласта в зоне перфорации должно происходить его замещение за счет притока из более дальних зон пласта. При этом давление  $p_c$  в зоне перфорации падает и характерное расстояние  $l$  меняется. При выключении УЭЦН происходит восстановление параметров в пласте. Дифференциальное уравнение для функции  $h_1(t)$  составляется из условия, что разность объемного расхода  $q(1 - \varphi)$  и притока  $q_1$  нефти равно скорости изменения ее объема в межтрубном пространстве. С учетом площади поверхности нефть-газ в межтрубном пространстве  $S_1$  это уравнение имеет вид:

$$q(1 - \varphi) - q_1 = -\frac{dh_1(t)}{dt}S_1. \quad (3)$$

Для учета процесса разгазирования нефти необходимо уравнение для изменения объемной фазы газа в нефти. Его можно записать в виде релаксационного уравнения, подразумевая, что имеется равновесное значение объемного содержания газа в нефти



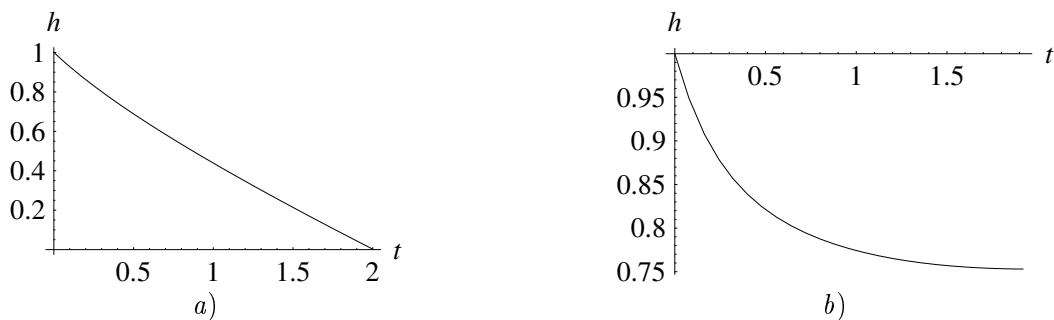
$\varphi_0$ . Будем предполагать, что разгазирование нефти началось в момент включения насоса, что соответствует самому сложному для оптимизации случаю эксплуатации УЭЦН. В начальный момент времени объемное содержание газа в нефти равно нулю. С учетом времени релаксации  $\tau$  процесса выхода на равновесное состояние получаем уравнение

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\varphi - \varphi_0}{\tau}. \quad (4)$$

Изменение давления газа над нефтью в межтрубном пространстве за счет разгазирования нефти не учитывается из-за его большого объема. Кроме того, чрезмерное повышение давления газа в этой области приводит к уменьшению поступления нефти из пласта, что предполагает его поддержание на необходимом уровне. Предполагается так же, что время работы УЭЦН мало по сравнению с характерным временем изменения давления в пласте, что позволяет считать давление  $p_2$  постоянным.

### 3. Результаты моделирования

Полученная система уравнений позволяет получить зависимость изменения уровня нефти в межтрубном пространстве с течением времени и оценить влияние разгазирования нефти на этот процесс. Решение уравнения (3) с учетом уравнения (4) и выражений (1)-(2) находилось численно при различных значениях параметров. Результаты в безразмерном виде представлены на рис. 1. Характерным временем работы УЭЦН является час. Приведенные вычисления проводились при следующих значениях параметров:  $q = 2 \text{ м}^3/\text{ч}$ ,  $k = 4 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2$ ,  $S = 19 \text{ м}^2$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ,  $\eta = 0.54 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $p_{10} = 20 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ,  $p_c = 27 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ,  $\rho_{f0} = 700 \text{ кг/м}^3$ ,  $h_1 = 500 \text{ м}$ ,  $h_2 = 500 \text{ м}$ ,  $\varphi_0 = 0.5$ .



**Рис. 1.** Изменения уровня нефти в режиме УЭЦН «включено»: а) без процесса разгазирования нефти, б) с учетом процесса разгазирования нефти.

Первый график соответствует оптимальному режиму работы УЭЦН в режиме «включено», описанному в работе [3]. Второй график – изменение этого режима при наличии процесса разгазирования нефти. Как видно из второго графика происходит быстрый выход уровня жидкости, а с ним и давления на приеме насоса на постоянное значение. Время работы в этом случае ограничено периодом, соответствующем времени образования газовой фазы с объемным содержанием  $\varphi = 0.25$ , что соответствует переходу работы УЭЦН в аварийный режим.

## **Литература**

1. Muzychuk P.S. Primenenie cifrovyyh instrumentov pri jekspluatácii mehanizirovannogo fonda skvazhin // Inzhenernaja praktika. 2022. № 8. P. 44–46.
2. Zejgman Ju.V., Kolonskih A.V. Optimizacija raboty UJeCN dlja predotvrashhenija obrazovanija oslozhnenij // Neftegazovoe delo. 2005. № 2. P. 1–9.
3. Makeev A. A., Martynov S. I. A Model of Operation of Electric-Centrifugal-Pump Installations in the Periodic Mode// Technical Physics Letters. 2023. Vol. 49. P. 64–66.

MSC 76D07, 76D09, 76D17

## Modeling of periodic operation of electric centrifugal pump installations taking into account oil degassing

A.A. Makeev<sup>1,2</sup>, S.I. Martynov<sup>2</sup>

LLC «LUKOIL-Engineering», branch «KogalymNIPIneft» (Tyumen)<sup>1</sup>,  
Surgut State University<sup>2</sup>

*Abstract:* A model for the operation of an electric centrifugal pump installation in periodic mode is proposed, taking into account the time of pressure recovery in the well and the influence of the oil degassing process. Based on the developed model, computer simulation of the dynamics of pressure changes at the inlet of an electric centrifugal pump was carried out and parameters were determined that make it possible to predict the transition to emergency operation as a result of the process of oil degassing. The results of the numerical modeling also allow us to evaluate the influence of the oil degassing process on the change in pressure at the inlet of the pump and in the annulus.

*Keywords:* computer modeling, electric centrifugal pump, periodic mode, mode optimization, forecasting.

### References

1. Borisov V.E., Yakush S.E. Application of Adaptive Hierarchical Grids to Simulation of Reacting Gas Flows, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2015, vol. 16 (2) (in Russian).  
URL: <http://chemphys.edu.ru/issues/2015-16-2/articles/544/>
2. Zhalnin R.V., Peskova E.E., Stadnichenko O.A., Tishkin V.F. Matematicheskoye modelirovaniye dinamiki mnogokomponentnogo gaza s ispol'zovaniyem WENO skhem na primere piroliza etana // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2016. 18. 3. P. 98-106.
3. Makeev A. A., Martynov S. I. A Model of Operation of Electric-Centrifugal-Pump Installations in the Periodic Mode// Technical Physics Letters, 2023. Vol. 49. P. 64–66.

УДК 519.63

## Экспериментальное исследование маятника с вибрирующей точкой подвеса

Малышев М.В., Кульминский Д.Д.

Научно-технологический Университет «Сириус»

*Аннотация:* В данной работе впервые экспериментально исследована зависимость периода собственных колебаний маятника от вибрации точки подвеса, проходящей по эллиптической траектории. В результате эксперимента показано, что при вибрации 7.6 оборотов по малому эллипсу в секунду, более интенсивной в горизонтальном направлении, период колебаний угла маятника увеличивается на 0.033 сек. по сравнению с собственным периодом маятника, а при вибрации, более интенсивной в вертикальном направлении – уменьшается на 0.033 сек.

*Ключевые слова:* маятник, вибрации, устойчивость.

### 1. Введение

Маятникам на вибрирующем основании посвящено много работ, среди которых можно отметить работу П.Л. Капицы [1], положившую начало вибромеханике. Капица отмечал, что маятниковые часы на вибрирующем основании всегда спешат [2]. Задачу о точности хода маятниковых часов также решал А.П. Маркеев и в своей работе доказал, что при вибрациях точки подвеса часы могут как спешить, так и отставать [3]. Динамика маятника в работе описывалась уравнением (1).

$$J_x \ddot{\phi} = -mgl \sin \phi - ml(\ddot{Z}_0 \sin \phi + \ddot{Y}_0 \cos \phi), \quad (1)$$

где  $m$  – масса маятника,  $l$  – длина от точки подвеса до центра масс маятника,  $l_r$  – приведенная длина маятника,  $\phi$  – угол отклонения от вертикальной оси,  $Z_0$  – отклонение точки подвеса от начала координат по оси  $Z$ ,  $Y_0$  – отклонение точки подвеса от начала координат по оси  $Y$ ,  $J_x$  – момент инерции маятника.

Отстают или спешат маятниковые часы (увеличивается или уменьшается период колебаний маятника) показывает параметр:

$$\alpha = \frac{\langle \dot{Z}_0^2 \rangle - \langle \dot{Y}_0^2 \rangle}{2gl_r} \quad (2)$$

Если  $\alpha > 0$  – часы спешат, если  $\alpha < 0$  – часы отстают.

Также важные условия колебаний:

$$\langle \dot{Z}_0 \dot{Y}_0 \rangle = 0, \\ OO^* \ll l.$$

Скобками ' $\langle \dots \rangle$ ' обозначена операция усреднения значения периодической функции.

Целью данной работы было экспериментальное исследование собственной частоты маятниковых часов в зависимости от вибрации точки подвеса.

Перед экспериментом было проведено компьютерное моделирование, при котором подобраны параметры маятника. Характер движения точки подвеса был выбран исходя из условий: движение по замкнутой траектории в форме эллипса в плоскости колебаний маятника. Изменение размеров полуосей эллипса, которые намного меньше длины маятника, и дает изменение параметра  $\alpha$ :

- 1)  $\alpha > 0$  – вертикальные колебания интенсивнее;
- 2)  $\alpha < 0$  – горизонтальные колебания интенсивнее.

Длина маятника была выбрана 1 метр, масса – 1 кг, размеры полуосей эллипса – 2 и 10 мм.

## 2. Эксперимент

В ходе эксперимента вибрации в точке подвеса совершались роботом ABB IRB 1600, отслеживались вибрации по видеокамере и при помощи лазерного трекера. Колебания самого маятника отслеживались по видеокамере.

В эксперименте с лазерным трекером отражатель был установлен в крепление, расположенное на оси вращения маятника, а в память компьютера записывалось его положение в системе координат трекера с частотой 100 Гц. Установка эксперимента с лазерным трекером представлена на рис. 1.



Рис. 1. Экспериментальная установка для измерения положения точки подвеса маятника с помощью лазерного трекера

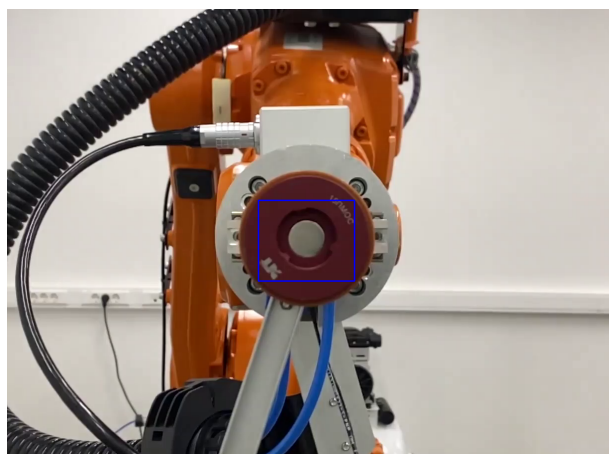


Рис. 2. Кадр изображения видеокамеры для отслеживания положения точки подвеса

На рис. 3 представлен экспериментальный временной ряд колебаний маятника,

В эксперименте с видеокамерой отслеживалось перемещение крепления для отражателя на каждом кадре видео частотой 240 Гц. Алгоритм отслеживания использует открытую библиотеку работы с изображениями и видео OpenCV. Предварительно камера была откалибрована на шахматной доске и были измерены смещения относительно маятника. Изображение с камеры, отслеживающей перемещение точки подвеса представлено на рис. 2.

Частота вибраций определялась максимальной скоростью линейного перемещения схвата робота и составила 7.6 оборотов по эллипсу в секунду. Для лазерного трекера и для камеры было прове-

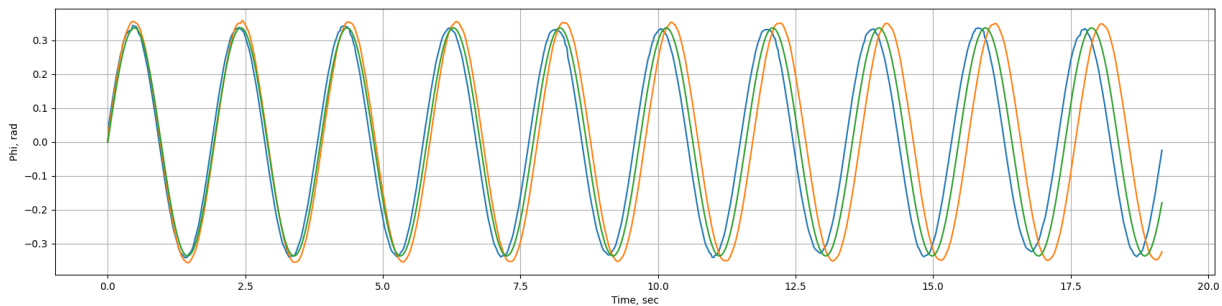


Рис. 3. Экспериментальный временной ряд колебаний угла маятника

полученный при помощи отслеживания угла маятника по видеокамере и демонстрирующий разницу в величине периода колебаний. Зеленому цвету на графике соответствуют колебания без вибраций, синему – при вибрации, более интенсивной в вертикальном направлении, желтому – при вибрации, более интенсивной в горизонтальном направлении.

В обоих экспериментах наблюдалось изменение периода колебаний маятника при изменении ориентации эллипса, по котрому перемещалась точка подвеса, создавая вибрации. Собственный период маятника равен 1.933 сек. Значения периода колебаний маятника и параметра  $\alpha$  из формулы (2) при вибрациях представлены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты измерений

Форма эллипса	$\alpha$	период, сек
вертикальный	0.0056	1.900
горизонтальный	-0.0056	1.966

Условия эксперимента и наблюдаемый результат полностью соответствуют выводам, описанным в статье А.П. Маркеева [3]. В результате эксперимента показано, что при вибрации 7.6 оборотов по малому эллипсу в секунду, более интенсивной в горизонтальном направлении, период колебаний угла маятника увеличивается на 0.033 сек. по сравнению с собственным периодом маятника, а при вибрации, более интенсивной в вертикальном направлении – уменьшается на 0.033 сек.

## Литература

1. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом //Успехи физических наук. 1951. Т. 44, №. 5. С. 7–20.
2. Астрахарчик Г.Е., Астрахарчик Н.А. Исследование маятника Капицы //arXiv preprint arXiv:1103.5981. 2011.
3. Маркеев А.П. К задаче о точности хода маятниковых часов на вибрирующем основании //Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 5. С. 112–123.

MSC 70J35

## Experimental Study of a Pendulum with a Vibrating Pivot Point

M.V. Malyshev, D.D. Kulminskiy  
Sirius University of Science and Technology

*Abstract:* In this work, for the first time, an experimental study of the dependence of the pendulum's natural oscillation period on the vibration of the suspension point, moving along an elliptical trajectory, was conducted. The experiment showed that with a vibration of 7.6 revolutions per second along the small ellipse, which is more intense in the horizontal direction, the oscillation period of the pendulum angle increases by 0.033 seconds compared to the pendulum's natural period. In contrast, with vibration more intense in the vertical direction, the period decreases by 0.033 seconds.

*Keywords:* pendulum, vibrations, stability.

### References

1. Kapitsa P.L. Pendulum with a Vibrating Suspension // Physics-Uspekhi. 1951. Vol. 44, No. 5. P. 7–20.
2. Astrakharchik G.E., Astrakharchik N.A. Study of the Kapitsa Pendulum //arXiv preprint arXiv:1103.5981. 2011.
3. Markeev A. P. On the Accuracy of Pendulum Clock Performance on a Vibrating Base // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid Mechanics. 2018. No. 5. P. 112–123.

УДК 517.9

## Анализ устойчивости модели Хиндмарша-Роуза по части переменных

Мамедова Т.Ф., Кутыркина М.А.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

*Аннотация:* В статье описывается применение метода сравнения Е.В. Воскресенского к анализу устойчивости математической модели Хиндмарша-Роуза по части переменных. Сделан вывод, что модель устойчива по всем переменным и применима для дальнейших прогнозов.

*Ключевые слова:* модель Хиндмарша-Роуза, метод сравнения, эталонные функции.

Модель Хиндмарша-Роуза задается следующей системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + (-ax_1^3 + bx_1^2) - x_3 + I, \\ \frac{dx_2}{dt} = c - dx_1^2 - x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = r(s(x_1 - x_R) - x_3), \end{cases} \quad (1)$$

где  $x_1$  – потенциал мембраны;  $x_2$  – переменная восстановления;  $x_3$  – переменная адаптации;  $I$  – величина стимулирующего тока (эта переменная отвечает экспериментальному подключению тока к мембране);  $x_R$  – пороговое значение мембранного потенциала; параметры  $a, b, c, d, r, s$  определяют форму модели и могут быть настроены для воспроизведения различных динамических режимов нейрона.

Проведем анализ устойчивости этой системы по части переменных, используя метод сравнения, разработанный Е.В. Воскресенским [2]. Описание алгоритма приведено ниже.

Рассмотрим две системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y \quad (2)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x) \quad (3)$$

где  $A : [T, +\infty) \rightarrow \text{Hom}(R^n, R^n)$  – непрерывное отображение.

Пусть

$$\begin{aligned} N &= \{1, 2, \dots, n\}, \quad N_0 \subseteq M \subseteq M_0 \subseteq \overline{M_0} \subseteq N, \\ |f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n)| &\leq \lambda_j(t, |x_{j_1}|, \dots, |x_{j_q}|), \quad \forall j \in N, \\ f(t, x) &= f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{colon}(f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)), \end{aligned}$$

где  $\lambda_j(t, r_1, \dots, r_i, \dots, r_q) \leq \lambda_j(t, \overline{r_1}, \dots, \overline{r_i}, \dots, \overline{r_q})$ ,  $r_i \leq \overline{r_i}, i = \overline{1, q}$ ,  $\forall t \in [T, +\infty)$ .



Будем считать, что фундаментальная матрица  $Y(t) = (y_{ij}(t))$ ,  $i, j \in \overline{1, n}$  уравнения (1) нормирована в точке  $t_0 \in [T, +\infty)$  и  $Y^{-1}(t) = (y^{ji}(t))$ .

Непрерывные функции

$$\mu_i : [T, +\infty) \rightarrow R_+^1, \quad m_i : [T, +\infty) \rightarrow R_{+1}^1,$$

удовлетворяющие неравенствам:

$$\mu_i \geq \max_{j \in N_0} (|y_{ij}(t)|, m_i(t)) \geq \max_{j \in M_0} \{ \max(|y_{ij}(t)|, \mu_i(t)) \},$$

где  $T \leq t < +\infty$ ,  $i \in M_0$  будем называть эталонными функциями сравнения.

Считаем, что  $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_q = q$ .

Пусть при любом  $c \geq 0$  функции

$$P_i = \sum_{k \in M_0} |y_{ik}(t)| + \int_{t_0}^t \left| \sum_{j \in N, k \in B} y_{ik}(t) y^{jk}(s) \right| \lambda_j(s, Cm(s)) ds + \\ + \int_t^{+\infty} \left| \sum_{j \in N, k \in M} y_{ik}(t) y^{jk}(s) \right| \lambda_j(s, Cm(s)) ds,$$

где  $i = \overline{q+1, n}$  существует при всех  $t \geq t_0 \geq T$ ,  $B = N \setminus M$ .

Рассмотрим множество

$$\Omega = \{ \phi : \phi \in C^{(p)}([T, +\infty), R^n), |\phi_i(t)| \leq c_1 m_i(t), i = \overline{1, q}, |\phi_i(t)| \leq c_2 p_i(t), i = \overline{1, q+1}, \\ c_1, c_2 \in R_{+1}^1, p \geq 0 \},$$

где  $c_1, c_2$  – фиксированные положительные числа.

Пусть

$$I_i(t, \phi) = \int_{t_0}^t \sum_{j \in N, k \in B} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \phi(s)) ds - \int_t^{+\infty} \sum_{j \in N, k \in M} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \phi(s)) ds \quad (4)$$

существует при любых  $i \in N$ ,  $c \rightarrow R_{+1}^1$  Несобственные интегралы в этом выражении сходятся равномерно по  $t$  при  $t \in [T, +\infty)$ .

**Теорема 1.** Пусть для уравнений (2)-(3) выполняется условие (4). Тогда при достаточно большом  $t_0$  для решения  $y(t: t_0, y_0)$ ,  $y_0 \in R_0$ ,  $R_0 = \{x: x \in R^n\}$  существует решение  $x(t: t_0, x_0)$ ,  $x_0 \in R_0$ , для которого следует выполнение асимптотического равенства:

$$x_i(t) = \sum_{j \in M_0} y_{ij}(t) \gamma_j + o(\mu_i(t)), \quad t \rightarrow +\infty, \quad \forall i \in M_0. \quad (5)$$

**Теорема 2.** Пусть при условиях (4) для каждого решения уравнения (3)  $x(t: t_0, x_0)$ ,  $x_0 \in R_0$  справедливо асимптотическое равенство:

$$x(t: t_0, x_0), \quad x_0 \in R_0 = o(m_i(t)),$$

где  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\forall i \in M_0$ . Следовательно, для каждого решения  $x(t: t_0, x_0)$ ,  $x_0 \in R_0$  существует решение  $y(t: t_0, y_0)$ ,  $y_0 \in R_0$  такое, что справедливо асимптотическое равенство (5).

**Теорема 3.** Если выполняются условия теоремы 2 и условие (4) имеет место равномерно относительно  $0 < c \leq c_0$ ,  $\frac{I_i(t, c)}{\mu_i(t)} \rightarrow 0$ ,  $\mu_i(t) \leq k$ ,  $k > 0$ ,  $\forall i \in M_0$  при  $A \rightarrow 0$ , то, если уравнение (2) устойчиво по части переменных  $\forall i \in M_0$ , то тривиальное решение уравнения (3) также устойчиво по части переменных  $u$ , если уравнение (2) неустойчиво по части переменных  $i$ ,  $i \in M_0$ , то тривиальное решение уравнения (3) также неустойчиво по части переменных.

Применим алгоритм, изложенный в теоремах 1-3, к модели (1).

Для численной реализации системы выберем следующие параметры  $I = 10$ ;  $a = -1$ ;  $b = 3$ ;  $c = 1$ ,  $d = 5$ ;  $r = 0,001$ ;  $s = 4$ ;  $x_R = -1,6$ . Тогда система (1) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 - ax_1^3 + 3x_1^2 - x_3 + 10, \\ \frac{dx_2}{dt} = 1 - 5x_1^2 - x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = 0,001(4(x_1 - 1,6) - x_3) \end{cases} \quad (6)$$

Точка  $(x_1, x_2, x_3) = (0,756; -1,858; 9,424)$  является положением равновесия системы (6). Перейдем к исследованию соответствующего первого линейного приближения:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 6,251y_1 + y_2 - y_3, \\ \frac{dy_2}{dt} = -7,56y_1 - y_2, \\ \frac{dy_3}{dt} = 0,004y_1 - 0,001y_3. \end{cases} \quad (7)$$

Фундаментальная матрица системы (7) и обратная к ней имеют следующий вид:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} -0,621e^{4,988t} & -0,165e^{0,266t} & 0,129e^{-0,004t} \\ -0,784e^{4,988t} & -0,986e^{0,266t} & 0,977e^{-0,004t} \\ 0 & 0,002e^{0,266t} & 0,172e^{-0,004t} \end{pmatrix},$$

$$Y^{-1}(s) = \begin{pmatrix} -5,855e^{-0,262s} & 7,392e^{-0,262s} & 0 \\ -1,556e^{-4,984s} & 9,297e^{-4,964s} & -0,019e^{-4,984s} \\ 1,216e^{-5,254s} & -9,212e^{-5,254s} & -1,622e^{-5,254s} \end{pmatrix}.$$

Множество  $N = \{1, 2, 3\}$ , поскольку  $\overline{M_0} = N$ . Тогда справедлива оценка:

$$\|f_1(t, x)\| \leq |-x_1^3 + 0,732x_1^2 + 0,29| \leq |x_1^5| = \lambda_1(t, |x_1^5|),$$

$$\|f_2(t, x)\| \leq |-5x_1^2 - 0,002| \leq |x_1^2| = \lambda_2(t, |x_1^2|),$$

$$\|f_3(t, x)\| = |-0,0048| = const,$$

поэтому  $M_0 = \{1, 2, 3\}$ ,  $M = M_0$ ,  $B = N - M = 0$ .

Эталонные функции сравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \max_{j \in N_0} \{|y_{11}|, |y_{12}|, |y_{13}|\} = 0,129e^{-0,004t}, \\ \mu_2 &= \max_{j \in N_0} \{|y_{21}|, |y_{22}|, |y_{23}|\} = 0,977e^{-0,004t}, \\ \mu_3 &= \max_{j \in N_0} \{|y_{31}|, |y_{32}|, |y_{33}|\} = 0,172e^{-0,004t}, \\ m_1 &= \max_{j \in M_0} \{|y_{11}|, |y_{12}|, |y_{13}|, \mu_1(t)\} = 0,129e^{-0,004t}, \\ m_2 &= \max_{j \in M_0} \{|y_{21}|, |y_{22}|, |y_{23}|, \mu_2(t)\} = 0,977e^{-0,004t}, \\ m_3 &= \max_{j \in M_0} \{|y_{31}|, |y_{32}|, |y_{33}|, \mu_3(t)\} = 0,172e^{-0,004t}.\end{aligned}$$

Рассмотрим

$$J_i(t, \phi) = \int_{t_0}^t \sum_{j \in N, k \in B} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \phi(s)) ds - \int_t^{+\infty} \sum_{j \in N, k \in M} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \phi(s)) ds.$$

Выражение  $J_i(t, \phi)$  существует  $\forall i \in N$ ,  $c \in -R_+^1$  и  $J_i(t, \phi) = o(\mu_i(t))$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Несобственные интегралы сходятся по  $t$  на любом компакте  $[T, +\infty)$ .

$$\begin{aligned}J_1(t, \phi) &= - \int_t^{+\infty} (y_{11}y^{11}f_1 + y_{12}y^{12}f_1 + y_{13}y^{13}f_1 + y_{11}y^{21}f_2 + y_{12}y^{22}f_2 + y_{13}y^{13}f_2 + y_{11}y^{31}f_3 + \\ &+ y_{13}y^{33}f_3 + y_{12}y^{32}f_3) ds = (1,464e^{0,266t} - 0,922e^{4,988t} + 0,002e^{-0,004t}) \int_t^{+\infty} e^{-4,984s} ds < +\infty; \\ J_2(t, \phi) &= - \int_t^{+\infty} (y_{21}y^{12}f_1 + y_{22}y^{12}f_1 + y_{23}y^{13}f_1 + y_{21}y^{21}f_2 + y_{22}y^{22}f_2 + y_{23}y^{23}f_2 + y_{23}y^{33}f_3 + \\ &+ y_{21}y^{31}f_3 + y_{22}y^{32}f_3) ds = -4,382e^{4,988t} \int_t^{+\infty} e^{-0,266s} ds + 8,75e^{0,266t} \int_t^{+\infty} e^{-4,984s} ds < +\infty; \\ J_3(t, \phi) &= - \int_t^{+\infty} (y_{31}y^{11}f_1 + y_{32}y^{12}f_1 + y_{33}y^{13}f_1 + y_{31}y^{21}f_2 + y_{32}y^{22}f_2 + y_{33}y^{23}f_2 + y_{31}y^{31}f_3 + \\ &+ y_{32}y^{32}f_3 + y_{33}y^{33}f_3) ds = (0,003e^{-0,004t} - 0,018e^{0,266t}) \int_t^{+\infty} e^{-0,984s} ds < +\infty; \quad (8)\end{aligned}$$

Из справедливости неравенств (8) следует выполнение условий теорем 1-3, а следовательно, модель Хиндмарша-Роуза устойчива по всем переменным при наложенных допущениях, что делает ее применимой для дальнейших прогнозов.

## **Литература**

1. Hindmarsh J.L., Rose R.M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // Proceedings of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences. 1984. V. 221 (1222). P. 87–102.
2. Воскресенский Е.В. Асимптотические методы: теория и приложения. Саранск: СВМО, 2000. 300 с.

MSC 34D05

## Stability analysis of the Hindmarsh-Rose model for some variables

T.F. Mamedova, M.A. Kutyrkina

National Research Mordovia State University

*Abstract:* The article describes the application of the comparison method of E.V. Voskresensky to the stability analysis of the Hindmarsh-Rose mathematical model for some variables. It is concluded that the model is stable for all variables and is applicable for further forecasts.

*Keywords:* Hindmarsh-Rose model, comparison method, reference functions.

### References

1. Hindmarsh J.L., Rose R.M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // Proceedings of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences. 1984. V. 221 (1222). P. 87–102.
2. Voskresensky E.V. Asymptotic Methods: Theory and Applications. Saransk: SVMО, 2000. 300 p.

УДК 517.588

## Двусторонние оценки гипергеометрических функций с соотношениями на параметры

Марусеев И.А., Писарев М.А., Рассадин А.Э.

Национальный исследовательский университет «Высшая Школа Экономики»

*Аннотация:* В работе с помощью прямого и обратного неравенств Гёльдера в интегральной форме найдены оценки снизу и сверху для гипергеометрической функции с линейной связью между её параметрами. Кроме этого, для выяснения эффективности полученных оценок были подобраны такие значения параметров гипергеометрических функций, при которых они выражаются через элементарные функции.

*Ключевые слова:* символ Похгаммера, теорема Чебышёва, относительная погрешность.

Гипергеометрическая функция встречается в различных разделах математики, а особенно часто в её разнообразных приложениях. Хорошо известно [1], что эта функция в круге  $|z| < 1$  задаётся степенным рядом:

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (1)$$

где  $a, b$  и  $c$  — это параметры гипергеометрической функции, а величины вида  $(a)_n$  — это символы Похгаммера от её параметров:  $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$ , причём по умолчанию считается, что  $(a)_0 = 1$  [1].

Как оказалось, работать с этой неэлементарной функцией с помощью ряда (1) далеко не всегда удобно, поэтому при  $|\arg(1-z)| < \pi$  и  $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$  было установлено её представление в виде интеграла [1]:

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt, \quad (2)$$

где  $\Gamma(\dots)$  — гамма-функция Эйлера [1].

В приложениях часто возникают ситуации, когда на параметры  $a, b$  и  $c$  гипергеометрической функции накладываются некие соотношения. Например, в работе [2] параметры  $b$  и  $c$  были связаны условием:  $c = b + 1$ .

Далее будут рассматриваться гипергеометрические функции только с этим условием на параметры. Кроме того, параметр  $a$  будет считаться вещественным, параметр  $b$  — положительным, а  $z \in (0, 1)$ . В этом случае формула (2) не только остаётся справедливой, но и заметно упрощается:

$$F(a, b; b+1; z) = b \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{(1-tz)^a} dt. \quad (3)$$

Однако, работа с этим подмножеством гипергеометрических функций не становится легче, потому что подинтегральное выражение в интеграле (3) является биномиальным дифференциалом, и, следовательно, по теореме П. Л. Чебышёва функция

(3) выражается через элементарные функции только когда либо  $a \in \mathbb{Z}$ , либо когда  $b \in \mathbb{N}$ , либо когда  $b - a \in \mathbb{Z}$  [3]. Тем не менее, составить некоторое представление о поведении функции (3) на интервале  $(0,1)$  оказывается возможным, так как справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть два действительных числа  $p_-$  и  $p_+$  выбраны таким образом, что при  $b > 1$   $0 < p_- < 1 < p_+$ , а при  $0 < b < 1$   $0 < p_- < 1 < p_+ < \frac{1}{1-b}$ , тогда для гипергеометрической функции  $F(a, b; b+1; z)$  при  $z \in (0, 1)$  справедлива следующая двусторонняя оценка:

$$F^-(a, b; z) \leq F(a, b; b+1; z) \leq F^+(a, b; z), \quad (4)$$

где

$$F^+(a, b; z) = \begin{cases} \frac{b}{(p_+(b-1)+1)^{\frac{1}{p_+}}} \left( \frac{1-(1-z)^{1-aq_+}}{(1-aq_+)z} \right)^{\frac{1}{q_+}}, & aq_+ \neq 1 \\ b \left( \frac{1-a}{b-a} \right)^{1-a} \left( -\frac{\ln(1-z)}{z} \right)^a, & aq_+ = 1 \end{cases}, \quad (5)$$

$$F^-(a, b; z) = \begin{cases} \frac{b}{(p_-(b-1)+1)^{\frac{1}{p_-}}} \left( \frac{1-(1-z)^{1-aq_-}}{(1-aq_-)z} \right)^{\frac{1}{q_-}}, & aq_- \neq 1 \\ b \left( \frac{1-a}{b-a} \right)^{1-a} \left( -\frac{\ln(1-z)}{z} \right)^a, & aq_- = 1 \end{cases}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{q_+} = 1 - \frac{1}{p_+}. \quad (7)$$

Для того, чтобы выяснить, какова эффективность оценки (4), выберем параметры  $a$  и  $b$  гипергеометрической функции (3) так, чтобы они удовлетворяли условиям теоремы П.Л. Чебышёва [3], а именно, рассмотрим сначала случай, когда  $b > 1$ .

Пусть  $a = \frac{1}{2}$  и  $b = \frac{3}{2}$ , тогда:

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; z\right) = \frac{3}{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-tz}} dt. \quad (8)$$

Интеграл (7) вычисляется с помощью подстановки  $\xi = t^{\frac{1}{2}}(1-tz)^{-\frac{1}{2}}$ :

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; z\right) = \frac{3}{2z} \left( \frac{1}{\sqrt{z}} \arctan \sqrt{\frac{z}{1-z}} - \sqrt{1-z} \right). \quad (9)$$

Далее, пусть  $p_+ = 2$ , тогда  $q_+ = 2$ , и, согласно формуле (5), получим:

$$F^+\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z\right) = \frac{3}{2} \sqrt{-\frac{\ln(1-z)}{2z}}. \quad (10)$$

Аналогично, если выбрать  $p_- = \frac{1}{2}$ , то  $q_- = -1$ , и, по формуле (6) вычислим:

$$F^-\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z\right) = \frac{36}{25} \frac{z}{1-(1-z)^{\frac{3}{2}}}. \quad (11)$$

Случай  $0 < b < 1$  рассматривается аналогично.

Возьмём  $a = \frac{1}{2}$  и  $b = \frac{1}{2}$ , тогда:

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-tz)}}. \quad (12)$$

Интеграл (11) вычисляется с помощью той же подстановки, что и интеграл (7):

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right) = \frac{1}{\sqrt{z}} \arctan \sqrt{\frac{z}{1-z}}. \quad (13)$$

Далее, пусть  $p_+ = \frac{3}{2}$ , тогда  $q_+ = 3$ , и, согласно формуле (5), получим:

$$F^+\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; z\right) = \sqrt[3]{4} \sqrt[3]{\frac{1 - \sqrt{1-z}}{z\sqrt{1-z}}}. \quad (14)$$

Аналогично, если выбрать  $p_- = \frac{1}{2}$ , то  $q_- = -1$ , и, по формуле (6) вычислим:

$$F^-\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; z\right) = \frac{4}{3} \frac{z}{1 - (1-z)^{\frac{3}{2}}}. \quad (15)$$

Для того, чтобы оценить количественно, насколько хорошо приближают гипергеометрическую функцию  $F(a, b; b+1; z)$  её оценки сверху (5) и снизу (6), введём относительные погрешности этих аппроксимаций:

$$\delta F^+(a, b; z) = \frac{F^+(a, b; z) - F(a, b; b+1; z)}{F(a, b; b+1; z)} \quad (16)$$

и

$$\delta F^-(a, b; z) = \frac{F(a, b; b+1; z) - F^-(a, b; z)}{F(a, b; b+1; z)}. \quad (17)$$

В докладе приведены графики функций (8)-(10) и (12)-(14) на интервале  $(0, 1)$ , а также графики соответствующих им относительных погрешностей (15) и (16).

Перспективой развития данной работы является исследование, насколько заметно влияют на полученные оценки небольшие вариации величин  $p_-$  и  $p_+$  вблизи их фиксированных значений.

## Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
2. Писарев М.А., Подолин Д.А., Рассадин А.Э. Точное решение одного обобщения модели Солоу // В сборнике: Наука и реальный мир: пути реализации научных идей. Материалы VII Всероссийской научной студенческой конференции НИУ ВШЭ – Нижний Новгород / Под ред. Е.А. Сергеевой. 2023. С. 94–96.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 т. Т. 1. М.: Высшая школа, 1988. 712 с.



MSC 33C05

## Double-sided bounds for hypergeometric functions with relations on parameters

I.A. Maruseev, M.A. Pisarev, A.E. Rassadin

HSE University

*Abstract:* In the work, using the direct and reverse Hölder inequalities in integral form, estimates from below and from above for a hypergeometric function with a linear relationship between its parameters are found. In addition, to determine the effectiveness of estimates obtained, such values of the parameters of hypergeometric functions were selected, in which they are expressed in terms of elementary functions.

*Keywords:* Pochhammer symbol, Chebyshev theorem, relative error.

### References

1. Bateman G., Erdelyi A. Higher transcendental functions. Volume 1. New York – Toronto – London, Mc Graw-hill book company, Inc, 1953.
2. Pisarev M.A., Podolin D.A., Rassadin A.E. Tochnoye resheniye odnogo obobsheniya modeli Solou, *V sbornike: Nauka i realnii mir: puti realizatsii nauchnih idei. Materiali VII Vserossiiskoi nauchnoi studencheskoi konferentsii NIU VShE – Nizhny Novgorod / Pod red. E.A. Sergeevoi*, 2023. P. 94–96.
3. Kudryavtsev L.D. Kurs matematicheskogo analiza. V 3h tomah. Tom 1. M., Visshaya shkola, 1988. 712 p.

УДК 517.977.56, 519.71

## Оптимальное управление процессом осесимметричного нелинейного нагрева неограниченной пластины с учетом ограничений

Морозкин Н.Д., Ткачев В.И., Морозкин Н.Н.

Уфимский университет науки и технологий

*Аннотация:* Исследуется задача оптимального по быстродействию нагрева хрупкой пластины с учетом ограничений на термонапряжения и максимальную температуру, а также с учетом зависимости коэффициента теплопроводности и пределов хрупкой прочности от температуры. Разработан и реализован в виде компьютерной программы итерационный метод поиска оптимального управления в случае, когда зависимость пределов хрупкой прочности от температуры аппроксимируется экспоненциальными функциями, а зависимость коэффициента теплопроводности от температуры линейной функцией. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

*Ключевые слова:* оптимальный нагрев, термонапряжения, быстродействие, неограниченная пластина.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу осесимметричного нагрева внешними тепловыми источниками неограниченной пластины. Процесс нагрева описывается следующими уравнениями

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(t) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad 0 < x < \bar{x}, \quad 0 < t \leq \bar{t} < \infty, \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T^0 = \text{const}, \quad x \in [0, \bar{x}], \quad (2)$$

$$\lambda(t) \frac{\partial T(\bar{x}, t)}{\partial x} = \alpha(v(t) - T(\bar{x}, t)), \quad t \in [0, \bar{t}], \quad (3)$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0, \quad t \in [0, \bar{t}], \quad (4)$$

где  $T = T(x, t)$  – температура,  $t$  – время,  $c$  – коэффициент теплоемкости,  $\rho$  – плотность,  $\alpha$  – коэффициент теплообмена,  $v(t)$  – управление (температура внешней среды),  $v(t) \in V$ ,  $V = \{v = v(t), v(t) \in L_2[0, \bar{t}], 0 \leq \bar{v}(t) \leq v(t) \leq v^+\}$

Пусть  $\lambda(t) > 0$ , имеет ограниченную производную и

$$0 < \beta_1 \leq \lambda(T) \leq \beta_2. \quad (5)$$

При указанных условиях система уравнений (1)-(4) имеет обобщенное решение из пространства  $V_2^{1,0}(G)$  [1], где  $G = \{(x, t) : x \in (0, \bar{x}), t \in (0, \bar{t})\}$ .

Ограничения на термонапряжения в рассматриваемом случае, записываются в виде

$$\frac{\alpha\tau E}{1-\nu} \left( -T(0,t) + \frac{1+3\Gamma}{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} T(\xi,t)d\xi - \frac{6\Gamma}{\bar{x}^2} \int_0^{\bar{x}} \xi T(\xi,t)d\xi \right) \leq \sigma_p(T(0,t)), \quad (6)$$

$$\frac{\alpha\tau E}{1-\nu} \left( T(l,t) - \frac{1-3\Gamma}{\bar{x}} \int_0^1 T(\xi,t)d\xi - \frac{6\Gamma}{\bar{x}^2} \int_0^1 \xi T(\xi,t)d\xi \right) \leq \sigma_c(T(\bar{x},t)). \quad (7)$$

Здесь  $\alpha_T$  – коэффициент линейного расширения,  $E$  – модуль упругости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\sigma_p(T)$  и  $\sigma_c(T)$  – пределы прочности на растяжение и сжатие соответственно,  $\Gamma \in [0, 1]$  характеризует степень защемления от поворотов краёв пластины,

Ограничение на максимальную температуру в случае внешнего нагрева достигается на поверхности и имеет вид

$$T(\bar{x},t) \leq T^*, \quad 0 \leq t \leq \bar{t} \quad (8)$$

**Задача.** Найти управление  $v^0(t) \in V$ , переводящее за минимальное время  $t^0 \leq \bar{t}$ , систему (1)-(4) в заданное конечное положение  $\hat{T}(x)$  с фиксированной точностью

$$\int_0^{\bar{x}} (T(x,t^0,v^0) - \hat{T}(x))^2 \leq \varepsilon, \quad (9)$$

так, чтобы при всех  $t \in [0, \bar{t}]$  были бы выполнены неравенства (6)-(8).

## 2. Линеаризация

Решение нелинейной системы уравнений (1)-(4) при фиксированном управлении будем искать методом последовательных приближений, изложенном в работе [2].

Системе уравнений (1)-(4) поставим в соответствие итерационный процесс

$$c\rho \frac{\partial T_{k+1}}{\partial t} - \lambda_0 \frac{\partial^2 T_{k+1}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\lambda(T_k) - \lambda_0) \frac{\partial T_k}{\partial x} \right], \quad (10)$$

$$T_{k+1}(x,0) = T^0, \quad x \in [0, \bar{x}], \quad (11)$$

$$\lambda_0 \frac{\partial T_{k+1}(\bar{x},t)}{\partial x} - \alpha(v(t) - T_{k+1}(\bar{x},t)) = [\lambda_0 - \lambda(T_k)] \frac{\partial T_k(\bar{x},t)}{\partial x}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial T_{k+1}(0,t)}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

где

$$\lambda_0 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}. \quad (14)$$

Справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть функция  $\lambda(T)$  положительна, удовлетворяет соотношению (5) и имеет ограниченную по  $T$  производную. Тогда при любом фиксированном управлении  $v(t) \in V$  решения  $T_{k+1}$  системы уравнений (10)-(13) сходится к решению системы уравнений (1)-(4) в соответствующей норме.

Таким образом, на каждом шаге итерационного процесса решение поставленной задачи сводится к поиску оптимального управления для линейной системы (10)-(13) с нелинейными ограничениями (6)-(8).

### 3. Решение задачи быстродействия с линейным уравнением состояния и с фазовыми ограничениями

Для удобства дальнейших выкладок система уравнений (10)-(13) и ограничений (6)-(8) записывается в безразмерных переменных.

Далее после применения конечных интегральных преобразований Фурье решение полученной системы запишется в виде ряда [3]:

$$\theta(r, \tau, u) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n x_n^k(u, r) \cos(\mu_n r). \quad (15)$$

Здесь

$$D_n = \frac{2B_i}{(\mu_n^2 + B_i^2 + B_i) \cos(\mu_n)}, \quad (16)$$

где  $\mu_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  – корни уравнения

$$B_i \cos(\mu_n) - \mu_n \sin(\mu_n) = 0, \quad (17)$$

а  $x_n^k(u, \tau)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  – компоненты вектора решений бесконечной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x_n^{(k)}}{\partial x} = -\mu_n^2 x_n^{(k)} + \mu_n^2 (u + I_n^{(k-1)}), \quad I_n^{(k-1)} = \int_0^1 \left( \frac{\lambda(\theta_{k-1})}{\lambda_0} - 1 \right) \frac{\partial(\theta_{k-1}) \sin(\mu_n r)}{\sin(\mu_n)} dr. \quad (18)$$

Здесь  $x_n^k = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_i = \alpha \frac{\bar{x}}{\lambda_0}$  – критерий Био.

Ограничения (5)-(7) запишутся в виде неравенств

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{in} x_n^{(k)} - l_i \leq 0, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (19)$$

Таким образом, исходная задача на каждой  $k$ -ой итерации эквивалентна следующей: найти управление  $u^{(k)}(\tau)$ , переводящее систему (18) из нулевого начального положения в конечное положение  $(\hat{x}_1^{(k)}, \dots, x_1^{(k)}, \dots)$  за минимальное время с соблюдением ограничений (19).

Ограничившись первыми  $N$  членами ряда, заменим бесконечномерную задачу оптимального управления конечномерной, которая на каждой  $k$ -ой итерации решается с использованием модифицированного метода поворота опорной гиперплоскости [4].

### 4. Результаты вычислительных экспериментов

Предложенный подход к решению нелинейных задач теплопроводности с фазовыми ограничениями был апробирован на следующей задаче: нагреть неограниченную пластину из сплава ЖС6У толщиной  $2\bar{x} = 0.46$  с начальной температурой  $20^\circ\text{C}$  до конечной (постоянной по сечению) температуры  $920^\circ\text{C}$  за минимальное время с учетом ограничений на термонапряжения и температуру поверхности, которая, по условию, не должна была превышать  $1100^\circ\text{C}$ . Материал ЖС6У является хрупким.

**Таблица 1.** Зависимость предела прочности от температуры

Температура, °C	20	975	1050	1100	1150
Предел прочности, сжатие, МПа	1500	700	470	310	210
Предел прочности, растяжение, МПа	980	540	370	200	140

Температура греющей среды менялась в диапазоне [800°C, 1600°C]. Зависимость предела прочности от температуры задана в таблице 1.

После перехода к безразмерным величинам аппроксимировалась с использованием метода наименьших квадратов нелинейными соотношениями

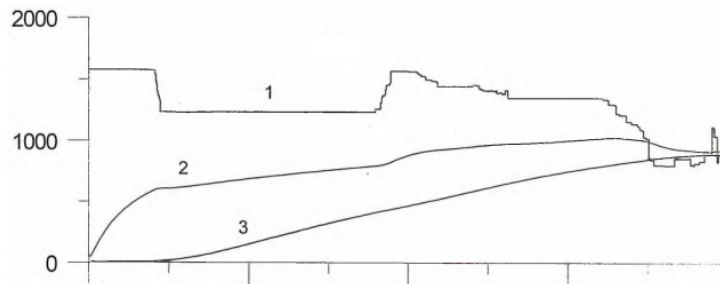
$$\sigma_c(\theta) = (-0.023e^{0.00303 \theta} + 0.747), \quad \sigma_p(\theta) = (-0.003e^{0.00460 \theta} + 0.476)$$

Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры после перехода к безразмерным величинам аппроксимировалась линейной функцией  $\lambda(\theta) = 10.68 + 9.74 \theta$ .

На каждом  $k$ -ом шаге итерационного процесса задача решалась для  $N = 6$ . Требуемая точность решения тепловой задачи была достигнута за 7 итераций. Время оптимального по быстродействию нагрева получилось равным 3.98 ч.

На рис. 1 в размерных единицах приведены:

1. Зависимость оптимального управления от времени. Оптимальное управление имеет 135 переключений.
2. Зависимость температуры поверхности тела от времени.
3. Зависимость температуры центра тела от времени.



**Рис. 1.** Графики для управления и температуры тела

Отметим также, что обычно в научной литературе активными считались растягивающие термонапряжения. В рассматриваемом же случае скорость нагрева ограничивают сжимающие напряжения. Выбор размерности конечномерной системы  $N = 6$  обусловлен обеспечением сходимости рядов, входящих в ограничения на термонапряжения.

## Литература

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
2. Голичев И.И. Решение некоторых задач для параболических уравнений методом последовательных приближений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1989.

3. Морозкин Н.Д. Оптимальное управление процессом нагрева с учетом фазовых ограничений. Учебное пособие. Уфа, 1997.
4. Морозкин Н.Д. Многошаговый двойственный алгоритм Н.Е. Кирина // Кирин Николай Ефимович. Сборник статей. Санкт-Петербург, АССПИН, 2003. С. 198–217.

MSC 58E25

## **Optimal control of the process of axisymmetric nonlinear heating of an unbounded plate taking into account restrictions**

N.D. Morozkin, V.I. Tkachev, Y.N. Morozkin  
Ufa University of Science and Technology

*Abstract:* The problem of optimal heating of a brittle plate in terms of speed is studied, taking into account restrictions on thermal stress and maximum temperature, as well as taking into account the dependence of the thermal conductivity coefficient and brittle strength limits on temperature. An iterative method for searching for optimal control has been developed and implemented in the form of a computer program in the case where the dependence of the brittle strength limits on temperature is approximated by exponential functions, and the dependence of the thermal conductivity coefficient on temperature by a linear function. The results of computational experiments are presented.

*Keywords:* optimal heating, thermal stress, speed, unlimited plate.

### **References**

1. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N. Linear and quasilinear equations of parabolic type. M.: Science, 1967.
2. Golichev I.I. Solving some problems for parabolic equations by the method of successive approximations. Ufa: BSC Ural Branch of the USSR Academy of Sciences, 1989.
3. Morozkin N.D. Optimal control of the heating process taking into account phase restrictions. Tutorial. Ufa, 1997.
4. Morozkin N.D. Multi-step dual algorithm N.E. Kirin //Kirin Nikolay Efimovich. Collection of articles. St. Petersburg, ASSPIN, 2003. P. 198–217.

УДК 519.6+004.9:504.064

## Численный алгоритм математической модели расчета плотности вредных веществ в атмосфере

Мурадов Ф.А.<sup>1,3</sup>, Кучаров О.Р.<sup>2</sup>, Эшбоева Н.Ф.<sup>3</sup>

Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий<sup>1</sup>,  
Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров  
ирригации и механизации сельского хозяйства»<sup>2</sup>, Научно-исследовательский  
институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта<sup>3</sup>

*Аннотация:* В статье представлен алгоритм численного решения математической модели для расчета значений плотности вредных веществ в разные моменты времени в разных точках региона.

*Ключевые слова:* математическая модель, плотность, диффузия, аппроксимация.

### 1. Введение

В мире активно проводятся научные исследования, ориентированные на разработку более усовершенствованных математических моделей процессов транспорта и диффузии вредных антропогенных и природных выбросов в атмосферу. При создании математического аппарата для исследования указанной проблемы особое внимание уделяется, в частности, таким важным аспектам, как учет погодных-климатических характеристик и топографии рассматриваемых территорий, эмиссии вредных частиц в атмосферу с поверхности земли вследствие турбулентного движения воздушной массы, изменений плотности мелкодисперсных частиц в зависимости от их физико-механических свойств.

В статье [1] процесс распространения вредных веществ в атмосфере описан с использованием двумерных эллиптических уравнений. Также в данной работе представлены вычислительные эксперименты для различных значений высот.

В работе [2] изучен процесс распространения транспортных выбросов в атмосферу в разное время года с учетом метеорологических параметров США.

В статье [3] изучен процесс распространения тяжелых вредных веществ в атмосфере на строительных объектах. Исследования показывают, что распространение вредных веществ зависит от высоты здания, скорости ветра и направления, а ширина здания играет незначительную роль.

### 2. Постановка задачи

Разработана математическая модель для расчета плотности аэрозольных частиц в атмосфере на основе законов гидромеханики [4]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + I_8; \quad (1)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями:

$$\rho(x, y, z)|_{t=0} = \rho_c; \quad (2)$$



$$\alpha_9 \rho \mu \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_{10} (\rho - \rho_0), \quad \beta_9 \rho \mu \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \beta_{10} (\rho - \rho_0), \quad (3)$$

$$\alpha_{11} \rho \mu \frac{\partial \rho}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha_{12} (\rho - \rho_0), \quad \beta_{11} \rho \mu \frac{\partial \rho}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = \beta_{12} (\rho - \rho_0), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = 0. \quad (5)$$

Здесь  $\rho$  – плотность вредных частиц;  $\rho_c$  – начальная плотность вредных частиц;  $\rho_0$  – плотность атмосферы;  $u, v, w$  – скорости ветра по направлениям  $x, y, z$ .

### 3. Методы решения

Для упрощения решения задачи (1)-(5) область

$$D = (0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq H_z,)$$

рассмотрим как прямоугольную, а источник загрязнения считаем расположенным в приземном слое. Тогда для численного решения задачи (1)-(5) область изменения искомых переменных с учетом граничных условий покроем сеткой с шагами  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$ :

$$\Omega_{xyzt} = \{(x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, z_k = k\Delta z, \tau_n = n \Delta t); \\ i = \overline{0, N}; j = \overline{0, M}, k = \overline{0, L}, n = \overline{0, N_t}, \Delta t = \frac{1}{N_t}\}.$$

Для сохранения устойчивости при решении задач (1)-(5) использована неявная схема, в уравнении (1) применяем аппроксимацию второго порядка относительно времени по направлению  $Ox$  [5-7]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\rho_{i,j,k}^{n+1/3} - \rho_{i,j,k}^n}{\Delta t/3} + \frac{1}{2} \frac{\rho_{i+1,j,k}^{n+1/3} - \rho_{i+1,j,k}^n}{\Delta t/3} + \frac{u_{i,j,k}^{n+1/3} \rho_{i,j,k}^{n+1/3} - u_{i-1,j,k}^{n+1/3} \rho_{i-1,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x} + \\ & \frac{v_{i,j,k}^n \rho_{i,j,k}^n - v_{i-1,j,k}^n \rho_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j,k}^n \rho_{i,j,k}^n - v_{i,j-1,k}^n \rho_{i,j-1,k}^n}{\Delta y} + \\ & \frac{w_{i,j,k}^n \rho_{i,j,k}^n - w_{i,j,k-1}^n \rho_{i,j,k-1}^n}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta x^2} \left( \mu_{i+0,5,j} \rho_{i+1,j,k}^{n+1/3} - \right. \\ & \left. - (\mu_{i+0,5,j} + \mu_{i-0,5,j}) \rho_{i,j,k}^{n+1/3} + \mu_{i-0,5,j} \rho_{i-1,j,k}^{n+1/3} \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta y^2} \left( \mu_{i,j+0,5} \rho_{i,j+1,k}^n - (\mu_{i,j+0,5} + \mu_{i,j-0,5}) \rho_{i,j,k}^n + \right. \\ & \left. + \mu_{i,j-0,5} \rho_{i,j-1,k}^n \right) + \frac{1}{\Delta z^2} \left( \kappa_{k+0,5} \rho_{i,j,k+1}^n - (\kappa_{k+0,5} + \kappa_{k-0,5}) \rho_{i,j,k}^n + \right. \\ & \left. + \kappa_{k-0,5} \rho_{i,j,k-1}^n \right) + \frac{1}{3} I_8. \end{aligned}$$

При раскрытии скобок приводя подобные члены получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$a_{\rho,i,j,k} \rho_{i-1,j,k}^{n+1/3} - b_{\rho,i,j,k} \rho_{i,j,k}^{n+1/3} + c_{\rho,i,j,k} \rho_{i+1,j,k}^{n+1/3} = -d_{\rho,i,j,k}, \quad (6)$$

Коэффициенты и свободные члены для системы линейных алгебраических уравнений определяются следующим образом:

$$a_{\rho,i,j,k} = \frac{\mu_{i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i-1,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x}; \quad b_{\rho,i,j,k} = \frac{\mu_{i+0,5,j} + \mu_{i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x} + \frac{3}{2\Delta t};$$

$$c_{\rho, i, j, k} = \frac{\mu_{i+0,5, j}}{\Delta x^2} - \frac{3}{2\Delta t};$$

$$d_{\rho, i, j, k} = \left( \frac{3}{2\Delta t} - \frac{\mu_{i, j+0,5} + \mu_{i, j-0,5}}{\Delta y^2} - \frac{\kappa_{k+0,5} + \kappa_{k-0,5}}{\Delta z^2} - \frac{u_{i, j, k}^n}{2\Delta x} - \frac{v_{i, j, k}^n}{\Delta y} - \frac{w_{i, j, k}^n}{\Delta z} \right) \rho_{i, j, k}^n +$$

$$+ \frac{u_{i-1, j, k}^n}{2\Delta x} \rho_{i-1, j, k}^n + \frac{3}{2\Delta t} \rho_{i+1, j, k}^n + \left( \frac{\mu_{i, j-0,5}}{\Delta y^2} + \frac{v_{i, j-1, k}^n}{\Delta y} \right) \rho_{i, j-1, k}^n + \frac{\mu_{i, j+0,5}}{\Delta y^2} \rho_{i, j+1, k}^n +$$

$$+ \left( \frac{\kappa_{k-0,5}}{\Delta z^2} + \frac{w_{i, j, k-1}^n}{\Delta z} \right) \rho_{i, j, k-1}^n + \frac{\kappa_{k+0,5}}{\Delta z^2} \rho_{i, j, k+1}^n + \frac{1}{3} I_8.$$

Граничные условия (3) при  $x = 0$  аппроксимируем с точностью второго порядка следующим образом:

$$\alpha_9 \tilde{\rho} \mu_{0, j} \frac{-3\rho_{0, j, k}^{n+1/3} + 4\rho_{1, j, k}^{n+1/3} - \rho_{2, j, k}^{n+1/3}}{2\Delta x} = \alpha_{10} \rho_{0, j, k}^{n+1/3} - \alpha_{10} \rho_0.$$

Упростив это выражение, получим коэффициенты прогонки:

$$\alpha_{\rho, 0, j, k} = \frac{-4c_{\rho, 1, j, k} \tilde{\rho} \alpha_9 \mu_{0, j} + b_{\rho, 1, j, k} \tilde{\rho} \alpha_9 \mu_{0, j}}{-3c_{\rho, 1, j, k} \tilde{\rho} \alpha_9 \mu_{0, j} + a_{\rho, 1, j, k} \tilde{\rho} \alpha_9 \mu_{0, j} - 2\Delta x \alpha_{10}};$$

$$\beta_{\rho, 0, j, k} = \frac{-d_{\rho, 1, j, k} \tilde{\rho} \alpha_9 \mu_{0, j} - 2\Delta x \alpha_{10} c_{\rho, 1, j, k} \rho_0}{-3c_{\rho, 1, j, k} \tilde{\rho} \alpha_9 \mu_{0, j} + a_{\rho, 1, j, k} \tilde{\rho} \alpha_9 \mu_{0, j} - 2\Delta x \alpha_{10}}.$$

Граничные условия (3) при  $x = L_x$  аппроксимируем с точностью второго порядка следующим образом:

$$\beta_9 \tilde{\rho} \mu_{N, j} \frac{\rho_{N-2, j, k}^{n+1/3} - 4\rho_{N-1, j, k}^{n+1/3} + 3\rho_{N, j, k}^{n+1/3}}{2\Delta x} = \beta_{10} \rho_{N, j, k}^{n+1/3} - \beta_{10} \rho_0 \quad (7)$$

Упростив это выражение, получим выражение для  $\rho_{N, j, k}^{n+1/3}$ :

$$\rho_{N, j, k}^{n+1/3} = \frac{-2\Delta x \beta_{10} \rho_0 - (\beta_{\rho, N-2, j, k} + \alpha_{\rho, N-2, j, k} \beta_{\rho, N-1, j, k} - 4\beta_{\rho, N-1, j, k}) \tilde{\rho} \beta_9 \mu_{N, j}}{-2\Delta x \beta_{10} + (\alpha_{\rho, N-2, j, k} \alpha_{\rho, N-1, j, k} - 4\alpha_{\rho, N-1, j, k} + 3) \tilde{\rho} \beta_9 \mu_{N, j}}.$$

Последовательность значений концентраций  $\rho_{N-1, j, k}^{n+1/3}$ ,  $\rho_{N-2, j, k}^{n+1/3}$  ...  $\rho_{1, j, k}^{n+1/3}$  находится методом обратной прогонки:

$$\rho_{i, j, k}^{n+1/3} = \alpha_{\rho, i, j, k} \rho_{i+1, j, k}^{n+1/3} + \beta_{\rho, i, j, k}; \quad i = \overline{N-1, 0}, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, L-1}.$$

Аналогичную последовательность действий применим при исследовании по осям  $Oy$  и  $Oz$ .

## 4. Заключение

Для исследования математической модели, описывающей распределение плотности вредных веществ был разработан численный алгоритм на основе неявной схемы с аппроксимацией второго порядка по времени.

Вычислительные эксперименты показывают, что значения плотности вредных веществ различны в разные моменты времени в разных точках региона.

## Литература

1. Frana, Karel. Simulations of unsteady turbulent flows using the finite element method. 2008. P. 58-63.
2. Martin, William. The Application of the Finite Element Method to the Neutron Transport Equation. 1976.
3. Chen, Jianing Chen, Guoyan Zhang, Anchao Deng, Haoxin Wen, Xiaoping Wang, Fahui Sheng, Wei Hongxiang, Zheng. Numerical Simulation of the Effect of CH<sub>4</sub>/CO Concentration on Combustion Characteristics of Low Calorific Value Syngas. ACS Omega. 2021. XXXX. 10.1021/acsomega.0c06176.
4. Ravshanov N., Narzullayeva N.U., Tashtemirova N.N., Muradov F.A., Islamov Y.N. Software and instrumental complex for decision-making on environmental protection from technogenic factors // Advances in Materials, Systems and Technologies (CAMSTech-II-2021): Proceedings of II International Scientific Conference, 29-31 July 2021. Krasnoyarsk (Russia), 2021. P. 1-7.
5. Равшанов Н., Мурадов Ф., Ахмедов Д. Метод операторного расщепления для численного решения задачи рассеивания загрязняющих веществ в атмосфере // Физический журнал: Серия конференций. Лондон, 2020. Том. 1441. 012164.
6. Мурадов Ф., Ахмедов Д. Численное моделирование рассеяния загрязнителей атмосферы с учетом скорости осаждения частиц // Международная конференция IEEE по информационным наукам и коммуникационным технологиям (ICISCT). 4-6 ноября 2019 г. Ташкент, 2019. С. 1-5.
7. Шарипов Д., Мурадов Ф., Ахмедов Д. Метод численного моделирования для краткосрочного прогноза качества воздуха в промышленных регионах // Электронные записки прикладной математики. 2019. № 19. С. 575-584.

MSC 65C20

## Numerical algorithm for a mathematical model for computing the density of harmful substances in the atmosphere

F.A. Muradov<sup>1,3</sup>, O.R. Kucharov<sup>2</sup>, N.F. Eshboeva<sup>3</sup>

Samarkand branch of Tashkent University of Information Technologies<sup>1</sup>, «Tashkent institute of irrigation and agricultural mechanization engineers» National Research University<sup>2</sup>, Research Institute for the Development of Digital Technologies and artificial intelligence<sup>3</sup>

*Abstract:* This article presents an algorithm for the numerical solution of a mathematical model that calculates the density of harmful substances at different times and at different points in the region.

*Keywords:* mathematical model, density, diffusion, approximation.

### References

1. Frana, Karel. Simulations of unsteady turbulent flows using the finite element method. 2008. P. 58-63.
2. Martin, William. The Application of the Finite Element Method to the Neutron Transport Equation. 1976.
3. Chen, Jianing Chen, Guoyan Zhang, Anchao Deng, Haoxin Wen, Xiaoping Wang, Fahui Sheng, Wei Hongxiang, Zheng. Numerical Simulation of the Effect of CH<sub>4</sub>/CO Concentration on Combustion Characteristics of Low Calorific Value Syngas. ACS Omega. 2021. XXXX. 10.1021/acsomega.0c06176.
4. Ravshanov N., Narzullayeva N.U., Tashtemirova N.N., Muradov F.A., Islamov Y.N. Software and instrumental complex for decision-making on environmental protection from technogenic factors // Advances in Materials, Systems and Technologies (CAMSTech-II-2021) : Proceedings of II International Scientific Conference, 29-31 July 2021. Krasnoyarsk (Russia), 2021. P. 1-7.
5. Ravshanov N., Muradov F., Akhmedov D. Operator splitting method for numerical solving the atmospheric pollutant dispersion problem // Journal of Physics: Conference Series. London, 2020. Vol. 1441. 012164.
6. Muradov F., Akhmedov D. Numerical Modeling of Atmospheric Pollutants Dispersion Taking Into Account Particles Settling Velocity // IEEE International Conference on Information Science and Communications Technologies (ICISCT). 4-6 Nov. 2019. Tashkent, 2019. P. 1-5.
7. Sharipov D., Muradov F., Akhmedov D. Numerical Modeling Method for Short-Term Air Quality Forecast in Industrial Regions // Applied Mathematics E-Notes. 2019. № 19. P. 575-584.

УДК 519.60

## **О возможности применения метода сопряжённых систем в задачах описания химических процессов полимеризации\***

Мустафина С.И., Гиззатова Э.Р.

Уфимский университет науки и технологий

*Аннотация:* Данная работа исследует применение методов сопряженных систем в моделировании процессов полимеризации. Методы сопряженных систем демонстрируют высокую эффективность при решении систем дифференциальных уравнений, характеризующих сложные реакционные среды и неоднородные материалы. Исследование направлено на оптимизацию процессов полимеризации различных типов полимеров с целью улучшения качества продукции и снижения экологического воздействия промышленности.

*Ключевые слова:* сопряженные системы, процессы полимеризации, математическое моделирование.

В современных исследованиях сложных систем невозможно обойтись без применения методов математического моделирования. Данные технологии позволили значительно продвинуться в различных областях науки, включая направления, связанные с решением глобальных проблем человечества, таких как изменение климата, изменение состояния биосферы, экологическое воздействие промышленных отходов. Однако наибольшая эффективность в моделировании процессов достигается при синергии математических моделей и численных методов, одними из которых являются методы сопряженных систем.

Методы сопряженных систем представляют собой мощный инструмент для численного моделирования сложных процессов, таких как полимеризация, значение которой во многих промышленных отраслях, включая производство пластмасс, полимерных пленок, волокон и композитных материалов, можно считать ключевым. Понимание кинетики реакций, диффузии мономеров и роста полимерных цепей является необходимым для оптимизации подобных процессов, а также улучшения качества продукции и минимизации затрат.

Использование методов сопряженных систем позволяет эффективно решать системы дифференциальных уравнений, описывающие процессы полимеризации, что является особенно важным при моделировании сложных реакционных сред и неоднородных материалов. Эти методы обеспечивают высокую точность и стабильность численного решения даже для больших систем уравнений, что делает их предпочтительными для применения в инженерных расчетах.

В рамках данного исследования будет рассмотрена возможность применения методов сопряженных систем для описания процессов полимеризации различных типов полимеров. Основной упор будет сделан на исследование влияния различных параметров процесса на конечные характеристики продукции. Таким образом, результаты данного исследования могут значительно способствовать разработке новых методов и технологий в области полимерной науки и технологий, улучшая эффективность

---

\*Исследование выполнено в рамках государственного задания (код научной темы FZWU-2023-0002)

производственных процессов и снижая экологическое воздействие промышленности на окружающую среду.

## **Литература**

1. Марчук Г.И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. Доклад лауреата Большой золотой медали Российской академии наук имени МВ Ломоносова 2004 года академика ГИ Марчука // Вестник Российской академии наук. 2005. Т. 75, № 10. С. 911–916.
2. Подвальный С.Л. Многоальтернативное управление экспериментом с использованием моделей сопряженных систем // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2016. Т. 12, № 4. С. 19–25.
3. Алексеев А.К., Бондарев А.Е. Применение сопряженных уравнений и визуальное представление сопряженных параметров в задачах идентификации и управления течением // Препринты Института прикладной математики им. МВ Келдыша РАН. 2011. № 50. 24 с.

MSC 37N99

## On the possibility of using the method of conjugate systems in problems of describing chemical polymerization processes

S.I. Mustafina, E.R. Gizzatova

Ufa University of Science and Technology

*Abstract:* This work explores the application of coupled systems methods in modeling polymerization processes. Coupled systems methods demonstrate high efficiency in solving systems of differential equations characterizing complex reaction media and inhomogeneous materials. The research aims to optimize the polymerization processes of various types of polymers in order to improve product quality and reduce the environmental impact of the industry.

*Keywords:* conjugated systems, polymerization processes, mathematical modeling.

### References

1. Marchuk G.I. Conjugate equations and analysis of complex systems. Report of the winner of the Great Gold Medal of the Russian Academy of Sciences named after MV Lomonosov in 2004, Academician GI Marchuk // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. 2005. V. 75, No. 10. P. 911–916.
2. Podvalny S.L. Multi-alternative control of an experiment using models of coupled systems // Bulletin of the Voronezh State Technical University. 2016. V. 12, No. 4. P. 19-25.
3. Alekseev A.K., Bondarev A.E. Application of conjugate equations and visual representation of conjugate parameters in problems of identification and flow control // Preprints of the Institute of Applied Mathematics. MV Keldysh RAS. 2011. No. 50. 24 p.

УДК 512.64

## Об алгебро-геометрических свойствах суммы циклических подпространств относительно линейного оператора

Никонов В.И.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

*Аннотация:* Исследуются алгебраические и геометрические свойства суммы циклических подпространств относительно линейного оператора, возникающих при исследовании линейных систем управления. Полученные свойства выражены в терминах минимальных аннулирующих многочленов суммы и пересечения соответствующих циклических подпространств. Рассматриваются канонические формы линейного оператора как в частично согласованных базисах подпространств так и в циклическом базисе суммы этих подпространств.

*Ключевые слова:* линейный оператор, циклическое подпространство, минимальный аннулирующий многочлен.

### 1. Канонические формы линейного оператора относительно суммы двух циклических подпространств

В данной работе представлены результаты исследований, начатых в [1–3], а также развитие результатов [4, 5]. Так, в работе [3] исследованы взаимосвязи базисов двух циклических подпространств с минимальными аннулирующими многочленами этих подпространств относительно заданного линейного оператора в предположении, что базис пересечения подпространств содержит векторы циклического базиса. В этой работе рассматривается обобщение полученных результатов.

Рассмотрим линейный оператор

$$\mathcal{D} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L},$$

где  $\mathcal{L}$  – конечномерное действительное линейное пространство. Пусть  $\dim \mathcal{L} = n$ .

Пусть  $a$  и  $b$  заданные ненулевые элементы линейного пространства  $\mathcal{L}$ .

Рассмотрим циклические подпространства  $U_a$  и  $U_b$  линейного оператора  $\mathcal{D}$ , порождаемые элементами  $a$  и  $b$ :

$$U_a = \langle a, \mathcal{D}a, \dots, \mathcal{D}^{m-1}a \rangle, \dim U_a = m,$$

$$U_b = \langle b, \mathcal{D}b, \dots, \mathcal{D}^{n-1}b \rangle, \dim U_b = p.$$

Таким образом, минимальные аннулирующие многочлены элементов  $a$  и  $b$  имеют, соответственно, вид

$$\sigma_a(\lambda) = \lambda^m + \alpha_m \lambda^{m-1} + \dots + \alpha_2 \lambda + \alpha_1,$$

$$\sigma_b(\lambda) = \lambda^p + \beta_p \lambda^{p-1} + \dots + \beta_2 \lambda + \beta_1.$$

Рассмотрим подпространства  $U_a + U_b$  и  $U_a \cap U_b$ . Построим базис пространства, который был бы частично согласован с базисом подпространства  $U_a + U_b$ .



**Предположение 1.** *Линейное подпространство  $U_a \cap U_b$ , является инвариантным подпространством линейного оператора  $\mathcal{D}$  в подпространстве  $U_a + U_b$ .*

*Доказательство.*  $\forall x \in U_a \cap U_b \Rightarrow x \in U_a, x \in U_b \Rightarrow \mathcal{D}x \in U_a, \mathcal{D}x \in U_b \Rightarrow \mathcal{D}x \in U_a \cap U_b \Rightarrow \mathcal{D}(U_a \cap U_b) \subset U_a \cap U_b$ .

*Доказательство завершено.*

**Предположение 2.** *Если  $\dim(U_a \cap U_b) = k > 0$ , то в линейном пространстве  $\mathcal{L}$  можно выбрать частично согласованный базис относительно подпространства  $U_a + U_b$  в котором матрица оператора ограничения на это подпространство принимает канонический вид:*

$$D'_{U_a+U_b} = \left( \begin{array}{cccc|ccc|cccc} 0 & \cdots & 0 & -\theta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & -\theta_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\theta_{m-k} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \chi_1 & \eta_{11} & \cdots & \eta_{1k} & 0 & \cdots & 0 & \xi_1 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \chi_k & \eta_{k1} & \cdots & \eta_{kk} & 0 & \cdots & 0 & \xi_k & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\mu_1 & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\mu_2 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\mu_{p-k} & & \end{array} \right),$$

где

$$\sigma_a(\lambda) = (\lambda^{m-k} + \theta_{m-k}\lambda^{m-k-1} + \cdots + \theta_2\lambda + \theta_1) \cdot \det(\eta - \lambda E_k),$$

$$\sigma_b(\lambda) = (\lambda^{p-k} + \mu_{p-k}\lambda^{p-k-1} + \cdots + \mu_2\lambda + \mu_1) \cdot \det(\eta - \lambda E_k),$$

$$D'_{U_a \cap U_b} = \eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \cdots & \eta_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{k1} & \cdots & \eta_{kk} \end{pmatrix}, \quad E_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

**Предположение 3.** *Если  $\exists i(j) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\mathcal{D}^i a \in U_a \cap U_b$  ( $\mathcal{D}^j b \in U_a \cap U_b$ ), то  $\mathcal{D}^{i+s} a \in U_a \cap U_b$  ( $\mathcal{D}^{j+s} b \in U_a \cap U_b$ )  $\forall s \in \mathbb{N}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\exists i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mathcal{D}^i a \in U_a \cap U_b$ . По предположению 1 подпространство  $U_a \cap U_b$  инвариантно относительно линейного оператора  $U_a \cap U_b$  инвариантное подпространство относительно  $\mathcal{D}$ . Следовательно,  $\mathcal{D}^s \mathcal{D}^i a = \mathcal{D}^{i+s} a \in U_a \cap U_b \forall s \in \mathbb{N}$ .

*Доказательство завершено.*

**Следствие 1.** Если  $a \in U_a \cap U_b$ , то  $U_a \cap U_b = U_a$ .

**Следствие 2.** Если  $b \in U_a \cap U_b$ , то  $U_a \cap U_b = U_b$ .

**Предположение 4.**  $U_{a+b}$  является циклическим инвариантным подпространством относительно линейного оператора  $\mathcal{D}$ , причем

$$1) \sigma_{a+b}(\lambda) = (\lambda^{m-k} + \theta_{m-k}\lambda^{m-k-1} + \dots + \theta_2\lambda + \theta_1) \cdot \det(\eta - \lambda E_k) \cdot (\lambda^{p-k} + \mu_{p-k}\lambda^{p-k-1} + \dots + \mu_2\lambda + \mu_1), \quad (1)$$

$$2) U_{a+b} = \langle a + b, \mathcal{D}(a + b), \dots, \mathcal{D}^{m+p-k}(a + b) \rangle, \quad \dim U_{a+b} = m + p - k. \quad (2)$$

$$3) D''_{U_{a+b}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -\omega_1 \\ 1 & \dots & 0 & -\omega_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\omega_{m+p-k} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

## 2. Пример

Пусть матрица оператора  $\mathcal{D}$  в некотором базисе пространства  $\mathbb{R}^5$  имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 6 & -6 & -2 \\ -\frac{6}{5} & \frac{13}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{14}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{5}{5} & \frac{10}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{41}{5} & \frac{32}{5} & -\frac{34}{5} & \frac{53}{5} & \frac{13}{5} \end{pmatrix}.$$

Пусть векторы  $a = \left(2, \frac{3}{5}, \frac{1}{10}, -\frac{3}{2}, -\frac{21}{10}\right)$  и  $b = \left(2, \frac{2}{5}, -\frac{1}{10}, -\frac{3}{2}, -\frac{29}{10}\right)$  являются образующими векторами инвариантных циклических подпространств

$$U_a = \left\langle \left(2, \frac{3}{5}, \frac{1}{10}, -\frac{3}{2}, -\frac{21}{10}\right), \left(3, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, -2, -\frac{9}{5}\right), \left(5, \frac{8}{5}, \frac{13}{5}, -3, -\frac{8}{5}\right) \right\rangle,$$

$$U_b = \left\langle \left(2, \frac{2}{5}, -\frac{1}{10}, -\frac{3}{2}, -\frac{29}{10}\right), \left(5, -\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -3, -\frac{19}{5}\right) \right\rangle$$

линейного оператора  $\mathcal{D}$ .

Минимальные аннулирующие многочлены элементов  $a$  и  $b$  имеют, соответственно, вид

$$\sigma_a(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6, \sigma_b(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4.$$

Таким образом,  $\dim U_a = 3$ ,  $\dim U_b = 2$ ,  $\dim(U_a + U_b) = 4 \Rightarrow \dim(U_a \cap U_b) = 1$ . Находим инвариантное подпространство  $U_a \cap U_b = \langle e \rangle = \langle (-5, -3, 2, 5, 13) \rangle$ .

Выбираем канонический базис подпространства  $U_a + U_b$  частично согласованный с базисами подпространств  $U_a$  и  $U_b$ :

$$U_a + U_b = \langle a, \mathcal{D}a, e, b \rangle.$$

Тогда матрица оператора в новом базисе принимает вид:

$$D'_{U_a+U_b} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$D'_{U_a} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}, \quad D'_{U_b} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D'_{U_a \cap U_b} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем другой канонический (циклический) базис в подпространстве  $U_a + U_b = U_{a+b}$ :

$$U_{a+b} = \left\langle (4, 1, 0, -3, -5), \left(8, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}, -5, -\frac{28}{5}\right), (22, -1, 7, -12, -9), \left(74, -\frac{39}{5}, \frac{131}{5}, -38, -\frac{121}{5}\right) \right\rangle.$$

Матрица ограничения линейного оператора  $\mathcal{D}$  на подпространство  $U_a + U_b$  принимает другой канонический вид в новом базисе, не согласованном с базисами подпространств  $U_a$  и  $U_b$ :

$$D''_{U_a+U_b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -24 \\ 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

## Литература

1. Никонов В.И. К частичной устойчивости линейных систем относительно заданной компоненты фазового вектора // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 23, № 1. С. 43–57.
2. Никонов В.И. Геометрический аспект устойчивости линейных систем относительно части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 2. С. 95–99.

3. Никонов В.И. Об алгебро-геометрических свойствах циклических подпространств линейных операторов [Электронный ресурс] // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: X Международная научная молодежная школа-семинар имени Е.В. Воскресенского (Саранск, 14-18 июля 2022 г.). С. 145-148.
4. Воротников В. И., Румянцев В.В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. Научный мир, 2001. 320 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц М.: Наука, 1967. 576 с.

MSC 15A21

## On algebraic-geometric properties of the sum of cyclic subspaces with respect to a linear operator

V.I. Nikonov

National Research Mordovia State University

*Abstract:* The algebraic and geometric properties of the sum of cyclic subspaces with respect to a linear operator, which arise in the study of linear control systems, are investigated. The resulting properties are expressed in terms of minimal annihilating polynomials of the sum and intersection of the corresponding cyclic subspaces. The canonical forms of the linear operator are considered both in partially consistent bases of subspaces and in the cyclic basis of the sum of these subspaces.

*Keywords:* linear operator, cyclic subspace, minimal annihilating polynomial.

### References

1. Nikonov V.I. On the partial stability of linear systems with respect to a given component of the phase vector // Journal of the Middle Volga Mathematical Society. 2017. 23. 1. P. 43-57.
2. Nikonov V.I. Geometric aspect of stability of linear systems with respect to part of the variables // Journal of the Middle Volga Mathematical Society. 2011. 13. 2. P. 95-99.
3. Nikonov V.I. On the algebraic-geometric properties of cyclic subspaces of linear operators [Electronic resource] // Mathematical modeling, numerical methods and program complexes: X International scientific youth school-seminar named after E.V. Voskresensky (Saransk, July 14-18, 2022). P. 145-148.
4. Vorotnikov V.I., Rumyantsev V.V. Stability and control with respect to the coordinates of the phase vector of dynamical systems: theory, methods and applications. Scientific world. M. 2001. 320 p.
5. Gantmakher F.R. The theory of matrices. Nauka. M. 1967. 576 p.

УДК 519.63

## Возмущенные уравнения для моделирования вспышек при инвазионных процессах\*

Переварюха А.Ю.

Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН

*Аннотация:* Инвазионные процессы в изолированных средах представляют собой сложный комплекс нелинейных явлений современной экодинамики с обратными связями. Происходящие после вселения чужеродного биотического агента (вируса, патогенного микроба или беспозвоночного) с чрезмерно высоким для новой среды репродуктивным потенциалом приводит к активизации процессов противоборства со взаимной эволюционной адаптацией сторон – автохтонного окружения и чужеродного вселенца. Часто развивается эффект разрушительной вспышки численности, который может быть пролонгированным во времени и пространстве. В некоторых ситуациях вселенец разрушает свою среду, так как адаптация сопротивления запаздывает. Возникает два фактора запаздывания – восполнения ресурсов среды и задержка выработки ответа от окружения. В докладе предлагаются уравнения с запаздыванием для моделирования вариантов развития инвазий. Модели созданы с учетом фактора неопределенности в скорости выработки реакции на вторжение опасного вида, но при этом возмущение достаточно ограничено и никогда в реальности не приводит к стохастической динамике биофизического процесса.

*Ключевые слова:* инвазии, адаптации, уравнения с ограниченным возмущением.

### 1. Проблема моделирования разнообразия инвазий

Из-за климатической нестабильности и неразумной хозяйственной деятельности проблема моделирования экстремального характера развития биологической инвазии для прогнозирования мер противодействия актуальна и не решена. Кризис биоресурсов, деградация ценных лесов и биологическое загрязнение происходят при вторжении в среду чужеродного вида с некомпенсируемым репродуктивным потенциалом. Стремительные инвазионные процессы часто переходят в экстремальный режим и не моделируются балансовыми уравнениями со степенной регуляцией. Для ряда инвазий наблюдается формирование серий популяционных волн и пульсирующих вспышек численности с пилообразной формой затухающих колебаний на графиках. В работе предложены гибридные переопределяемые дифференциальные уравнения с запаздыванием для описания пульсирующих вспышек при медленной адаптации автохтонного биотического окружения к атакам вселенца. Исследуемые явления характерны и для современной эпидемической динамики при образовании повторных волн распространения коронавируса. Решение модели демонстрирует затухание серии пиков с возможностью повторных серий волн, возникших из-за возмущения базового репродуктивного параметра распространения чужеродного организма. Существует много видов уравнений с запаздыванием, но в работе исследуется целесообразность

---

\*Работа выполнена по проекту РНФ N 23-21-00339 «Разработка методов сценарного моделирования экстремальных инвазионных процессов в экосистемах с учетом факторов противодействия на основе динамически переопределяемых вычислительных структур».

дополнения моделей вариативными функциями затухания.

## 2. Метод построения модели противодействия

Цель создания моделей вида  $\dot{N} = F(N(t - \tau)) - \Psi(N(t - \nu))$  с ограниченным возмущением – анализ стадий инвазионного процесса на основе уравнений, где стохастические факторы учтены с методом возмущения запаздывания. Проблема моделируемой ситуации инвазии – регулируемое противодействие агрессивно размножающему виду в биологическом сообществе вырабатывается с запаздыванием и приводит к резкому переходу в фазу депрессии численности вселенца, но это запаздывание не константа. Направление получило развитие в модификации с  $\dot{N} = rF(N(t))^\ominus$ :

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \frac{(1 - N(t)/(K + \vartheta N))^\ominus}{(1 - N(t))/K(1 - \gamma)}.$$

Решения подобных моделей описывают уравнивающиеся процессы  $\forall N(0) > 0$ . Не все уравнения имеет смысл дополнять включением  $t - \tau$ . Отличие моделей ограниченного роста – положение точки перегиба  $N_p \neq 0$  на графике  $N(t)$ . Для модели ордината точки перегиба  $N_p = \frac{K}{2}$ , абсцисса  $t_p = r^{-1} \ln \frac{K - N(0)}{N(0)}$ . Положение ординаты точки перегиба  $N_p$  установим для оптимальной эксплуатации с изъятием  $\dot{N} = rf(N(t)) - Q$ .

Сравним динамику модели инвазионного процесса для агрессивного вселенца с  $N(t - \tau)$  и модель инвазии в форме уравнения с отклоняющимся аргументом, где величина запаздывания  $\tau$  возмущена равномерно распределенной случайной величиной  $\gamma \in [-0.5, 0.5]$ , что отражает влияние случайных факторов на небольшую исходную группу особей-вселенцев. Для включения стохастической компоненты лучше возмущать именно величину запаздывания  $\gamma\tau$ , что качественно отразится на сценариях завершения инвазионного процесса [1]. Эффекты запаздывания разделены на три типа по биологическому генезису и роли в развитии процессов [3]. Инвазионные процессы проходят этап кризисной динамики  $N(t) \rightarrow 0 + \epsilon$  и сопровождаются длительными осцилляциями. В результате биосистема получит несколько сценариев динамики кризиса, включая гибель  $N(t_\infty) = 0$ .

Зададим пороговое развитие инвазионного популяционного процесса в уравнении с функцией сопротивления среды  $\dot{N} = F(N(t - \tau)) - \Psi(N(t - \nu))$ . Пороговый эффект реакции агрессивному росту численности вселенца выразим  $\ln_K$ -регуляцией в функции противодействия  $\Psi(N(t - \nu))$  и при  $Q > q$ ,  $m \geq 2$ ,  $N(0) < J < K$ . Запаздывание  $\nu$  в модели возмущенно равномерно распределенной случайной величиной  $\nu \times \gamma$  на отрезке  $[0, 0.5\nu]$ :

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left( \frac{K}{N(t - \tau)} \right) - Q \frac{N^m(t - \nu \times \gamma)}{(J - N(t))^2} - qN(t). \quad (1)$$

Вместо стабилизации  $N(t) \rightarrow K$ ,  $N(t_S) < K$  и превышения равновесия  $K$  стадия кризиса с возрастанием  $F(N^2; J^{-1})$  при  $N \rightarrow J$  и потенциал роста не нивелирован  $\ln_K$ -регуляцией. Время активации вариативно, но не менее  $\tau_1$  [4]. Пусть  $\tau_1$  варьируется случайной величиной  $\gamma$  в ограниченном диапазоне. Предложим модель с возмущенным равномерной случайной величиной запаздыванием  $(t - \tau_1\gamma)$ :

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left( \frac{K}{N(t - \tau\gamma)} \right) - \frac{\delta N^2(t - \tau_1\gamma)}{(J - N(t))^2} - qN(t), \quad \delta > q, \quad \gamma(\omega) \in [1, 2]. \quad (2)$$

При приближении  $N(t)$  к пороговому значению  $J$ ,  $N(0) < J < K$  происходит резкий переход в глубокий популяционный кризис  $N(t) \rightarrow 0 + \epsilon$ . Сценарий преодоления кризиса с образованием колебаний  $N(t) \rightarrow N_*(t)$ ,  $\max N_*(t) < J$  зависит от стохастических временных факторов. Популяция погибает при увеличении репродуктивного потенциала  $r$ . Можно показать, что существует  $r = \bar{r}$ , такое что для события  $\lim_{t \rightarrow \bar{t}} N(t; \bar{r}\tau) = 0$  вероятность  $P > 0$ , и существует  $\hat{r} > \bar{r}$ ,  $t < \infty$ , при котором для данного события справедливо  $P = 1$ . Здесь  $\hat{r}$  критический порог для увеличения инвазионным агентом своей репродуктивной активности. Быстрое размножение при дисбалансе со скоростью восстановления ресурсов приведет к деградации инвазионной популяции и, соответственно, долгому восстановлению среды [5]. Так, самшитовая огневка в Краснодарском крае попутно уничтожила свою новую перспективную среду обитания.

## Литература

1. Переварюха А.Ю. Моделирование эффекта волнообразной кривой воспроизводства популяций рыб // Экологические системы и приборы. 2008. № 8. С. 41–44.
2. Perevaryukha A.Y. An iterative continuous-event model of the population outbreak of a phytophagous Hemipteran // Biophysics. 2016. Vol. 61, № 2. P. 334–341.
3. Переварюха А.Ю. Интерпретация поведения моделей динамики биоресурсов и моментальная хаотизация в новой модели // Нелинейный мир. 2012. Т. 10, № 4. С. 255–262.
4. Переварюха А.Ю. Моделирование неустойчивого критического равновесия в популяционной динамике // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2013. № 45. С. 82–91.
5. Дубровская В.А., Трофимова И.В. Модель динамики структурированных субпопуляций осетровых рыб Каспия с учетом отклонений в темпах развития молоди // Журнал Белорусского государственного университета. Биология. 2017. № 3. С. 76–86.



MSC 93A99

## Perturbed equations for modeling outbreaks during invasive processes

A.Y. Perevaryukha

St. Petersburg Federal Research Center RAS

*Abstract:* Invasive processes in isolated environments represent a complex set of non-linear phenomena of modern ecodynamics with feedback. Occurring after the invasion of a foreign biotic agent (virus, pathogenic microbe or invertebrate) with a reproductive potential that is excessively high for the new environment, it leads to the activation of processes of confrontation with the mutual evolutionary adaptation of the parties – the autochthonous environment and the alien invader. The effect of a destructive outbreak of numbers often develops, which can be prolonged in time and space. In some situations, the invader destroys its environment because adaptation of the resistance is delayed. Two delay factors arise: the replenishment of environmental resources and the delay in developing a response from the environment. The report proposes lagged equations for modeling the evolution of invasions. The models were created taking into account the uncertainty factor in the speed of development of a reaction to the invasion of a dangerous species, but the disturbance is quite limited and never in reality leads to stochastic dynamics of the biophysical process.

*Keywords:* invasions, adaptations, equations with limited disturbance.

### References

1. Perevaryukha A.Yu. Modeling the effect of a wavy curve of fish population reproduction // Ecological systems and devices. 2008. 8. P. 41–44. (in Russian).
2. Perevaryukha A.Y. An iterative continuous-event model of the population outbreak of a phytophagous Hemipteran // Biophysics. 2016. Vol. 61, No. 2. P. 334–341.
3. Perevaryukha A.Yu. Interpretation of the behavior of models of bioresource dynamics and instantaneous chaos in a new model // Nonlinear World. 2012. Vol. 10, No. 4. P. 255–262.
4. Perevaryukha A.Yu. Modeling of unstable critical equilibrium in population dynamics // Problems of mechanics and control: Nonlinear dynamic systems. 2013. No. 45. P. 82–91.
5. Dubrovskaya V.A., Trofimova I.V. Model of the dynamics of structured subpopulations of sturgeon in the Caspian Sea, taking into account deviations in the rate of development of juveniles // Journal of the Belarusian State University. Biology. 2017. No. 3. P. 76–86.

УДК 517.977.56

## Математическая модель волнового процесса с сетевым носителем

Перова И.В.

Воронежский государственный университет

*Аннотация:* В работе представлен подход построения математической модели волнового процесса упругой сетевой конструкции и достаточные условия слабой разрешимости соответствующей начально-краевой задачи. Доказательство теоремы существования слабого решения использует метод Фэдо-Галеркина со специальным базисом, определяемым системой обобщенных собственных функций эллиптического оператора задачи. Полученные результаты могут быть использованы при решении задач оптимального управления дифференциальными системами в различных направлениях прикладного характера.

*Ключевые слова:* волновое уравнение, начально-краевая задача, слабое решение.

### 1. Основные понятия и предложения.

В работе используются обозначения, понятия и определения, введенные в работе [1]:  $\Gamma$  – ориентированный геометрический граф;  $\partial\Gamma$  – множество граничных и  $J(\Gamma)$  – множество внутренних узлов графа  $\Gamma$ ;  $\Gamma_0$  – множество всех рёбер, не содержащих концевых точек,  $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0, T)$  ( $\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0, t)$ ),  $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0, T)$ .

Введем необходимые пространства:

·  $L_2(\Gamma)$  – пространство функций, суммируемых с квадратом на  $\Gamma$  (аналогично определяется пространство  $L_2(\Gamma_T)$ ), ·  $W_2^1(\Gamma)$  – пространство функций из  $L_2(\Gamma)$ , имеющих обобщенную производную 1-го порядка также из  $L_2(\Gamma)$ , норма в  $W_2^1(\Gamma)$  определяется скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^1(\Gamma)} = \int_{\Gamma} (u(x)v(x) + u'(x)v'(x)) dx;$$

·  $L_{2,1}(\Gamma_T)$  – пространство функций из  $L_1(\Gamma_T)$  с нормой

$$\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int_0^T \left( \int_{\Gamma} u^2(x, t) dx \right)^{1/2} dt;$$

·  $W_2^1(\Gamma_T)$  – пространство функций  $u(x, t) \in L_2(\Gamma_T)$ , имеющих обобщенные производные 1-го порядка по  $x$  и  $t$ , принадлежащих  $L_2(\Gamma_T)$ , норма в  $W_2^1(\Gamma_T)$  определяется соотношением

$$\|u\|_{W_2^1(\Gamma_T)}^2 = \int_{\Gamma_T} (u(x, t)^2 + u_x(x, t)^2) dx dt.$$

Пусть далее  $V_2(\Gamma_T)$  – множество всех функций  $u(x, t) \in W_2^1(\Gamma_T)$ , имеющих конечную норму

$$\|u\|_{2, \Gamma_T} \equiv \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|_{L_2(\Gamma)} + \|u_x\|_{L_2(\Gamma_T)}.$$

Рассмотрим билинейную форму

$$\ell(\mu, v) = \int_{\Gamma} (a(x)\mu'(x)v'(x) + b(x)\mu(x)v(x)) dx,$$

где  $a(x), b(x)$  – фиксированные измеримые ограниченные на  $\Gamma_0$  функции, суммируемые с квадратом:  $0 < a_* \leq a(x) \leq a^*, b_* \leq b(x) \leq b^*, x \in \Gamma_0$  ( $a_*, a^*, b_*, b^*$  – фиксированные постоянные). В пространстве  $W_2^1(\Gamma)$  есть множество  $\Omega$  функций  $u(x) \in C(\Gamma)$  ( $C(\Gamma)$  – пространство непрерывных на  $\Gamma$  функций), удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} u'(1)_{\gamma_j} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} u'(0)_{\gamma_j}$$

во всех узлах  $\xi \in J(\Gamma)$  (здесь  $R(\xi)$  – множество ребер, ориентированных «к узлу  $\xi$ »,  $r(\xi)$  – множество ребер ориентированных «от узла  $\xi$ »). Замыкание в норме  $W_2^1(\Gamma)$  множества функций из  $\Omega$ , равных нулю во всех узлах  $\xi \in \partial\Gamma$ , обозначим через  $W_{2,0}^1(a, \Gamma)$ .

Пусть далее  $\Omega_0(a, \Gamma_T)$  – множество функций  $u(x, t) \in V_2(\Gamma_T)$ , чьи следы определены на сечениях области  $\Gamma_T$  плоскостью  $t = t_0$  ( $t_0 \in [0, T]$ ) как функции класса  $W_{2,0}^1(a, \Gamma)$ , т.е. для каждого элемента  $u \in \Omega_0(a, \Gamma_T)$  при фиксированном  $t \in [0, T]$  существует последовательность  $\{u_n\}$  функций  $u_n(x, t) \in \Omega$ , сходящаяся в норме  $W_2^1(\Gamma)$  к следу  $v$ , при этом  $u_n(x, t)$  равны нулю во всех узлах  $\xi \in \partial\Gamma$ , непрерывны на  $\Gamma$  и удовлетворяют соотношениям согласования

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} u_x(1, t)_{\gamma_j} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} u_x(0, t)_{\gamma_j}$$

для всех узлов  $\xi \in J(\Gamma)$ .

Пусть  $W_a^1(\Gamma_T)$  – замыкание в норме  $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$  множества гладких функций, удовлетворяющих соотношениям согласования для всех узлов  $\xi \in J(\Gamma)$  и для любого  $t \in [0, T]$ , а также равных нулю вблизи  $\partial\Gamma \times [0, T]$ .

## 2. Постановка задачи

В пространстве  $W_a^1(\Gamma_T)$  изучается третья начально-краевая задача, граничные условия которой сведены к однородным:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + b(x)u(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (2)$$

$$\left( a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \sigma u(x, t) \right) \Big|_{\partial\Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Здесь  $\sigma$  – заданная постоянная,  $\varphi(x) \in W_a^1(\Gamma)$ ,  $\psi(x) \in L_2(\Gamma)$ ,  $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ . Для коэффициентов  $a(x)$  и  $b(x)$  имеют место предположения

$$0 < a_* \leq a(x) \leq a^*, \quad b_* \leq b(x) \leq b^*. \quad (4)$$

**Определение 1.** Слабым решением класса  $W_2^1(\Gamma_T)$  начально-краевой задачи (1)-(3) называется функция  $u(x, t) \in W_a^1(\Gamma_T)$ , равная  $\varphi(x)$  при  $t = 0$  и удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{\Gamma_T} \left( -\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} + b(x) u(x, t) \eta(x, t) \right) dx dt + \int_0^T \sum_{\zeta \in \partial \Gamma} \sigma u(x, t) \eta(x, t) dt \Big|_{x=x_\zeta \subset \zeta} = \int_{\Gamma} \psi(x) \eta(x, 0) dx + \int_{\Gamma_T} f(x, t) \eta(x, t) dx dt$$

при любых  $\eta(x, t) \in \overline{W}_a^1(\Gamma_T)$  (элементы пространства  $\overline{W}_a^1(\Gamma_T)$  принадлежат  $W_a^1(\Gamma_T)$  и удовлетворяют равенству  $\eta(x, T) = 0$ ).

Рассмотрим  $W_a^2(\Gamma_T)$  – пространство функций  $u(x, t)$  из  $W_a^1(\Gamma_T)$ , имеющих обобщенные производные  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$  из  $L_2(\Gamma_T)$ .

Для решений  $u(x, t)$  начально-краевой задачи (1)-(3) в пространстве  $W_a^2(\Gamma_T)$  можно дать априорную оценку через начальные данные  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $f(x, t)$  задачи (1)-(3). А именно, для любых  $t \in [0, T]$  установлена априорная оценка решения  $u(x, t)$  задачи (1)-(3), принадлежащего пространству  $W_a^2(\Gamma_T)$ :

$$\sqrt{\int_{\Gamma} (u^2 + u_t^2 + u_x^2) dx} \leq C_1(t) \omega^{1/2}(0) + C_2(t) P f P_{2, \Gamma_t}, \quad (5)$$

где  $C_1(t)$  и  $C_2(t)$  определяются постоянными  $a_*$ ,  $a^*$ ,  $b^*$  и временем  $t$ .

**Теорема 1.** Для решений  $u(x, t) \in W_a^2(\Gamma_T)$  начально-краевой задачи (1)-(3) при выполнении предположений (4) имеет место априорная оценка (5) для любого  $t \in [0, T]$ .

**Замечание 2.** Соотношение (5) является аналогом энергетического неравенства для гиперболической системы (1) с распределенными параметрами на графе  $\Gamma$ , позволяющее оценить норму решения  $u(x, t)$  в пространстве  $W_a^1(\Gamma_T)$  через начальные данные  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  и внешнюю силу  $f(x, t)$ . Нетрудно получить аналогичную оценку энергетической нормы решения  $u(x, t)$ .

Условия существования слабого решения начально-краевой задачи (1)-(3) представлены следующей теоремой.

**Теорема 2.** Для любых  $\varphi(x) \in W_a^1(\Gamma)$ ,  $\psi(x) \in L_2(\Gamma)$ ,  $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$  при выполнении предположений (4) начально-краевая задача (1)-(3) имеет по меньшей мере одно слабое решение из пространства  $W_a^1(\Gamma_T)$ .

Для доказательства утверждения теоремы используется метод Фаэдо-Галеркина со специальным базисом, определяемым системой обобщенных собственных функций эллиптического оператора задачи (1)-(3).

Представленные результаты могут быть использованы при решении задач оптимального управления дифференциальными системами в различных направлениях прикладного характера.

## **Литература**

1. Махинова О.А., Волкова А.С. Устойчивость разностной схемы для эллиптического уравнения с распределенными параметрами на графе // Системы управления и информационные технологии. 2014. № 1. С. 23–29.
2. Игонина Е.В., Перова И.В., Приходько И.В., Абреимов М.П. Оптимизация волновых процессов в пространственной сети // Системы управления и информационные технологии. 2024. № 1-1 (95). С. 10–15.
3. Провоторов В.В. К вопросу построения граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы «мачта-растяжки» // Системы управления и информационные технологии. 2008. № 2-2 (32). С. 293–297.

MSC 74J30

## A mathematical model of the wave process with a network carrier

I.V. Perova

Voronezh State University

*Abstract:* The paper presents an approach to constructing a mathematical model of the wave process of an elastic network structure and sufficient conditions for weak solvability of the corresponding initial boundary value problem. The proof of the theorem of the existence of a weak solution uses the Faedo-Galerkin method with a special basis determined by a system of generalized eigenfunctions of the elliptic operator of the problem [1]. The results obtained can be used in solving problems of optimal control of differential systems in various directions of an applied nature.

*Keywords:* wave equation, initial boundary value problem, weak solution.

### References

1. Makhinova O.A., Volkova A.S. Ustoichivost' raznostnoi skhemy dlya ehllipticheskogo uravneniya s raspredelennymi parametrami na grafe // Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii. 2014. № 1. P. 23–29.
2. Igonina E.V., Perova I.V., Prikhod'ko I.V., Abreimov M.P. Optimizatsiya volnovykh protsessov v prostranstvennoi seti // Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii. 2024. № 1-1 (95). P. 10–15.
3. Provotorov V.V. K voprosu postroeniya granichnykh upravlenii v zadache o gashenii kolebanii sistemy «machta-rastyazhki» // Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii. 2008. № 2-2 (32). P. 293–297.

УДК 519.63

## **Численное моделирование химически активных дозвуковых потоков под воздействием лазерного излучения\***

Пескова Е.Е., Язовцева О.С.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

*Аннотация:* Работа посвящена построению вычислительного алгоритма для математической модели дозвукового потока под воздействием лазерного излучения с учетом вязкости, теплопроводности и химических реакций в осесимметричной постановке. При разработке алгоритма применен принцип расщепления по физическим процессам. Для снятия ограничения на шаг интегрирования по времени, связанного с диффузионными процессами, применена схема локальных итераций на основе упорядочивания корней полиномов Чебышева. Алгоритм верифицирован сравнением с результатами работы ранее построенного алгоритма на основе интегро-интерполяционного метода. Выявлена высокая эффективность нового алгоритма при сохранении точности расчетов.

*Ключевые слова:* схема локальных итераций, дозвуковое течение, лазерное излучение, математическое моделирование, вычислительный алгоритм.

Дозвуковые потоки повсеместно встречаются в технике и природе, этим обусловлен интерес к ним со стороны исследователей в области математического моделирования. Примерами решаемых с использованием математического аппарата задач могут быть: расчет фронта горения в каналах различной формы [1], моделирование гидродинамических волн [2], исследование химических процессов в зернах катализатора [7] и т.д.

Построение вычислительных алгоритмов для исследования дозвуковых газовых потоков под воздействием лазерного излучения с учетом вязкости, теплопроводности и химических реакций является актуальной задачей, которая позволит предсказать поведение системы при различных условиях проведения эксперимента [4, 5]. Как известно, явные вычислительные алгоритмы для задач, сочетающих в себе разномасштабные процессы, требуют шага интегрирования по времени, отвечающего диффузионным ограничениям, и не позволяют проводить серийные расчеты на компьютерах умеренной производительности. Использование неявных схем снимает ограничение на шаг интегрирования по времени, но является трудоемким при наличии большого количества нелинейных источников членов и теплофизических характеристик газовой смеси, нелинейно зависящих от температуры.

Целью настоящей работы является разработка вычислительного алгоритма для моделирования химически активных дозвуковых потоков под воздействием лазерного излучения, суть которого заключается в снятии ограничения на шаг интегрирования по времени, связанного с диссипативными процессами.

Ранее авторами был построен вычислительный алгоритм для решения многокомпонентных уравнений Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха с учетом химических реакций, показавший возможность снять диффузионные ограничения

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 23-21-002, <https://rscf.ru/project/23-21-00202/>.

на шаг интегрирования по времени [8] посредством использования схемы локальных итераций [7]. Алгоритм прошел валидацию и верификацию посредством сравнения с аналитическими решениями и другими пакетами программ. В настоящей работе математическая модель дополнена учетом лазерного излучения, направленного соосно с газовым потоком посредством включения источников члена в уравнение энтальпии смеси и ОДУ для интенсивности излучения [8].

В основе вычислительного алгоритма лежит принцип расщепления по физическим процессам. Для этого внутри одного шага по времени решаются следующие задачи:

1. Задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений: расчет динамики концентраций веществ в процессе химических превращений проводится трехстадийным неявным методом Рунге-Кутты пятого порядка точности [9].

2. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения: расчет интенсивности лазерного излучения вдоль направления газового потока проводится трехстадийным неявным методом Рунге-Кутты пятого порядка точности.

3. Гиперболическая задача: конвективные потоки вычислены с помощью потоков Русанова с модификацией стабилизирующего члена.

4. Параболическая задача: расчет диффузионных потоков реализован с использованием метода локальных итераций на основе упорядочивания корней многочленов Чебышева [7].

5. Эллиптическая задача: динамическая составляющая давления находится посредством решения уравнения Пуассона методом Якоби.

Вычислительные эксперименты проводились в осесимметричной геометрии течения на примере процесса неокислительной конверсии метана [10]. Исследование сходимости и устойчивости вычислительного алгоритма проведено на сгущающихся сетках. За счет применения метода локальных итераций для расчета диффузионных потоков выявлено более высокое быстродействие настоящего алгоритма в сравнении с алгоритмом на основе интегро-интерполяционного метода [5]. Параллельная реализация с использованием технологии MPI позволяет проводить серийные расчеты за приемлемое время. Результатом работы программной реализации являются картины распределения веществ и температурного поля по осесимметричной трубе в процессе неокислительной конверсии метана.

## Литература

1. Yakush S., Semenov O., Alexeev M. Premixed Propane–AirFlame Propagation in a NarrowChannel with Obstacles // *Energies*. 2023. V. 16. DOI: 10.3390/en16031516.
2. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Timofeeva E.F. et al. Mathematical model for calculating coastal wave processes // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2013. V. 5. P. 122–129. DOI: 10.1134/S2070048213020087.
3. Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Yazovtseva O.S., Zagoruiko A.N. Numerical Simulation of Oxidative Regeneration of a Spherical Catalyst Grain // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2023. V. 15. P. 485–495. DOI: 10.1134/S2070048223030079.
4. Пескова Е.Е., Снытников В.Н., Жалнин Р.В. Вычислительный алгоритм для изучения внутренних ламинарных потоков многокомпонентного газа с



- разномасштабными химическими процессами // Компьютерные исследования и моделирование. 2023. Т.15, №5. С. 1169–1187.
5. Пескова Е.Е., Снытников В.Н. Численное исследование конверсии метановых смесей под воздействием лазерного излучения // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 3. С. 159–173.
  6. Peskova E.E., Yazovtseva O.S. Application of the Explicitly Iterative Scheme to Simulating Subsonic Reacting Gas Flows // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2024. V. 64, №2. P. 326–339.
  7. Zhukov V.T., Novikova N.D., Feodoritova O.B. An Approach to Time Integration of the Navier–Stokes Equations // Comput. Math. and Math. Phys. 2020. V. 60. P. 272–285. DOI: 10.1134/S0965542520020128.
  8. Snytnikov V.I.N., Snytnikov V.N., Masyuk N.S., Markelova T.V. The Absorption of CO<sub>2</sub> Laser Radiation by Ethylene in Mixtures with Methane // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2020. V. 253. 107119. 1–6.
  9. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
  10. Лашина Е.А., Пескова Е.Е., Снытников В.Н. Математическое моделирование нестационарной температурной конверсии метан-этановых смесей в широком диапазоне температур // Химия в интересах устойчивого развития. 2023. №3. С. 288–296.

MSC 65L20

## Numerical simulation of chemically active subsonic flows under the influence of laser radiation

E.E. Peskova, O.S. Yazovtseva

National Research Mordovia State University

*Abstract:* The work is devoted to the construction of a computational algorithm for a mathematical model of subsonic flow under the influence of laser radiation, taking into account viscosity, thermal conductivity and chemical reactions in an axisymmetric formulation. The principle of splitting by physical processes was applied to develop the algorithm. The scheme of local iterations based on the ordering of the Chebyshev polynomials' roots is applied to remove the restriction on the time integration step associated with diffusion processes. The algorithm is verified by comparison with the results of the previously constructed algorithm based on the integro-interpolation method. The high efficiency of the new algorithm has been revealed while maintaining the accuracy of calculations.

*Keywords:* local iteration scheme, subsonic flow, laser radiation, mathematical modeling, computational algorithm.

### References

1. Yakush S., Semenov O., Alexeev M. Premixed Propane–Air Flame Propagation in a Narrow Channel with Obstacles // *Energies*. 2023. V. 16. DOI: 10.3390/en16031516.
2. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Timofeeva E.F. et al. Mathematical model for calculating coastal wave processes // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2013. V. 5. P. 122–129. DOI: 10.1134/S2070048213020087.
3. Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Yazovtseva O.S., Zagoruiko A.N. Numerical Simulation of Oxidative Regeneration of a Spherical Catalyst Grain // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2023. V. 15. P. 485–495. DOI: 10.1134/S2070048223030079.
4. Peskova E.E., Snytnikov V.N., Zhalnin R.V. The computational algorithm for studying internal laminar flows of a multicomponent gas with different-scale chemical processes // *Computer Research and Modeling*. 2023. Vol. 15, No. 5. P. 1169–1187. DOI: 10.20537/2076-7633-2023-15-5-1169-1187.
5. Peskova E.E., Snytnikov V.N. Numerical Study of Methane Mixtures' Conversion Under the Influence of Laser Radiation // *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 2023. V. 25, No. 3. P. 159–173. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.159-173>
6. Peskova E.E., Yazovtseva O.S. Application of the Explicitly Iterative Scheme to Simulating Subsonic Reacting Gas Flows // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2024. V. 64, № 2. P. 326–339.

7. Zhukov V.T., Novikova N.D., Feodoritova O.B. An Approach to Time Integration of the Navier–Stokes Equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2020. V. 60. P. 272–285. DOI: 10.1134/S0965542520020128.
8. Snytnikov V.I.N., Snytnikov V.N., Masyuk N.S., Markelova T.V. The Absorption of CO<sub>2</sub> Laser Radiation by Ethylene in Mixtures with Methane // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2020. V. 253. 107119. 1–6.
9. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
10. Lashina E.A., Peskova E.E., Snytnikov V.N. Mathematical Modelling of the Dynamics of Thermal Conversion of Methane-Ethane Mixtures in a Wide Temperature Range // Chemistry for Sustainable Development. 2023. Vol. 31, No. 3. P. 278–286. DOI: 10.15372/CSD2023467

УДК 519.642.5

# О методе коллокации при построении решения нелинейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с использованием многочленов Чебышева\*

Попов В.Н., Герמידер О.В.

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова

*Аннотация:* С использованием метода последовательных приближений и свойств систем ортогональных полиномов Чебышева первого рода предложена матричная реализация метода коллокации для построения решений нелинейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Подынтегральная функция в рассматриваемых уравнениях представляется в виде частичной суммы ряда по этим многочленам. В качестве точек коллокации выбираются корни полиномов Чебышева. Искомые решения находятся путем полиномиальных интерполяций полученных значений функций в точках коллокации с использованием обратных матриц, элементы которых записываются на основе ортогональных соотношений для этих полиномов.

*Ключевые слова:* метод коллокации, метод последовательных приближений, многочлены Чебышева, интегральные уравнения

## 1. Введение

Интегральные уравнения Фредгольма имеют важное значение при моделировании физических процессов в кинетической теории газов [1], физике плазмы [2], теории упругости [3]. Поскольку для подавляющего числа нелинейных задач математической физики получение аналитического решения не представляется возможным, то важным аспектом при моделировании является разработка эффективных численных методов решения нелинейных интегральных уравнений. В течение последних десятилетий предложены различные методы нахождения численного решения уравнений Фредгольма и их реализация [4–6]. В представленной работе предложен новый подход к построению решения нелинейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода, основанный на методах последовательных приближений и коллокации при использовании полиномов Чебышева первого рода.

## 2. Постановка задачи. Общие положения

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x) + \lambda \int_a^b K(x, y, u(y)) dy = f(x), \quad (1)$$

---

\*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00381 «Развитие методов полиномиальной аппроксимации Чебышева для решения нелинейных задач математической физики»

где  $u(x)$  – неизвестная функция ( $a \leq x \leq b$ ),  $K(x, y, u(y))$  – ядро интегрального уравнения (1),  $f(x)$  – свободный член этого уравнения. Полагаем, что функция  $f(x)$  ограничена, т.е.  $|f(x)| \leq R$  ( $a \leq x \leq b$ ), ядро  $K(x, y, u(y))$  интегрируемо, ограничено:  $|K(x, y, u(y))| \leq M$  ( $a \leq x, y \leq b$ ), и удовлетворяет условию Липшица [7]

$$|K(x, y, u) - K(x, y, z)| \leq L|u - z|, \quad (2)$$

где  $L$  – постоянная Липшица,  $a \leq x, y \leq b$ .

### 3. Построение решения уравнения

Решение уравнения (1), ищем, используя метод последовательных приближений [7], полагая

$$u(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (u_i(x) - u_{i-1}(x)), \quad (3)$$

где  $u_i(x)$  удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$u_i(x) = f(x) - \lambda \int_a^b K(x, y, u_{i-1}(y)) dy, \quad i \geq 1. \quad (4)$$

Для построения решения (4) применяем метод коллокации с использованием полиномов Чебышева первого рода и корней этих полиномов в качестве точек коллокации. В результате решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода находятся путем полиномиальных интерполяций полученных значений функций в точках коллокации с использованием обратных матриц, элементы которых записываются на основе ортогональных соотношений для этих полиномов.

### 4. Заключение

В работе предложена реализация метода коллокации для построения решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода с использованием последовательных приближений и корней полиномов Чебышева первого рода в качестве точек коллокации. Для построения решений используются свойства этих полиномов и операций над матрицами. Результаты вычислительных экспериментов показывают эффективность предложенного подхода к построению решений интегральных уравнений.

### Литература

1. Cercignani C. Theory and Application of the Boltzmann Equation. Edinburgh, London Scottish Academic Press, 1975.
2. Вовченко Е.Д., Григорьева И.Г., Кушин В.В., Макаров А.А., Мелехов А.П., Рамакоти Р.Ш., Салахутдинов Г.Х. Измерение энергетического спектра мягкого рентгеновского излучения для вакуумной искры с лазерным иницированием // Физика плазмы. 2022. Т. 48, № 11. С. 1149–1152.
3. Боган Ю.А. Регулярные интегральные уравнения для второй краевой задачи изгиба анизотропной упругой пластины // Прикл. мех. техн. физ. 2005. V. 46, № 3. С. 108–119.

4. Bazm S., Hosseini A., Azevedo J.S., Pahlevani F. Existence, uniqueness, and numerical approximation of solutions of a nonlinear functional integral equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2024. V. 439. P. 115602.
5. Torkaman S., Heydari M. An iterative Nyström-based method to solve nonlinear Fredholm integral equations of the second kind // Applied Numerical Mathematics. 2023. V. 194. P. 59–81.
6. Karamollahi N., Heydari M., Loghmani G.B. Approximate solution of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind using a class of Hermite interpolation polynomials // Mathematics and Computers in Simulation 2021. V. 187. P. 414–432
7. Wazwaz A.M. Linear and Nonlinear Integral Equations, Higher Education Press Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2011.

MSC 45B05, 65R20

## **On the collocation method for constructing a solution to the nonlinear Fredholm integral equation of the second kind using Chebyshev polynomials**

V.N. Popov, O.V. Germider

Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov

*Abstract:* Using the method of successive approximations and properties of systems of orthogonal Chebyshev polynomials of the first kind, a matrix implementation of the collocation method for constructing solutions of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind is proposed. The integral function in the equations under consideration is represented as a partial sum of a series over these polynomials. The roots of Chebyshev polynomials are chosen as collocation points. The desired solutions are found by polynomial interpolation of the obtained function values at the collocation points using the properties of inverse matrices, the elements of which are written based on orthogonal relations for these polynomials.

*Keywords:* collocation method, sequential approximation method, Chebyshev polynomials, integral equations.

### **References**

1. Cercignani C. Theory and Application of the Boltzmann Equation. Edinburgh, London Scottish Academic Press, 1975.
2. Vovchenko Ye.D., Grigor'yeva I.G., Kushin V.V., Makarov A.A., Melekhov A.P., Ramakoti R.SH., Salakhutdinov G.KH. Izmereniye energeticheskogo kondensatora myagkogo rentgenovskogo izlucheniya dlya vakuumnoy iskry s lazernym initsirovaniyem // Fizika izlucheniya. 2022. V. 48, No. 11. P. 1149–1152.
3. Bogan Yu. A. Regular integral equations for the second boundary-value problem of the bending of an anisotropic elastic plate // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2005. V. 46. P. 395–404.
4. Bazm S., Hosseini A., Azevedo J.S., Pahlevani F. Existence, uniqueness, and numerical approximation of solutions of a nonlinear functional integral equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2024. V. 439. P. 115602.
5. Torkaman S., Heydari M. An iterative Nyström-based method to solve nonlinear Fredholm integral equations of the second kind // Applied Numerical Mathematics. 2023. V. 194. P. 59–81.
6. Karamollahi N., Heydari M., Loghmani G.B. Approximate solution of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind using a class of Hermite interpolation polynomials // Mathematics and Computers in Simulation 2021. V. 187. P. 414–432.
7. Wazwaz A.M. Linear and Nonlinear Integral Equations, Higher Education Press Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2011.

УДК 519.86

## Ценовые волны в информационной микроэкономике

Рассадин А.Э., Рубцов М.И.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

*Аннотация:* В работе рассмотрена модель математической геоэкономики, описывающая линейную эквидистантную цепочку идентичных торговых точек эвансовского типа, продающий некий продукт, причём между этими точками осуществляется информационный обмен о цене продукта, приводящий к дополнительному её локальному изменению. Показано, что этот обмен информацией порождает распространение волны цены продукта по этой цепочке.

*Ключевые слова:* спрос и предложение, метод характеристик, эйлера и лагранжева координаты.

В конце XX века в экономической теории сформировался новый раздел – геоэкономика, изучающий влияние географических факторов на экономические процессы [1]. К началу второй четверти XXI века в ходе развития геоэкономики стала очевидной необходимость её математизации. Кроме того, ясно, что при этом надо принимать во внимание интенсивное развитие информационных технологий. В данной работе исследуется пример такой задачи математической геоэкономики.

Рассмотрим линейную цепочку, состоящую из  $2N+1$  одинаковых торговых точек, продающих некий продукт. Пусть цена этого продукта в  $n$ -й точке в момент времени  $t$  равна  $p_n(t)$  ( $n = -N, \dots, N$ ), тогда она удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению [2]:

$$\frac{dp_n}{dt} = \gamma [\Phi(p_n) - \Psi(p_n)], \quad \gamma > 0, \quad (1)$$

где  $\Phi(p)$  – спрос на этот продукт, а  $\Psi(p)$  – предложение этого продукта [2].

Далее, введём теперь в модель (1) механизм обратной связи, обусловленный информационной составляющей современного общества, а именно, будем считать, что цена продукта в каждой торговой точке оперативно выставляется в сети Internet, причём превышение цены  $p_{n+1}(t)$  продукта в  $n+1$ -й точке над ценой продукта  $p_n(t)$  в  $n$ -й точке приводит к уменьшению цены в этой точке:

$$\frac{dp_n}{dt} = \gamma [\Phi(p_n) - \Psi(p_n)] - \mu_n (p_{n+1} - p_n), \quad (2)$$

где  $\mu_n$  – коэффициент обратной связи, меняющийся, вообще говоря, от точки к точке.

Пусть  $\mu_n = \frac{V(n\delta)}{\delta}$ , где  $\delta$  – расстояние между двумя ближайшими торговыми точками, а  $V(x)$  – фиксированная функция.

Далее, пусть  $N \gg 1$ , тогда, обозначив  $P(n\delta, t) = p_n(t)$ , можно свести систему (2) из  $2N+1$  обыкновенных дифференциальных уравнений к одному уравнению в частных производных на прямой:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + V(x) \frac{\partial P}{\partial x} = \gamma [\Phi(P) - \Psi(P)], \quad P(x, 0) = P_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

где  $P_0(x)$  – распределение начальной цены продукта вдоль цепочки торговых точек.



Для того, чтобы решить задачу Коши (3), надо конкретизировать функции спроса и предложения.

Выберем их такими же, как в модели Эванса [2]:

$$\Phi(P) = a - bP, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad (4)$$

и

$$\Psi(P) = \alpha + \beta P, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad (5)$$

причём  $a > \alpha$ .

Подставляя функции (4) и (5) в уравнение (3), получим:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + V(x) \frac{\partial P}{\partial x} = -\Gamma(P - P_*), \quad P(x, 0) = P_0(x), \quad (6)$$

где  $\Gamma = \gamma(b + \beta)$  и  $P_* = \frac{a - \alpha}{b - \beta}$ .

Задача Коши (6) решается с помощью метода характеристик [3].

Уравнения её характеристик имеют вид:

$$\frac{dP}{dt} = -\Gamma(P - P_*), \quad P|_{t=0} = P_0(y), \quad (7)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = V(x), \quad x|_{t=0} = y, \quad (8)$$

где  $y \in \mathbb{R}$  – лагранжева координата [4].

Решение задачи Коши (7) имеет вид:

$$P = P_* + (P_0(y) - P_*) \exp(-\Gamma t). \quad (9)$$

Решение задачи Коши (8) записывается следующим образом:

$$t = \int_y^x \frac{d\xi}{V(\xi)}. \quad (10)$$

Из формулы (10) можно найти связь между лагранжевой координатой  $y$  и эйлеровой координатой  $x$ :

$$y = Y(x, t). \quad (11)$$

Подставив выражение (11) в формулу (9), получим решение задачи Коши (6):

$$P(x, t) = P_* (1 - \exp(-\Gamma t)) + P_0(Y(x, t)) \exp(-\Gamma t). \quad (12)$$

Если  $V(x) = V_m = \text{const}$ , то из формулы (10) получим, что  $y = x - V_m t$ , значит, распределение цены продукта вдоль цепочки торговых точек равно:

$$P(x, t) = P_* (1 - \exp(-\Gamma t)) + P_0(x - V_m t) \exp(-\Gamma t). \quad (13)$$

Из выражения (13) видно, что вдоль цепочки со скоростью  $V_m$  бежит экспоненциально затухающая ценовая волна, а при  $t \gg 1/\Gamma$  по всей цепочке устанавливается однородное распределение цены продукта:  $P(x, t) \approx P_*$ .

В докладе также представлены графики функции (12), соответствующие другим выражениям для скорости волны  $V(x)$ . Однако в этих случаях волны цены продукта уже будут неоднородными.

## **Литература**

1. Кочетов Э.Г. Геоэкономика (Освоение мирового экономического пространства). М.: Издательство БЕК, 1999. 480 с.
2. Колемаев В.А. Математическая экономика. М.: ЮНИТИ, 1998. 240 с.
3. Лерман Л.М. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2016. 280 с.
4. Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 496 с.

MSC 91B72

## Price waves in information microeconomics

A.E. Rassadin, M.I. Rubtsov

HSE University

*Abstract:* The paper considers a model of mathematical geoeconomics describing a linear equidistant chain of identical Evans-type retail outlets selling a certain product, and information exchange about the price of the product is carried out between these points, leading to an additional local change. It is shown that this information exchange generates the propagation of a wave of product prices along this chain.

*Keywords:* supply and demand, method of characteristics, Eulerian and Lagrangian coordinates.

### References

1. Kochetov E.G. Geoeconomika (Osvoyeniye mirovogo ekonomicheskogo prostranstva). M., Izdatelstvo BEK, 1999. 480 p.
2. Kolemaev V.A. Matematicheskaya ekonomika. M., UNITY, 1998. 240 p.
3. Lerman L.M. Lektsii po obiknovennim differentsialnim uravneniyam. M.-Izhevsk, NITs "Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika Institut kompyuternih issledovaniy, 2016. 280 p.
4. Gurbatov S.N., Rudenko O.V., Saichev A.I. Volni i strukturi v nelineinikh sredah bez dispersii. Prilozhenie k nelineinoy akustike. M., FIZMATLIT, 2008. 496 p.

УДК 004.94

## Применение OpenMP в задаче о моделировании нестационарного процесса в слое катализатора

Родькин А.В.<sup>1</sup>, Ткачева С.В.<sup>2</sup>, Язовцева О.С.<sup>1</sup>

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет<sup>1</sup>,  
Мордовский государственный педагогический университет им. М.Е. Евсевьева<sup>2</sup>

*Аннотация:* В работе представлено исследование эффективности применения технологии параллельного программирования OpenMP при моделировании нестационарного процесса в слое катализатора. Химические превращения описаны одной стадией. Математическая модель является системой уравнений в частных производных. Для нее поставлены краевые условия и заданы начальные данные. Вычислительный алгоритм построен на основе метода конечных объемов. Приведен анализ ускорения, полученного для разного количества потоков.

*Ключевые слова:* окислительная регенерация, математическое моделирование, вычислительный алгоритм, OpenMP.

Многие технологические процессы в области химии и инженерии требуют математического моделирования для оптимизации и повышения эффективности. Эксперименты с каждым годом становятся всё более трудоёмкими и дорогими, что делает вычислительное программирование неотъемлемой частью исследований.

Среди различных методов восстановления каталитической активности особое место занимает окислительная регенерация, заключающаяся в выжиге коксовых отложений с помощью кислородсодержащего газа [4]. Для технологической оптимизации данного процесса можно варьировать такие параметры, как температура выжига и концентрация кислорода. Однако, стоит отметить, что проведение реального эксперимента в условиях горения может привести к нежелательным процессам: перегреву, повреждению катализатора, поэтому математическое моделирование регенерации катализатора приобретает особую актуальность.

Целью работы является исследование эффективности параллельной реализации вычислительного алгоритма на основе метода конечных объемов с использованием технологии OpenMP. Оно проведено на примере математической модели окислительной регенерации слоя катализатора с одностадийным описанием химических превращений [2]. Выбор OpenMP, позволяющей задействовать процессор для одновременного решения задачи на нескольких потоках, обусловлен необходимостью ускорения расчетов на ПК в отсутствие доступа к сети, а также простотой в адаптации последовательного кода.

Математическая модель окислительной регенерации слоя катализатора включает описание процессов в зерне катализатора и его слое. Это приводит к большим различиям в характерных размерах исследуемых объектов и усложнению требований устойчивости разностной схемы [7]. Для удовлетворения требований устойчивости в работе использован явно-неявный алгоритм. Модель предполагает пространственное разбиение слоя катализатора на ячейки, в каждой из которых ведется интегрирование по радиусу осредненного зерна катализатора. Для реализации параллельного счета использована директива `omp parallel for` в циклах по радиусу зерна и по длине слоя. Расчеты проведены на ПК, содержащем 6 двухпоточных ядер AMD

Ryzen 5 2600 3.4GHz. Расчетное время для разных пространственных разбиений по радиусу и слою катализатора представлено в таблице ниже.

Потоки	20×20		50×50		100×100	
	Время, с	Ускорение	Время, с	Ускорение	Время, с	Ускорение
1	10.69	1	27.13	1	50.38	1
2	8.52	1.25	19.8	1.37	30.9	1.63
4	7.34	1.45	18.2	1.49	27.38	1.84
6	6.83	1.56	16.74	1.62	22.59	2.23

Проведенные расчеты с изменением размерности сетки показали значительное повышение производительности с ростом числа ячеек.

Результатом работы является исследовательский код, реализованный на языке C++ с применением технологии параллельных вычислений OpenMP, являющейся программной платформой для организации параллельных вычислений с использованием центрального процессора. Сравнение результатов расчетов последовательных и параллельных версий программы показало их совпадение. Наиболее эффективное распараллеливание позволило достичь ускорения выполнения программы в 2 раза.

Предложенный параллельный алгоритм может быть модернизирован для случая многостадийной кинетики [7], в том числе и для цилиндрической формы зерна [4], и в дальнейшем использован для отслеживания процессов горения в слое катализатора при проведении экзотермических реакций [10].

## Литература

1. Масагутов Р.М., Морозов Б.Ф., Кутепов Б.И. Регенерация катализаторов в нефтепереработке и нефтехимии. М.: Изд-во Химия, 1986. 144 с.
2. Reshetnikov S.I., Petrov R., Zazhigalov S., Zagoruiko A.N. Mathematical modeling of regeneration of coked Cr-Mg catalyst in fixed bed reactors // *Chemical Engineering Journal*. 2020. V. 380. DOI: 10.1016/j.cej.2019.122374.
3. Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Yazovtseva O.S., Zagoruiko A.N. Numerical Simulation of Oxidative Regeneration of a Spherical Catalyst Grain // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2023. V. 15. P. 485–495. DOI: 10.1134/S2070048223030079.
4. Yazovtseva O.S., Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Sukharev L.A., Zagoruiko A.N. Computer Simulation of Coke Sediments Burning from the Whole Cylindrical Catalyst Grain // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, No. 3. P. 669. DOI: 10.3390/math11030669.
5. Балаев А.В., Дробышев В.И., Губайдуллин И.М., Масагутов Р.М. Исследование волновых процессов в регенераторах с неподвижным слоем катализатора // *Распространение тепловых волн в гетерогенных средах*. 1983. С. 233–246.

MSC 65Y05

## Application of OpenMP in the problem of modeling a non-stationary process in a catalyst layer

A.V. Rodkin<sup>1</sup>, S.V. Tkacheva<sup>2</sup>, O.S. Yazovtseva<sup>1</sup>

National Research Mordovia State University<sup>1</sup>,  
Mordovia State Pedagogical University named after M.E. Evseviev<sup>2</sup>

*Abstract:* The paper presents a study of the effectiveness of the OpenMP parallel technology for modeling of a non-stationary process in a catalyst layer. Chemical transformations are described in one stage. A mathematical model is a system of partial differential equations. Boundary conditions and initial data has been set for it. The computational algorithm is based on the finite volume method. An analysis of the acceleration obtained for a different number of flows is given.

*Keywords:* oxidative regeneration, mathematical modeling, computational algorithm, OpenMP.

### References

1. Masagutov R.M., Morozov B.F., Kutepov B.I. Regeneration of catalysts in oil processing and petrochemistry. Moscow, USSR, 1987. 144 p.
2. Reshetnikov S.I., Petrov R., Zazhigalov S., Zagoruiko A.N. Mathematical modeling of regeneration of coked Cr-Mg catalyst in fixed bed reactors // Chemical Engineering Journal. 2020. V. 380. DOI: 10.1016/j.cej.2019.122374.
3. Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Yazovtseva O.S., Zagoruiko A.N. Numerical Simulation of Oxidative Regeneration of a Spherical Catalyst Grain // Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. V. 15. P. 485–495. DOI: 10.1134/S2070048223030079.
4. Yazovtseva O.S., Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Sukharev L.A., Zagoruiko A.N. Computer Simulation of Coke Sediments Burning from the Whole Cylindrical Catalyst Grain // Mathematics. 2023. Vol. 11, No. 3. P. 669. DOI: 10.3390/math11030669.
5. Balaev A.V., Drobyshevich V.I., Gubaydullin I.M., Masagutov R.M. Investigation of wave processes in regenerators with a fixed catalyst layer // Propagation of heat waves in heterogeneous media, 1983. P. 233–246.

УДК 519.24

# Логистическая модель риска возникновения сердечно-сосудистых заболеваний

Сайфетдинов С.Ф., Егорова Д.К., Гарин М.А.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

*Аннотация:* В настоящей работе рассматривается логистическая модель риска возникновения сердечно-сосудистых заболеваний. Модель реализована на языке Python с использованием библиотек в pandas и numpy. Приведена оценка модели.

*Ключевые слова:* набор данных, логистическая модель, вероятность, оценки качества, Python.

## 1. Набор данных

Для построения модели риска возникновения сердечно-сосудистых заболеваний был использован набор данных из открытого источника Kaggle [1]. Набор содержал количественные (пол, возраст, вес, рост, артериальное давление) и категориальные (никотиновая зависимость, употребление алкоголя, занятия спортом, наличие заболеваний сердечно-сосудистой системы) данные, собранные со слов 70000 пациентов на момент медицинского обследования.

Данные были очищены от аномальных значений с помощью вычисления верхнего и нижнего квантилей, нахождения их разницы с последующим вычислением нижней и верхней границ данных. Таким образом из 70000 строк осталось порядка 62000, что является достаточным для дальнейшего анализа.

## 2. Моделирование и оценка качества

Так как необходимо построить модель риска, по сути вероятность возникновения заболевания, то использовалось следующее регрессионное уравнение (логит-преобразование):

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}} = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_8 x_8)}},$$

здесь  $x_1, x_2, \dots, x_8$  — входные признаки приведенные выше,  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_8$  — коэффициенты модели.

Очищенные данные разделили по полу пациентов, это обусловлено наличием существенных физиологических различий. Далее, полученные два набора, разделили на обучающую и тестовую выборки и строили две модели для женщин и мужчин отдельно. Модели обучили с помощью метода `LogisticRegression` языка программирования Python.

Получили следующие оценки коэффициентов модели для пациентов-женщин:

$$\beta_0 = -11.4375, \beta_1 = 0.0499, \beta_2 = -0.0123, \beta_3 = 0.0178, \beta_4 = 0.0684, \beta_5 = 0.0133, \\ \beta_6 = -0.1327, \beta_7 = -0.2361, \beta_8 = -0.2587.$$

Для оценки качества данной модели использовались следующие метрики:

- доля правильных ответов модели (**Accuracy** = 0.7137),
- доля объектов, которые действительно принадлежат классу относительно всех объектов, которые модель отнесла к этому классу (**Precision** = 0.7478),
- доля истинно положительных классификаций (**Recall** = 0.6569),
- F-мера, которая является гармоническим средним между **Precision** и **Recall** (**F-мера** = 0.6994),
- ROC-кривая – доля ложно положительных примеров в сравнении с долей правильно положительных примеров (**area**=0.78).

Оценка качества модели показала удовлетворительный результат, учитывая, что для ее построения использовалось 8 признаков.

Подобная модель реализована авторами в Android-приложении «HLS» [2].

## **Литература**

1. Cardiovascular Disease dataset. URL:  
<https://www.kaggle.com/datasets/sulianova/cardiovascular-disease-dataset/discussion?sort=undefined>
2. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024663282. Программа-помощник контроля здорового образа жизни «HLS» : заявл. 30.05.2024 : опубли. 05.06.2024 / Т. И. Власова, Д. К. Егорова, Д. В. Пузакова, М. А. Гарин, С. Ф. Сайфетдинов; правообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва».



MSC 62J12

## Logistic model of cardiovascular disease risk

S.F. Sayfetdinov, D.K. Egorova, M.A. Garin

National Research Mordovia State University

*Abstract:* The article presents a logistic model of the risk of cardiovascular diseases. The model is implemented in Python using libraries in pandas and numpy. The model estimate is given.

*Keywords:* data set, logistic model, probability, quality assessments, Python.

### References

1. Cardiovascular Disease dataset. URL:  
<https://www.kaggle.com/datasets/sulianova/cardiovascular-disease-dataset/discussion?sort=undefined>
2. Certificate of state registration of the computer program No. 2024663282. Healthy lifestyle control assistant program "HLS": application. 05/30/2024: publ. 06/05/2024 / T. I. Vlasova, D. K. Egorova, D. V. Puzakova, M. A. Garin, S. F. Sayfetdinov; copyright holder Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University».

УДК 517.93

## Проективизация трехмерных линейных квазипериодических систем

Сахаров А.Н.

Нижегородский государственный аграрно-технологический университет

*Аннотация:* Для описания динамики линейных расширений квазипериодических потоков используется метод группового расширения, позволяющий привести систему к треугольному виду. В случае компактной группы это расширение эквивалентно проективизации линейной системы. Динамика проективного расширения системы описывается в терминах множества вращения, основанного на понятии асимптотических циклов С. Шварцмана.

*Ключевые слова:* линейные расширения, групповое расширение, проективное расширение, вектор вращения, асимптотические циклы.

### 1. SO(3)-расширение линейной системы

Система дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{x} = A(\varphi)x, \quad \varphi \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

где  $\varphi$  – угловые координаты на торе  $\mathbb{T}^m$ ,  $A(\varphi)$  – матрица-функция на торе,  $\omega$  – вектор с рационально независимыми компонентами, порождает поток на  $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^3$ , который называется линейным расширением квазипериодического потока.

Динамика системы (1) легко описывается, когда  $A(\varphi)$  – треугольная матрица. Систему, не являющуюся треугольной, с помощью минимального группового расширения можно привести к треугольному виду. Абстрактная теорема о приведении к треугольному виду произвольного линейного расширения минимального потока принадлежит И.У. Бронштейну ([1], теорема 5.8).

В нашем случае эта процедура выглядит так. Пусть  $A(\varphi) = S(\varphi) + R(\varphi)$  разложение матрицы  $A(\varphi)$  на симметрическую и антисимметрическую части. Будем искать такую матрицу  $Q \in \text{SO}(3)$ , чтобы замена  $x = Qy$  приводила систему (1) к треугольному виду:

$$Q'\dot{Q} = Q'A(\varphi)Q - T(\varphi, Q).$$

Здесь  $T(\varphi, Q)$  – верхнетреугольная матрица, а символ  $'$  обозначает транспонирование. Поскольку матрица  $Q'S(\varphi)Q$  симметрическая, то справедливо представление

$$Q'S(\varphi)Q = D(\varphi, Q) + P(\varphi, Q) + P'(\varphi, Q),$$

где  $D(\varphi, Q)$  – диагональная матрица,  $P(\varphi, Q)$  – верхняя треугольная матрица с нулевой диагональю. Положив

$$T(\varphi, Q) = D(\varphi, Q) + 2P(\varphi, Q),$$

получаем следующую систему уравнений на  $\mathbb{T}^m \times \text{SO}(3, \mathbb{R})$  для матрицы  $Q$ :

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad Q'\dot{Q} = Q'R(\varphi)Q + P'(\varphi, Q) - P(\varphi, Q). \quad (2)$$

Поток, определяемый системой (2), имеет минимальные множества. Взяв сужение этого потока на какое-либо минимальное множество, получим рекуррентное преобразование, приводящее исходную систему к треугольному виду.

Преобразование  $Q$  определяется с точностью до произвольного множителя из подгруппы стабильности  $SO(2)$  группы  $SO(3)$ . Так как  $S^2 = SO(3)/SO(2)$ , то система (2) однозначно определяет поток на  $\mathbb{T}^m \times S^2$ , который называется *проективным расширением квазипериодического потока*, построенным по системе (1).

Допустим, что  $A(\varphi) = \Lambda(\varphi) + R(\varphi)$ , где  $\Lambda(\varphi) = \text{diag}(\lambda_1(\varphi), \lambda_2(\varphi), \lambda_3(\varphi))$ , а

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -r_1(\varphi) & -r_2(\varphi) \\ r_1(\varphi) & 0 & -r_3(\varphi) \\ r_2(\varphi) & r_3(\varphi) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (2) в сферических координатах  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  выглядит так

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\theta}_1 = r_1(\varphi) - \frac{\lambda_1(\varphi) - \lambda_2(\varphi)}{2} \sin 2\theta_1 \cos 2\theta_2 = f_1(\varphi, \theta_1, \theta_2), \\ \dot{\theta}_2 = r_3(\varphi) \cos \theta_1 - r_2(\varphi) \sin \theta_1 + \frac{\sin 2\theta_2}{2} (\cos^2 \theta_1 (\lambda_1(\varphi) - \lambda_2(\varphi)) - \lambda_1(\varphi) + \lambda_3(\varphi)) = \\ = f_2(\varphi, \theta_1, \theta_2), \quad 0 \leq \theta_1 < 2\pi, \quad 0 \leq \theta_2 < \pi. \end{cases} \quad (3)$$

Ясно, что правые части системы определяют векторное поле, которое определено на торе  $\mathbb{T}^{m+2}$ . Такой же вывод можно сделать, рассматривая матрицу  $A(\varphi)$  с произвольной симметрической частью.

Число минимальных множеств оценивается так. Система

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{x} = A(\varphi)x, \quad x \in \mathbb{C}^2 \quad (4)$$

приводится к треугольному виду с помощью замены  $x = Uy$ , где  $U \in SU(2)$ , если  $U$  является решением системы.

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad U^* \dot{U} = U^* R(\varphi) U + P^*(\varphi, U) - P(\varphi, U),$$

которая определяет поток на  $\mathbb{T}^m \times SU(2)$ . Здесь  $R^*(\varphi) = -R(\varphi)$ ,  $P(\varphi, U)$  – верхнетреугольная матрица с чисто мнимой главной диагональю. Сужение этого потока на  $\mathbb{T}^m \times S^2$  – проективный поток. Согласно теореме 2 из [2] он имеет либо одно, либо два, либо континуум минимальных множеств. Аналогично заключение справедливо и для потока, определяемого (3), так как группа  $SO(3)$  изоморфна фактор-группе  $SU(2)/\{\pm E\}$ .

## 2. Множество вращения слоя

Пусть  $\theta(t, \varphi_0, \theta_0)$  – решение (3), тогда для любой инвариантной меры  $\mu$  по эргодической теореме Биркгофа-Хинчина для почти всех  $\theta_0$  существует предел

$$\rho_\mu = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t F(\varphi_0 + \omega s, \theta(s, \varphi_0, \theta_0)) ds = \int_{\mathbb{T}^{m+2}} F(\varphi, \theta) d\mu, \quad (5)$$

где  $F(\varphi, \theta)$  – вектор правых частей (3). Так как  $F$  – непрерывное векторное поле на торе, то предел в (5) существует для всех  $\theta_0$ . Легко показать, что  $\rho_\mu = (\rho_\mu, 0)$ . Множество вращения слоя определяется как объединение всех таких векторов  $\mathcal{R} = \bigcup_\mu \rho_\mu$ .

Численный эксперимент показывает, что множество  $\mathcal{R}$  состоит из одного вектора. На рис. 1 показан график линейной зависимости от параметра  $\varepsilon$  вектора вращения системы (3) с полиномиальной зависимостью от  $\varphi$ . Если система (1) блочно-диагональна, то множество вращения слоя действительно состоит из одного вектора  $(\rho, 0)$ , не зависящего от начальных данных [3].

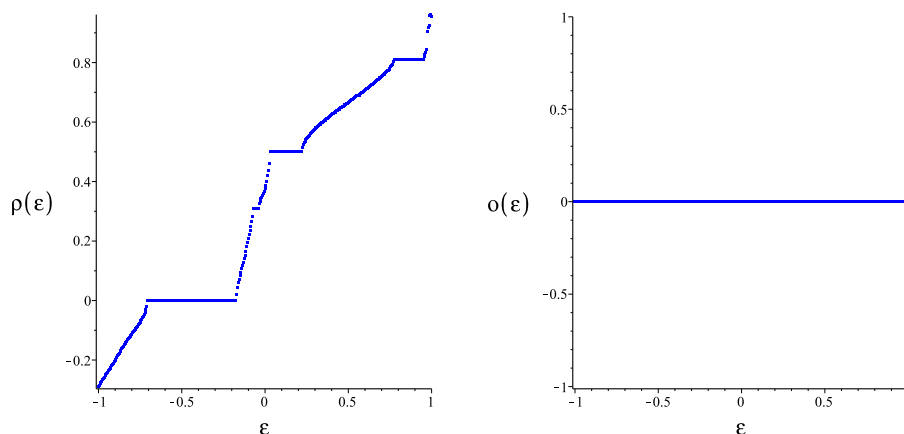


Рис. 1. Вектор вращения слоя системы (3).

**Теорема 1.** *Множество вращения  $\mathcal{R}$  состоит из одного вектора  $(\rho, 0)$ .*

**Доказательство.** Согласно теории С. Шварцмана [4], множество вращения системы (2) состоит из матриц максимальной торической подалгебры алгебры  $SO(3)$ , которые имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -\rho & 0 \\ \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, учитывая, что определение Шварцмана чисел вращения совпадает с обычным в случае потоков на торе, получаем

$$\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t f_1(\omega s, \theta_1(s), \theta_2(s)) ds, \quad 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t f_2(\omega s, \theta_1(s), \theta_2(s)) ds.$$

Таким образом,  $\theta_2(t) = o(t)$ , откуда  $\cos 2\theta_2(t) = O(1)$ . Теперь существование числа вращения  $\rho$ , не зависящего от начальных данных, можно доказать, следуя, например, работе [5].

Доказательство завершено.

### 3. Заключительные замечания

Если матрица  $A(\varphi)$  кососимметрична, система (3) является интегрируемой в квадратурах. В этом случае справедливо следующее утверждение: существует множество  $\mathcal{M}$  типа  $G_\delta$  в пространстве  $C^0(\mathbb{T}^m, \text{SO}(3))$  такое, что при  $A(\varphi) \in \mathcal{M}$  поток, порождаемый системой (3), минимален [6]. Доказательство этого факта существенно упрощается, если предположить, что интегралы от квазипериодических функций  $r_1(\omega t)$ ,  $r_2(\omega t)$ ,  $r_3(\omega t)$  не являются квазипериодическими функциями.

Используя известное представление матриц из  $\text{SU}(2)$ , можно записать уравнения проективного расширения системы (4) в сферических координатах. Они являются уравнениями на торе  $\mathbb{T}^{m+2}$ . Поскольку максимальная торическая подалгебра алгебры  $\text{SU}(2)$  имеет размерность 1, множество вращения слоя состоит из векторов вида  $(\rho, 0)$ . Оптимистическая гипотеза: множество вращения слоя содержит единственный вектор. В вещественном случае это действительно так.

### Литература

1. Бронштейн И.У. Расширения минимальных групп преобразований. Кишнев. Штиница, 1975. 311 с.
2. Коломиец М.Л., Сахаров А.Н. Классификация проективных расширений квазипериодических потоков. Труды VII всероссийской научной конференции "Нелинейные колебания механических систем". Нижний Новгород, 2008. Т. 1. С. 295–299.
3. Сахаров А.Н. Структурно устойчивые линейные расширения квазипериодических потоков на торе. Сборник материалов XVI международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании". Саранск, 2023. С. 213–219.
4. Schwartzman S. Asymptotic cycles // Ann. of Math. 1957. V. 66. P. 270–284.
5. Веремеюк В.В. Существование числа вращения уравнения  $\dot{x} = \lambda(t, x)$  с периодической по  $x$  и почти периодической по  $t$  правой частью // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 6. С. 1073–1076.
6. Tkachenko V.I. On reducibility of linear quasiperiodic systems with bounded solutions // EJTDE, Proc. 6th Coll. QTDE. 2000. No. 29. 11 p.

MSC 34D20

## Projectivization of three-dimensional linear quasiperiodic systems

A.N. Sakharov

Nizhny Novgorod State Agrarian and Technological University

*Abstract:* To describe the dynamics of linear extensions of quasiperiodic flows, the group expansion method is used to bring system to a triangular form. In the case of a compact group this extension is equivalent to the projectivization of a linear system. Dynamics of the projective system is described in terms of rotation numbers based on the concept of asymptotic cycles by S. Shvartsman.

*Keywords:* linear extensions, projective extensions, rotation numbers, asymptotic cycles.

### References

1. Bronshtein I.U. Extensions of minimal transformation groups. Kishenev. Shtinitsa, 1975. 311 p.
2. Kolomiets M.L., Sakharov A.N. Classification of projective extensions of quasiperiodic flows. Proceedings of the VII All-Russian scientific conference "Nonlinear oscillations of mechanical systems". Nizhny Novgorod. 2008. T. 1. P. 295–299.
3. Sakharov A.N. Structurally stable linear extensions of quasiperiodic flows on a torus. Collection of materials of the XVI international scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling". Saransk. 2023. P. 213–219.
4. Schwartzman S. Asymptotic cycles // Ann. of Math. 1957. V. 66. P. 270–284.
5. Veremenyuk V.V. Existence of a rotation number for the equation  $\dot{x} = \lambda(t, x)$  with right-hand side periodic in  $x$  and almost periodic in  $t$  // Differ. equations. 1991. T. 27, No. 6. P. 1073–1076.
6. Tkachenko V.I. On reducibility of linear quasiperiodic systems with bounded solutions // EJQTDE, Proc. 6th Coll. QTDE. 2000. No. 29. 11 p.

УДК 519.6

## Субдиффузия переменного порядка: интерпретация в терминах модели многократного захвата\*

Сибатов Р.Т.<sup>1,2</sup>

НПК «Технологический центр»<sup>1</sup>  
Ульяновский государственный университет<sup>2</sup>

*Аннотация:* В рамках модели дисперсионного транспорта с многократным захватом было обосновано уравнение аномальной диффузии с производной переменного дробного порядка. Связь полученного уравнения с конкретной физической моделью указывает на численный алгоритм Монте-Карло для его решения. Важной особенностью модели является изменение плотности энергии локализованных состояний при соблюдении условия детального равновесия между захваченными и делокализованными частицами.

*Ключевые слова:* аномальная диффузия, дробная производная, многократный захват, метод Монте-Карло.

### 1. Введение

Явления аномальной диффузии наблюдаются в различных материалах и системах [1]. Для описания этих явлений эффективными оказались модели на основе уравнений с дробными производными постоянного порядка [2, 3]. Однако, определенные экспериментальные данные указывают на то, что уравнения дробной диффузии постоянного порядка не обладают достаточной способностью для полного объяснения сложных диффузионных процессов, параметры которых изменяются во времени, пространстве и в зависимости от концентраций. Для преодоления этих ограничений введены уравнения дробной диффузии переменного порядка, в которых порядок дробной производной по времени может зависеть от времени, координат и/или концентрации [4]. Использование таких моделей может быть полезным инструментом для более точного описания и прогнозирования сложных аномальных диффузионных процессов в различных системах. Однако, существуют и некоторые проблемы при использовании уравнений с дробными производными переменного порядка. Во-первых, численное моделирование на основе таких уравнений требует большего количества вычислительных ресурсов. Во-вторых, интерпретация самих уравнений зачастую затруднена. Кроме того, существует потребность в большем числе экспериментальных данных для подтверждения и верификации моделей, основанных на уравнениях с дробными производными переменного порядка.

Временная производная в субдиффузионном уравнении, порядок которой зависит от координаты, может быть объяснена неоднородностью среды, и соответствующее уравнение диффузии можно вывести в рамках модели случайных блужданий с непрерывным временем [5]. В данной работе предложен подход к выводу уравнения с дробной временной производной переменного порядка в рамках модели многократного захвата. Связь этих уравнений с известной физической моделью дисперсионного транспорта подводит к численному алгоритму Монте-Карло для численного реше-

---

\*Работа выполнена в рамках проекта РНФ (грант 22-11-00036).

ния, и допускает формулировку физически обоснованных граничных условий.

## 2. Модель многократного захвата

Переменный порядок дробной производной в уравнении переноса может связан с вариацией плотности локализованных состояний в модели многократного захвата. Поясним подробнее этот случай. Система кинетических уравнений для модели многократного захвата включает уравнение баланса между локализованными и делокализованными частицами:

$$\frac{\partial p_t(x, t; \varepsilon)}{\partial t} = \omega_\varepsilon \rho(\varepsilon; x, t) f(x, t) - \nu_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} p_t(x, t; \varepsilon). \quad (1)$$

и уравнение непрерывности

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu E f(x, t) - D \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right] = N \delta(x) \delta(t), \quad (2)$$

где  $\mu$  и  $D$  – подвижность и коэффициент диффузии делокализованных частиц. Подразумевается начальное условие  $p(x, t = 0) = N \delta(x)$ . Здесь  $f(x, t)$  и  $p_t(x, t; \varepsilon)$  – концентрации делокализованных и захваченных (локализованных) частиц,

$$p(x, t) = f(x, t) + \int p_t(x, t, \varepsilon) d\varepsilon, \quad (3)$$

а  $\varepsilon$  – энергия локализованного состояния.

Предполагается, что детальные условия баланса соблюдены. Решение уравнения захвата-эмиссии (1) относительно концентрации локализованных частиц имеет вид:

$$p_t(x, t; \varepsilon) = \int_0^t f(x, \tau) \omega_\varepsilon \rho(\varepsilon; x, \tau) \exp \left\{ -\nu_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} (t - \tau) \right\} d\tau. \quad (4)$$

После подстановки этого соотношения в уравнение неразрывности получаем

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t f(x, \tau) Q(t - \tau; x, \tau) d\tau + \mu E \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} - D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = N \delta(x) \delta(t).$$

Уравнение содержит интегро-дифференциальный оператор с ядром памяти, не обязательно однородным во времени. В случае пространственной неоднородности он может зависеть от координаты. Выражение для интегрального ядра имеет вид [1]:

$$Q(t - \tau; x, \tau) = \int_0^\infty \omega_\varepsilon \exp \left\{ -\nu_\varepsilon (t - \tau) e^{-\varepsilon/kT} \right\} \rho(\varepsilon; x, \tau) d\varepsilon.$$

Подставив в это выражение экспоненциальную плотность состояний с шириной, зависящей от времени и координат, можно получить степенное ядро памяти:

$$Q(t - \tau; x, \tau) \sim \frac{\omega_0 \Gamma(1 + \alpha(x, \tau))}{(\omega_0 N_f / N_t)^{\alpha(x, \tau)}} (t - \tau)^{-\alpha(x, \tau)}, \quad t - \tau \rightarrow \infty, \quad \alpha(x, \tau) = \frac{kT}{\varepsilon_0(x, \tau)}.$$

Показатель степени этой степенной асимптотики зависит от времени и координат. Подразумевается ограничение  $0 < \alpha(x, t) \leq 1$ .



### 3. Диффузионное уравнение с производной переменного порядка

После подстановки вышеприведённого ядра памяти приходим к уравнению для концентрации свободных носителей, оно имеет вид дробного уравнения переменного порядка

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \omega_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\pi\alpha(x, \tau)}{\sin \pi\alpha(x, \tau)} \frac{f(x, \tau)}{(\nu_0(t - \tau))^{\alpha(x, \tau)}} \frac{d\tau}{\Gamma(1 - \alpha(x, \tau))} + \mu E \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} - D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = N\delta(x)\delta(t). \quad (5)$$

Для однородного дробного порядка  $\alpha(t)$ , зависящего только от времени, уравнение для полной концентрации принимает вид:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \omega_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\pi\alpha(\tau)}{\sin \pi\alpha(\tau)} \frac{\partial p(x, \tau)}{\partial \tau} \frac{1}{(\nu_0(t - \tau))^{\alpha(\tau)}} \frac{d\tau}{\Gamma(1 - \alpha(\tau))} + \mu E \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} - D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} = N\delta(x)\delta(t) + N \omega_0 \frac{\pi\alpha(0)}{\sin \pi\alpha(0)} \frac{(\nu_0 t)^{-\alpha(0)}}{\Gamma(1 - \alpha(0))}.$$

Таким образом, в рамках модели многократного захвата обосновано дробное дифференциальное уравнение диффузии переменного порядка. Уравнение содержит дробную производную по времени, порядок которой может зависеть как от координаты, так и от времени. Зависимость порядка производной от времени и координаты вводится путем изменения ширины распределения локализованных состояний по энергии. Темп локализации зависит от плотности локализованных состояний и изменяется при изменении функции  $\rho(\varepsilon; x, t)$ . Скорость делокализации, как и прежде, определяется исключительно значением энергии локализованного состояния. В линейном приближении предполагается, что концентрация частиц значительно ниже пространственной плотности ловушек в образце, а энергия ловушки, в которой находится захваченная частица, остаётся неизменной при изменении плотности.

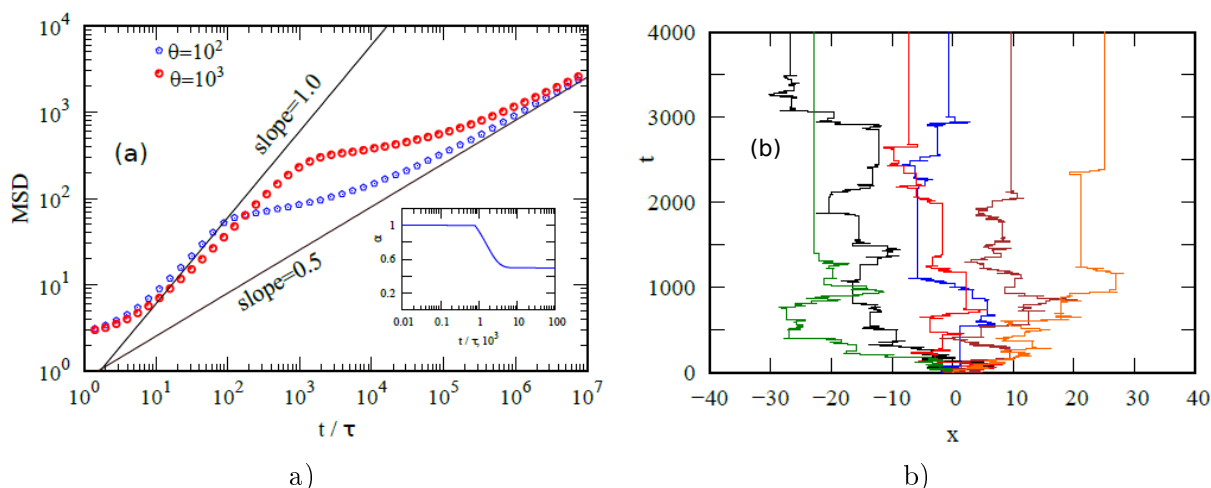
Оператор переменного порядка, полученный в рамках модели, имеет вид

$$D^{\alpha(t)} f(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha(\tau)}} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(\tau))} \frac{\pi\alpha(\tau)}{\sin \pi\alpha(\tau)} d\tau, \quad 0 < \alpha(t) \leq 1.$$

Предложенный вывод не только привел к определенному виду уравнения с дробной производной переменного порядка, но и позволяет использовать его в качестве основы алгоритма Монте-Карло для численного решения этого уравнения. Алгоритм может быть получен адаптацией алгоритма моделирования многократного захвата [1].

На рис. 1 представлены результаты моделирования методом Монте-Карло процесса дробной диффузии переменного порядка. Вариация порядка задаётся выражением:

$$\alpha = \min \left\{ 1, 2 - \frac{3/2}{1 + \exp[(T - t)/\theta]} \right\} \quad (6)$$



**Рис. 1.** Результаты моделирования дробной диффузии переменного порядка методом Монте-Карло: а) зависимость среднеквадратического смещения от времени для двух интервалов перехода дробного порядка: 1 –  $\theta = 10^2$ ; 2 –  $\theta = 10^3$ , зависимость  $\alpha(t)$  показана на вставке; б) пространственно-временные траектории частиц для  $\theta = 10^3$ .

с  $T = 10^2$  и  $\theta = 10^2$  и  $10^3$ . Показана временная зависимость среднеквадратического смещения для двух ширин перехода  $\theta = 10^2$  и  $\theta = 10^3$ . Зависимость  $\alpha(t)$  приведена на вставке. Пространственно-временные траектории частиц для  $\theta = 10^3$  и средний квадрат смещения указывают на переход от нормального диффузионного режима к аномальной диффузии (субдиффузии). Аномальный режим определяется нелинейной зависимостью  $\langle(\Delta x)^2\rangle \propto t^\gamma$  с  $\gamma < 1$  для субдиффузии. Следует отметить, что переходная область характеризуется субдиффузионным показателем, меньшим асимптотического значения. Траектории носителей показывают, что с течением времени распределение времен локализации становится шире и появляются события с более длительными временами локализации. Это связано с уменьшением порядка производной, который согласован с показателем степенного распределения времён локализации в модели случайных блужданий с непрерывным временем [1].

## 4. Заключение

В рамках модели дисперсионной диффузии с многократным захватом обосновано уравнение с производной переменного дробного порядка. Существенной характеристикой данной модели является изменение плотности энергии локализованных состояний при соблюдении условия детального баланса между локализованными и подвижными частицами. Полученное уравнение переноса с дробной производной переменного порядка может быть полезным для описания переходной аномальной диффузии в гетерогенных материалах, при этом порядок уравнения зависит от выбранного пространственного и/или временного масштаба.

## Литература

1. Uchaikin V.V., Sibatov R.T. Fractional Kinetics in Solids. World Scientific, 2013.
2. Uchaikin V.V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Springer, 2013.
3. Evangelista L.R., Lenzi E.K. Fractional Diffusion Equations and Anomalous

Diffusion. Cambridge University Press, 2018.

4. Sun, HongGuang, et al. A review on variable-order fractional differential equations: mathematical foundations, physical models, numerical methods and applications. // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2019. Vol 22, 1. P. 27.
5. Chechkin A.V., Gorenflo R., Sokolov I.M. Fractional diffusion in inhomogeneous media. // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2005. Vol. 38 (42). P. L679.
6. Straka P. Variable order fractional Fokker–Planck equations derived from Continuous Time Random Walks. // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2018. Vol. 503. P. 451.

MSC 82D20

## Subdiffusion of variable order: interpretation in terms of the multiple trapping model

R.T. Sibatov<sup>1,2</sup>

Scientific Manufacturing Complex «Technological Centre»<sup>1</sup>  
Ulyanovsk State University<sup>2</sup>

*Abstract:* In the framework of dispersive transport model with multiple trapping, an equation of anomalous diffusion with a variable-order fractional derivative has been substantiated. The relationship between the derived equation and the specific physical model indicates a Monte Carlo numerical algorithm for its solution. A significant feature of the model is the change in the density of energy of localized states under the condition of detailed balance between the trapped and delocalized particles.

*Keywords:* anomalous diffusion, fractional derivative, multiple trapping, Monte Carlo method.

### References

1. Uchaikin V.V., Sibatov R.T. Fractional Kinetics in Solids. World Scientific, 2013.
2. Uchaikin V.V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Springer, 2013.
3. Evangelista L.R., Lenzi E.K. Fractional Diffusion Equations and Anomalous Diffusion. Cambridge University Press, 2018.
4. Sun, HongGuang, et al. A review on variable-order fractional differential equations: mathematical foundations, physical models, numerical methods and applications // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2019. Vol 22, 1. P. 27.
5. Chechkin A.V., Gorenflo R., Sokolov I.M. Fractional diffusion in inhomogeneous media. // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2005. Vol. 38 (42). P. L679.
6. Straka P. Variable order fractional Fokker–Planck equations derived from Continuous Time Random Walks. // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2018. Vol. 503. P. 451.

УДК 519.6

## Стохастическое моделирование хрупкого разрушения материалов с рывковой динамикой трещин\*

Сибатов Р.Т.<sup>1,2</sup>, Морозова Е.В.<sup>2</sup>, Тимкаева Д.А.<sup>2</sup>

НПК «Технологический центр»<sup>1</sup>,  
Ульяновский государственный университет<sup>2</sup>

*Аннотация:* Многочисленные эксперименты продемонстрировали, что хрупкое разрушение материалов обладает масштабно-инвариантными свойствами. Наблюдается рывковая динамика трещин со случайным импульсным выделением энергии, распределенной по степенному закону в широком диапазоне значений. Для описания хрупкого разрушения материалов с масштабно-инвариантными свойствами предложен случайный процесс, представляющий собой смесь процесса Орнштейна-Уленбека и односторонних полетов Леви, где первый – соответствует пуассоновскому потоку событий деградации, а второй – описывают перемежаемую динамику роста трещины. Поток событий приращения длины трещины управляется дробным пуассоновским процессом, а вклад этих событий в разрушение системы следует степенному закону распределения. Предложен критерий для прогноза гарантированного срока службы материала без разрушения.

*Ключевые слова:* хрупкое разрушение, случайный процесс, дробная производная, полёты Леви, перемежаемость.

### 1. Введение

Множество экспериментов показали, что хрупкое разрушение в материалах проявляет масштабно-инвариантные свойства [1]. В частности, системы разрушения проявляют рывковую динамику трещин со случайным импульсным высвобождением энергии. Распределение энергии этих дискретных событий имеет степенной вид, который охватывает множество порядков величины. Эти наблюдения являются общими для многих материалов. Они не могут быть описаны стандартной теорией непрерывных сред. На динамику роста трещины оказывают влияние множество физических процессов, таких как диффузия, пластическая деформация, диссипация энергии и взаимодействие с окружающей средой. В статье [1] представлен критический обзор экспериментов и результатов моделирования кинетики роста трещины. Ключевым результатом является обнаружение универсальных масштабных закономерностей, независимых как от конкретного материала, так и от условий нагружения, что напоминает область критических явлений.

Часто наблюдается [2] также, что подкритический рост трещины носит перемежаемый характер. Существуют периоды покоя, во время которых кончик трещины закрепляется и не движется, а также моменты, когда трещина внезапно открывается и продвигается на определенное расстояние  $s$ . Трещина продвигается скачками, пока не достигнет критической длины  $L_c$ , после чего лист материала разрушается. Подкритический рост трещины наблюдают путем приложения постоянной силы  $F$

---

\*Работа выполнена в рамках проекта РНФ (грант 22-11-00036).

так, чтобы значение фактора интенсивности напряжений  $K(L_i)$  было меньше критического порога разрушения материала  $K_c$ , при превышении которого происходит быстрое распространение трещины [2].

В данной работе для описания хрупкого разрушения материалов с масштабнo-инвариантными свойствами предложен случайный процесс, который является смесью процесса Орнштейна–Уленбека и односторонних полетов Леви. Первый из них соответствует пуассоновскому потоку событий деградации, а второй описывает перемежаемую динамику роста трещины. Поток событий, вызывающих увеличение длины трещины, управляется дробным пуассоновским процессом, а влияние этих событий на разрушение системы подчиняется степенному закону распределения. Также предложен критерий, позволяющий прогнозировать гарантированный срок службы материала без разрушения.

## 2. Перемежаемая динамика трещин и полёты Леви

Дифференциальное уравнение для динамики деградации может быть записано в следующей форме:

$$dE = -\gamma E(t)dt - S(t)dt + G(t)dt. \quad (1)$$

Здесь  $E(t)$  – функция состояния системы (например, прочности),  $S(t)$  – функция мощности нагрузки, приводящей к деградации материала,  $G(t)$  – функция восстановления,  $\gamma$  – параметр деградации. Для описания процесса деградации необходимо учитывать стохастическую природу процессов разрушения.

Деградация часто может быть описана случайным процессом, описываемым следующим стохастическим дифференциальным уравнением в смысле Ито:

$$dE_t = -\gamma E_t dt + \sigma_0 dW_t. \quad (2)$$

Здесь  $W_t$  – винеровский процесс, и второе слагаемое подразумевает влияние случайных факторов на деградацию,  $\sigma_0$  – параметр интенсивности шума. Уравнение (3) соответствует стохастическому процессу Орнштейна–Уленбека, который является гауссовским, марковским и однородным во времени.

Распределение микротрещин в материале с неупорядоченной структурой может быть статистически описано с использованием функции плотности распределения  $p(L, \theta, \varphi)$  общего размера трещин  $L$ , с учетом направления микротрещин. Для простоты, часто предполагается равномерное макроскопическое пространственное распределение. Положение совместных трещин определяется их центрами масс. Фрактальная размерность трещины составляет  $2 < D < 3$ . Для максимального размера трещины обычно выполняется масштабирующее соотношение  $L_{max} \propto s^\delta$ , где  $s$  – линейный размер самого тела,  $\delta < 1$  [3]. В работе Карпинтери и др. обосновано, что функция плотности вероятности  $p(L)$  должна иметь степенную зависимость.

$$p(L) \sim L^{-1-\gamma}, \quad \gamma = \frac{D}{\delta}.$$

Таким образом, количество дефектов, превышающих размер  $L$ , определяется соотношением  $N(> L) \propto L^{-\gamma}$ . Последнее выражение идентично функции Гутенберга–Рихтера. Карпинтери и соавторы отмечают, что значения параметров  $D$  и  $\delta$  могут изменяться в процессе повреждения материала.

Важным представляется случай аномальных событий деградации, связанных с большими скачками. Такие скачки можно описать с помощью распределения Леви

[7]. Для такого процесса мы используем одномерную версию «расцепленной» модели CTRW [4] с длинами переходов  $R_j$  и временем ожидания  $T_j$ , распределенными по законам с тяжелыми хвостами:

$$P\{\xi > \xi\} \propto \xi^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad r \rightarrow \infty; \quad P\{\tau > t\} \propto t^{-\beta}, \quad \beta > 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Асимптотическая ( $t \rightarrow \infty$ ) функция плотности вероятности  $p(\xi, t)$  подчиняется уравнению дробной диффузии (см., например, [8, 9])

$$\frac{\partial^\beta p(\xi, t)}{\partial t^\beta} = C \frac{\partial^\alpha p(\xi, t)}{\partial \xi^\alpha} p(\xi, t) + \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \delta(\xi), \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad (3)$$

где дробная производная Римана–Лиувилля порядка  $\beta$  имеет вид:

$$\frac{\partial^\beta p(\xi, t)}{\partial t^\beta} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{p(\xi, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\beta}.$$

Записанное дробное уравнение в частных производных соответствует односторонним полетам Леви и имеет следующее решение [9], выраженное через дробно-устойчивую плотность:

$$p_{LF}(\xi, t) = (Ct^\beta)^{-1/\alpha} g_+(\xi(Ct^\beta)^{-1/\alpha}; \alpha, \beta). \quad (4)$$

Выражение можно записать через односторонние устойчивые плотности Леви

$$p_{LF}(\xi, t) = (Ct^\beta)^{-1/\alpha} \int_0^\infty g_+^{(\alpha)}\left((Ct^\beta)^{-1/\alpha} \xi \tau^{\beta/\alpha}\right) g_+^{(\beta)}(\tau) \tau^{\beta/\alpha} d\tau. \quad (5)$$

Здесь  $g_+^{(\beta)}(\tau)$  – односторонняя устойчивая плотность Леви, определяемая ее преобразованием Лапласа  $\tilde{g}_+^{(\beta)}(s) = \exp(-s^\beta)$ .

### 3. Смесь процесса Орнштейна–Уленбека и односторонних полетов Леви

Мы рассматриваем процесс деградации как смесь процесса Орнштейна–Уленбека (соответствующего нормальной деградации) и односторонних полетов Леви (связанных с редким потоком экстремальных деструктивных событий). Из-за степенного распределения временных интервалов между резкими приращениями длины усталостной трещины мы предлагаем заменить управляющий процесс на дробный пуассоновский процесс, что приводит к односторонним полетам Леви. Вклад этих событий в разрушение системы следует степенному закону распределения. В интервалах между этими событиями процесс деградации описывается марковским процессом – процессом Орнштейна–Уленбека.

Для процесса Орнштейна–Уленбека распределение имеет вид:

$$\rho_{OU}(E, t) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi\sigma_0^2(1-e^{-2\gamma t})}} \exp\left[-\frac{\gamma(E-\mu(1-e^{-\gamma t})-E_0e^{-\gamma t})^2}{\sigma_0^2(1-e^{-2\gamma t})}\right]. \quad (6)$$

Распределение для смешанного процесса будет задано свёрткой распределений (5) и (6) с учётом соответствующих весов.

В работе обоснован критерий гарантированного срока службы  $t_f$ , который можно записать в виде уравнения

$$E_{\min} = E_0 e^{-\gamma t_f} + \frac{g}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t_f}) - \eta_\theta \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t_f})} - \Delta_\theta(t_f).$$

Здесь  $\eta_\theta$  – коэффициент, определяемый уровнем вероятности  $\theta$  обнаружить гауссову случайную величину  $\phi$  в интервале с границами  $\bar{\phi} \pm \eta_\theta \sqrt{\text{Var}(\phi)}$ ,  $\Delta_\theta(t_f)$  – ширина одностороннего дробного устойчивого распределения (4), соответствующего вероятности  $\theta = P(\xi < \Delta_\theta(t_f))$ . Величина  $E_{\min}$  соответствует минимальному значению допустимой прочности материала.

## 4. Заключение

Многочисленные экспериментальные исследования продемонстрировали, что хрупкое разрушение материалов проявляет масштабно-инвариантные свойства, например, характеризуется рывковым характером трещин со случайным импульсным высвобождением энергии со степенным распределением. Для описания хрупкого разрушения материалов с рывковой динамикой трещин предложена модель стохастической смеси процесса Орнштейна–Уленбека и односторонних полетов Леви, где первый из них соответствует пуассоновскому потоку «мелких» событий деградации, а второй описывает перемежаемую динамику роста трещины. Введён критерий для гарантированного срока службы системы.

## Литература

1. Bonamy D. Intermittency and roughening in the failure of brittle heterogeneous materials // J. of Physics D: Applied Physics. 2009. Vol. 42. P. 214014.
2. Santucci S., Vanel L., Ciliberto S.. Slow crack growth: models and experiments // The European Phys. J. Special Topics. 2007. Vol. 146. P. 341.
3. Spagnoli A., Carpinteri A., Terzano M. Mode II fracture toughness for non-planar frictional cracks // Procedia Structural Integrity. 2018. Vol. 9. P. 159.
4. Montroll E.W., Weiss G.H. Random walks on lattices. II // J. of Math. Physics. 1965. Vol. 6. P. 167.
5. Repin O.N., Saichev A.I. Fractional Poisson law // Radiophysics and Quantum Electronics. 2000. Vol. 43. P. 738.
6. Uchaikin V.V., Cahoy D.O., Sibatov R.T. Fractional processes: from Poisson to branching one // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18. P. 2717.
7. Yin Shu et al. Lévy-driven non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck processes for degradation-based reliability analysis // IIE Transactions. 2016. Vol. 48. P. 993.
8. Dubkov A.A., Spagnolo B., Uchaikin V.V. Lévy flight superdiffusion: an introduction // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18. P. 2649.
9. Sibatov R.T. Fractal generalization of the Scher–Montroll model for anomalous transit-time dispersion in disordered solids // Mathematics. 2020. Vol. 8. P. 1991.



MSC 82D20

## Stochastic modeling of brittle fracture of materials with jerky crack dynamics

R.T. Sibatov<sup>1,2</sup>, E.V. Morozova<sup>2</sup>, D.A. Timkaeva<sup>2</sup>

Scientific Manufacturing Complex «Technological Centre»<sup>1</sup>  
Ulyanovsk State University<sup>2</sup>

*Abstract:* Numerous experiments have demonstrated that brittle fracture of materials exhibits scale-invariant properties. There is a jerky dynamics of cracks with random impulsive energy releases. The energies of these individual events follow a power law distribution, covering a wide range of values. A stochastic process has been proposed to describe brittle fracture of materials with scale-invariant properties, representing a mixture of the Ornstein–Uhlenbeck process and one-sided Lévy flights. The former corresponds to a Poisson flow of degradation events, while the latter describes the intermittent dynamics of crack growth. The flow of crack length increment events is governed by a fractional Poisson process, and the contribution of these events to the failure of the system follows a power law distribution. A criterion has been proposed to predict the guaranteed service life of the material without failure.

*Keywords:* brittle fracture, random process, fractional derivative, Lévy flights, intermittency.

### References

1. Bonamy D. Intermittency and roughening in the failure of brittle heterogeneous materials // J. of Physics D: Applied Physics. 2009. Vol. 42. P. 214014.
2. Santucci S., Vanel L., Ciliberto S.. Slow crack growth: models and experiments // The European Phys. J. Special Topics. 2007. Vol. 146. P. 341.
3. Spagnoli A., Carpinteri A., Terzano M. Mode II fracture toughness for non-planar frictional cracks // Procedia Structural Integrity. 2018. Vol. 9. P. 159.
4. Montroll E.W., Weiss G.H. Random walks on lattices. II // J. of Math. Physics. 1965. Vol. 6. P. 167.
5. Repin O.N., Saichev A.I. Fractional Poisson law // Radiophysics and Quantum Electronics. 2000. Vol. 43. P. 738.
6. Uchaikin V.V., Cahoy D.O., Sibatov R.T. Fractional processes: from Poisson to branching one // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18. P. 2717.
7. Yin Shu et al. Lévy-driven non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck processes for degradation-based reliability analysis // IIE Transactions. 2016. Vol. 48. P. 993.
8. Dubkov A.A., Spagnolo B., Uchaikin V.V. Lévy flight superdiffusion: an introduction // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18. P. 2649.
9. Sibatov R.T. Fractal generalization of the Scher–Montroll model for anomalous transit-time dispersion in disordered solids // Mathematics. 2020. Vol. 8. P. 1991.

УДК 519.63

## Разработка и реализация вычислительного алгоритма для моделирования реагирующих газовых потоков\*

Тиньгаева Н.А., Пескова Е.Е.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

*Аннотация:* Работа посвящена построению вычислительного алгоритма для исследования химически реагирующих дозвуковых вязких потоков. Для описания течений используется многокомпонентная система уравнений Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха, дополненная системой уравнений химической кинетики. Алгоритм для данной модели разработан на основе метода расщепления по физическим процессам. Шаг по времени выбирается из условия устойчивости для гиперболической части системы за счет проведения итераций внутри одного шага по времени для расчета диффузии, вязкости, теплопроводности и динамической составляющей давления. Проведенные расчеты на последовательности сгущающихся сеток показали сходимость алгоритма.

*Ключевые слова:* дозвуковое течение, химически активные потоки, вычислительный алгоритм.

Разработка вычислительных алгоритмов для дозвуковых многокомпонентных течений с учетом вязкости, теплопроводности и химических превращений в настоящее время является актуальным направлением вычислительной математики. В первую очередь это связано со сложностью их построения – процессы, обязательные к описанию, сложны и многофакторны, они обладают существенно различающимися характерными временами. Зачастую такие течения описываются уравнениями Навье-Стокса с различными модификациями [1, 2]. Для решения систем успешно апробирована практика построения вычислительных алгоритмов на основе расщепления по физическим процессам [3]. Шаг интегрирования по времени в данных схемах определяется, как правило, из условия устойчивости для параболической части уравнений.

При повышении температуры газовых потоков и включении в расчеты радикально-цепных химических реакций коэффициенты диффузии и теплопроводности существенно возрастают. Это накладывает серьезные ограничения на временной шаг при интегрировании уравнений и приводит к значительному увеличению времени, необходимого для численного моделирования практических задач.

В настоящей работе разработан алгоритм, расчет в котором ведется с шагом по времени, ограниченным условием устойчивости для гиперболической части задачи, а для расчета параболической части, включающей процессы диффузии, вязкости и теплопроводности, используется итерационный процесс внутри общего расчетного шага. Численный алгоритм в рамках одного шага по времени разбивается на решение уравнений химической кинетики, решение гиперболической части уравнений, решение параболической части, решение уравнения эллиптического типа для нахождения давления.

Для тестирования построенного алгоритма решена задача конверсии метана в

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 23-21-002, <https://rscf.ru/project/23-21-00202/>.

двумерной постановке. Проведены расчеты на последовательности сгущающихся сеток, показавшие устойчивость построенного алгоритма. Проведено сравнение результатов расчетов построенного алгоритма с ранее разработанным, в котором шаг по времени рассчитывается исходя из условия устойчивости явной схемы для решения уравнений параболического типа [4]. Получено хорошее совпадение результатов расчетов при более высокой скорости работы нового алгоритма, предлагаемого в данной работе.

## **Литература**

1. Day M.S., Bell J.B. Numerical simulation of laminar reacting flows with complex chemistry // *Combustion Theory and Modelling*. 2000. Vol. 4, No. 4. P. 535–556.
2. Borisov V.E., Yakush S.E., Sysoeva E.Ya. Numerical Simulation of Cellular Flame Propagation in Narrow Gaps // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2022. Vol. 14. P. 755–770.
3. Марчук Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
4. Пескова Е.Е., Снытников В.Н., Жалнин Р.В. Вычислительный алгоритм для изучения внутренних ламинарных потоков многокомпонентного газа с разномасштабными химическими процессами // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2023. Т.15, №5. С. 1169–1187.

MSC 65L20

## Development and implementation of a computational algorithm for modeling reactive gas flows

E.E. Peskova, N.A. Tingaeva

National Research Mordovia State University

*Abstract:* The work is devoted to the construction of a computational algorithm for the study of chemically reacting subsonic viscous flows. A multicomponent system of Navier-Stokes equations with the Low Mach numbers approximation is used to describe the flows. It is supplemented by a system of chemical kinetics equations. The algorithm for this model has been developed based on the method of splitting by physical processes. The time step is selected from the stability condition for the hyperbolic part of the system by iterating within one time step to calculate diffusion, viscosity, thermal conductivity and the dynamic component of pressure. The calculations performed on a sequence of thickening grids showed the convergence of the algorithm.

*Keywords:* subsonic flow, chemically active flows, computational algorithm.

### References

1. Day M.S., Bell J.B. Numerical simulation of laminar reacting flows with complex chemistry // *Combustion Theory and Modelling*. 2000. Vol. 4, No. 4. P. 535–556.
2. Borisov V.E., Yakush S.E., Sysoeva E.Ya. Numerical Simulation of Cellular Flame Propagation in Narrow Gaps // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2022. Vol. 14. P. 755–770.
3. Marchuk G.I. *Metody rasshchepleniya*. M.: Nauka, 1988.
4. Peskova E.E., Snytnikov V.N., Zhalnin R.V. The computational algorithm for studying internal laminar flows of a multicomponent gas with different-scale chemical processes // *Computer Research and Modeling*. 2023. Vol. 15, No. 5. P. 1169-1187. DOI: 10.20537/2076-7633-2023-15-5-1169-1187.

УДК 519.64

## Итерационные методы решения квадратичных интегральных уравнений I рода

Тында А.Н.

ФГБОУ ВО Пензенский государственный университет

*Аннотация:* Работа посвящена построению численных методов решения квадратичных интегральных уравнений Вольтерра. Предложены два итерационных численных метода, один из которых основан на линеаризации интегрального оператора по модифицированной схеме Ньютона-Канторович, а второй содержит параметр регуляризации и обладает сглаживающими свойствами.

*Ключевые слова:* квадратичные интегральные уравнения, численные метод, линеаризация, регуляризация.

В начале прошлого столетия итальянским математиком Вито Вольтерра было введено [1] понятие интегро-степенного ряда

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^t K_n(t, s_1, s_2, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(s_k) ds_k, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

В развернутом виде

$$y(t) = \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 + \\ + \int_0^t \int_0^t \int_0^t K_3(t, s_1, s_2, s_3)x(s_1)x(s_2)x(s_3)ds_1ds_2ds_3 + \cdots, \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Запись (1) можно рассматривать как математическую модель вида «вход-выход» для нелинейной динамической системы. В этом случае ядра  $K_1(t, s)$ ,  $K_2(t, s_1, s_2)$ , ... играют роль переходных характеристик, учитывающих динамические нелинейности системы с одним входом  $x(t)$  и одним выходом  $y(t)$ .

Моделирование различных нелинейных динамических объектов с помощью полиномов Вольтерра основывается на теореме Фреше, которая является континуальным аналогом теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции многочленами.

Основные направления исследований:

- задачи идентификации;
- исследование полилинейных интегральных уравнений.

Частные случаи:

1.  $N = 1$ . Классическое линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода.

$$\int_0^t K_1(t, s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

2.  $N = 2$ . Квадратичное (билинейное) интегральное уравнение Вольтерра.

$$\int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Классические уравнения вида (3) с различного рода ядрами в различных пространствах достаточно хорошо изучены, разработан широкий спектр методов с регуляризацией [2].

Уравнения с ядрами, терпящих разрывы вдоль семейства гладких кривых (слабо-регулярные уравнения Вольтерра I рода), классифицированы Д.Н. Сидоровым [3,4] и активно изучались многими авторами в течение последнего десятилетия [5,6]. Модели Вольтерра с такими ядрами находят применение при моделировании различных динамических процессов, включая системы накопителей энергии [6].

Среди работ, посвященных изучению интегральных уравнений вида (4), необходимо отметить серию работ А.С. Апарцина [7,8].

Настоящая работа посвящена разработке численных схем решения квадратичного интегрального уравнения Вольтерра (4). Предлагается два итерационных численных метода, один из которых основан на линеаризации интегрального оператора, а второй обладает сглаживающими свойствами.

## Литература

1. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1982. 304 с.
2. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. Киев: Наукова думка, 1986. 543 с.
3. Sidorov D.N. On parametric families of solutions of Volterra integral equations of the first kind with piecewise smooth kernel // Diff. Equat. 2013. 49. P. 210–216.
4. Sidorov D. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals And Control, In:L. O. CHUA, ed. World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A: Vol. 87, Singapore: World Scientific Press, 2015.
5. Muftahov I., Tynda A., Sidorov D. Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. 313. P. 119–128.
6. Sidorov D., Tynda A., Muftahov I., Dreglea A., Liu F. Nonlinear Systems of Volterra Equations with Piecewise Smooth Kernels: Numerical Solution and Application for Power Systems Operation // Mathematics. 2020. 8, 1257.
7. Апарцин А.С. Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра I рода: элементы теории и численные методы // Известия Иркутского гос. ун-та. Серия Математика. 2007. № 1. С. 13–41.
8. Апарцин А.С. О сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода // ЖВМиМФ. 2007. Т. 47, № 8. С. 1380–1388.
9. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Functional Analysis. Pergamon, 2nd edition, 1982. 589 p.

MSC 65R20

## Iterative methods for solving quadratic integral equations of the first kind

A.N. Tynda

Penza State University

*Abstract:* The paper is devoted to the construction of numerical methods for solving quadratic integral Volterra equations. Two iterative numerical methods are proposed, one of which is based on the linearization of the integral operator according to the modified Newton-Kantorovich scheme, and the second contains a regularization parameter and has smoothing properties.

*Keywords:* quadratic integral equations, numerical method, linearization, regularization

### References

1. Volterra V. Theory of functionals, integral and integro-differential equations. Moscow: Nauka, 1982. 304 p. (in Russ.)
2. Verlan A.F., Sizikov V.S. Integral equations: methods, algorithms, programs. Handbook. Kiev: Naukova Dumka, 1986. 543p. (in Russ.)
3. Sidorov D.N. On parametric families of solutions of Volterra integral equations of the first kind with piecewise smooth kernel // Diff. Equat. 2013. 49. P. 210–216.
4. Sidorov D. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals And Control, In: L. O. CHUA, ed. World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A: Vol. 87, Singapore: World Scientific Press, 2015 .
5. Muftahov I., Tynda A., Sidorov D. Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. 313. P. 119–128.
6. Sidorov D., Tynda A., Muftahov I., Dreglea A., Liu F. Nonlinear Systems of Volterra Equations with Piecewise Smooth Kernels: Numerical Solution and Application for Power Systems Operation // Mathematics. 2020. 8, 1257.
7. Apartsin A.S. Polilinear Integral Volterra Equations of the First Kind: Elements of the Theory and Numerical Methods // Izv. Irkut. Gos. Univ., Ser. Mat. 2007. 1. P. 13–42 (in Russ.)
8. Apartsin A.S. On the convergence of numerical methods for solving a Volterra bilinear equations of the first kind // Comput. Math. and Math. Phys. 2007. Vol. 47. P. 1323–1331. <https://doi.org/10.1134/S0965542507080106>
9. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Functional Analysis. Pergamon, 2nd edition, 1982. 589 p.

УДК 519.60

# О численной реализации прямой кинетической задачи расчета конверсионной кривой для процессов радикальной полимеризации

Хисаметдинова Г.К., Юнусова Д.С., Корнилова А.А., Гиззатова Э.Р.

Уфимский университет науки и технологий

*Аннотация:* В работе приводится математическая модель процесса радикальной полимеризации, используемая для расчета конверсионной кривой. Анализируется способ ее решения и дается рекомендация к численным алгоритмам поиска, при этом указывается круг проблем, возникающих при использовании готовых алгоритмов.

*Ключевые слова:* радикальная полимеризация, конверсия, математическая модель.

## 1. Введение

Исследование процессов радикальной полимеризации может вестись как эмпирическими [1], так и аналитическими методами [2]. В свою очередь, аналитические методы ограничиваются лишь узким кругом идеальных моделей, поскольку их применение крайне затруднено в силу сложности самих математических моделей процесса. Чаще всего решение ищется численными методами, но и здесь есть ряд проблем, возникающих при использовании алгоритмов поиска обратных задач: безусловная оптимизация и жесткость систем дифференциальных уравнений. Обойти первую проблему удастся введением дополнительных условий на значения искомых параметров, но вторая зачастую требует применения не готовых алгоритмов, доступных в имеющихся приложениях, а использования особенных подходов, конкретизирующих решение.

## 2. Постановка задачи

В рассмотрение вводится кинетическая схема процесса радикальной полимеризации, проходящая в пять стадий: инициирование активных центров полимеризации, роста активной цепи, передачи активной цепи на мономер, рекомбинации и диспропорционирования. Каждая стадия протекает согласно своему закону взаимодействия глобул полимера [3].

Интересующая конверсионная кривая может быть получена из следующей системы:

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= -k_i I \\ \frac{dM}{dt} &= -(k_M + k_p) M C_a \\ \frac{dC_a}{dt} &= k_i I - (k_{rec} + k_{disp}) C_a^2\end{aligned}\tag{1}$$



Начальные данные для системы (1) имеют вид:

$$I(0) = I^{(0)}, M(0) = M^{(0)}, C_a(0) = C_a^{(0)} \quad (2)$$

Константы скорости  $k_i$  и  $k_M$  зависят от температуры по закону Аррениуса:

$$k = k_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right). \quad (3)$$

Константы скорости стадий бимолекулярного обрыва  $k_{rec}$  и  $k_{disp}$  зависят от температуры по измененной аррениусовской зависимости:

$$k^* = k \cdot \exp(-c_1U - c_2U^2 - c_3U^3). \quad (4)$$

Требуется решить систему дифференциальных уравнений (1) с начальными данными (2) с учетом известных зависимостей (3)-(4).

В силу зависимости констант не только от температуры процессы и конверсии мономера, система дифференциальных уравнений (1) становится достаточно жесткой и требует непростых алгоритмов решения.

### 3. Методика решения

Одним из кажущихся простыми способов решения системы (1)-(2) является применение неявных численных методов, реализованных в существующих известных математических пакетах. Они дают, но к сожалению, не предоставляют качественного анализа. Здесь необходимо отметить, что процесс радикальной полимеризации сложен из-за сменяющих друг друга стационарного и нестационарного режимов. Именно точки переключения режимов и являются целью анализа конверсионной кривой.

Для успешного согласования химической и математической сторон процесса, для анализа был использован подход, описанный в работе [3]. Он предоставляет возможность слежения за динамикой процесса и за точками переключения.

В основе подхода матрица значимости каждого компонента системы (1) в каждый момент времени:

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \frac{dI}{dt} & | & -k_i I & 0 & 0 \\ \frac{dM}{dt} & | & 0 & -(k_M + k_p) M C_a & 0 \\ \frac{dC_a}{dt} & | & k_i I & 0 & -(k_{rec} + k_{disp}) C_a^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

При падении значимости компонента системы (1) соответствующий элемент матрицы обнуляется, вид матрицы меняется, что означает смену режима работы процесса.

### Литература

1. Улитин Н.В., Терещенко К.А., Фризен А.К., Буракова А.О., Колесов С.В., Шиян Д.А., Темникова Н.Е. Кинетическая схема и кинетические константы процесса синтеза полиметилметакрилата, протекающего по радикально-координационному механизму // Кинетика и катализ. 2017. Т. 58, № 2. С. 133–144.

2. Gizzatov D.R., Kornilova A.A., Khisametdinova G.K., Gizzatova E.R. 2. The Method of Basic Functions in the Analysis of Monomer Conversion in Radical Polymerization // Proceedings - 2023 5th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency, SUMMA 2023. 2023. P. 48–51.
3. Гиззатова Э.Р., Спивак С.И., Колесов С.В. Математическое моделирование кинетической неоднородности констант скоростей бимолекулярного обрыва радикальной полимеризации // Системы управления и информационные технологии. 2015. №1-1(59). С. 126–129.

MSC 37N30

## On numerical realization of the direct kinetic problem of calculation of the conversion curve of radical polymerization processes

G.K. Khisametdinova, D.S. Yunusova, A.A. Kornilova, E.R. Gizatova  
Ufa University of Science and Technology

*Abstract:* This paper presents a mathematical model of the radical polymerization process used to calculate the conversion curve. The method of its solution is analyzed and a recommendation for numerical search algorithms is given, while the range of problems arising from the use of ready-made algorithms is indicated.

*Keywords:* radical polymerization, conversion, mathematical model.

### References

1. Ulitin N.V., Tereshchenko K.A., Friesen A.K., Burakova A.O., Kolesov S.V., Shiyani D.A., Temnikova N.E. Kinetic scheme and kinetic constants of the process of synthesis of polymethyl methacrylate proceeding by radical-coordination mechanism // *Kinetics and Catalysis*. 2017. Vol. 58, № 2. P. 133–144.
2. Gizatov D.R., Kornilova A.A., Khisametdinova G.K., Gizatova E.R. 2. The Method of Basic Functions in the Analysis of Monomer Conversion in Radical Polymerization // *Proceedings - 2023 5th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency, SUMMA 2023*. 2023. P. 48–51.
3. Gizatova E.R., Spivak S.I., Kolesov S.V. Mathematical modeling of kinetic inhomogeneity of bimolecular breakage rate constants of radical polymerization // *Control Systems and Information Technologies*. 2015. №1-1(59). P. 126–129.

УДК 519.63

## Компьютерное моделирование биомимитического закона отслеживания скрытых структур

Чеботарева В.Ю.

Научно-технологический Университет «Сириус»

*Аннотация:* В статье представлены результаты компьютерного моделирования алгоритма, вдохновленного биологическими системами. Мобильный робот типа автомобиля Дубинса перемещается по плоской поверхности с неизвестным скалярным полем. Робот оснащен двумя датчиками, измеряющими значения поля в текущем положении. Алгоритм направляет робота к точкам максимальных значений поля. В случае, когда эти точки образуют кривую, робот способен следовать этой кривой. В данной статье приведены результаты компьютерного моделирования данного метода. Моделирование подтверждает способность робота отслеживать структуру без оценки градиента.

*Ключевые слова:* мобильный робот, автономная навигация, компьютерное моделирование, отслеживание кривой.

### 1. Введение

Когда аргентинские муравьи движутся по феромонным тропам, они передвигаются с почти постоянной скоростью и регулируют свое движение с помощью поворотов, скорость которых ограничена [2]. Классической моделью такого поведения является так называемая машина Дубинса (1):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \theta, & \dot{\theta} &= u, & x(0) &= x_{in}, \\ \dot{y} &= v \sin \theta, & |u| &\leq \bar{u}, & y(0) &= y_{in}, & \theta(0) &= \theta_{in}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $x, y$  – это декартовы координаты характерной точки робота,  $v > 0$  – это постоянная скорость движения,  $\theta$  задает направление движения,  $u$  – это угловая скорость поворота, и  $\bar{u}$  – верхняя граница ее абсолютного значения. Модель (1) отражает способность робота следовать по любому пути с радиусом кривизны  $R = \frac{v}{u}$ , а также его неспособность справиться с большим искривлением. Управление формируется исходя из значений, полученных с датчиков.  $L$  – значения с левого датчика, а  $R$  – с правого. Робот выбирает поворот в сторону величины, которая является наибольшей среди  $L$  и  $R$ . В формировании выхода также участвует и стохастическая компонента, так что для более реалистичной модели добавляется случайное слагаемое  $\zeta$ . Тогда поведение робота также случайно, когда концентрации феромонов  $L$  и  $R$  почти равны между собой или обе равны нулю. Следующие формулы являются предположением биологов о том, как работает сенсорика муравьев [2]:

$$u = \bar{u} \cdot \text{sgn}(L - R), \quad (2)$$

$$L = \int P[r + R(\theta)\mathbf{z}] \mu_L(d\mathbf{z}) \quad R = \int P[r + R(\theta)\mathbf{z}] \mu_R(d\mathbf{z}), \quad (3)$$

где  $r$  – положение робота,  $z$  – локальные координаты датчика,  $L$  – значение поля слева,  $R$  – значение поля справа,  $\zeta$  – случайная компонента,  $P(x, y)$  – значение поля

в точке с координатами  $(x, y)$ ,  $R(\theta)$  – матрица поворота на угол  $\theta$ ,  $\mu_L(dz)$  и  $\mu_R(dz)$  – заданные конечные ненулевые меры Бореля.

Для моделирования поля, соответствующего данным критериям была взята формула (4),  $\sigma$  – параметр, характеризующий быстроту убывания поля по мере удаления от точек максимума,  $d$  – расстояние от точки  $r$  до отслеживаемой структуры, в качестве которой рассматривается кривая на плоскости.

$$P(x, y) = f(d) = e^{-\sigma \cdot d^2}. \quad (4)$$

## 2. Компьютерное моделирование

В тестах использовались параметры  $v = 0.6$  см/с и  $u = 0.6$  рад/с. Измерения поля зашумлены случайным сигналом, равномерно распределенным по интервалу  $[-0.1\diamond; 0.1\diamond]$ , где  $\diamond$  – единица измерения значения поля. Поле определяется по формуле (4),  $\sigma = 0.1$  см<sup>-2</sup>. Управление обновляется каждые 200 мс. Траектория робота и криволинейная структура изображены синим и оранжевым соответственно, начальное положение робота показано красным крестиком (рис. 1-3).

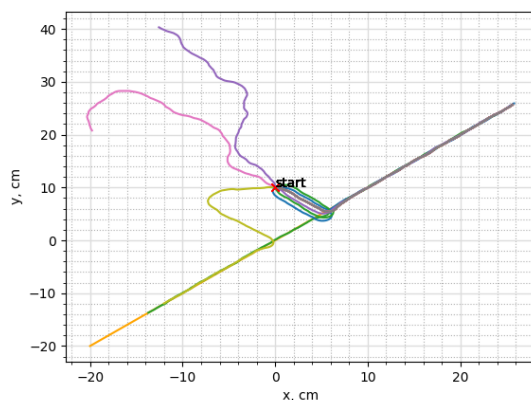


Рис. 1. Отслеживание структуры при разных начальных углах

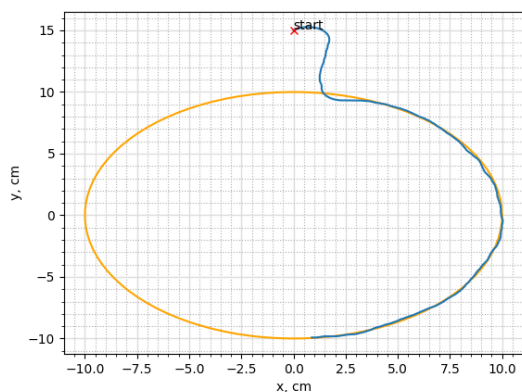


Рис. 2. Отслеживание окружности

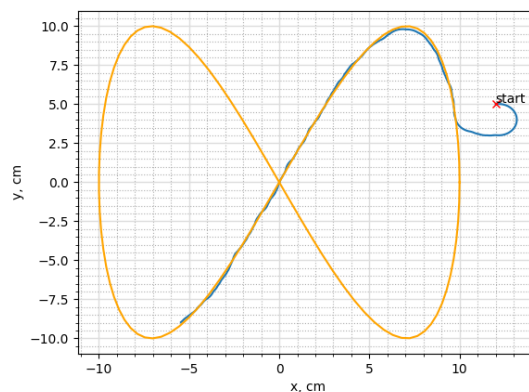


Рис. 3. Отслеживание фигуры Лиссажу

В первой серии экспериментов проверялась способность робота находить структуру при разном начальном направлении. Рис. 1 иллюстрирует структуру представленную прямой. Робот стартует из точки  $x = 0.0$  см,  $y = 10.0$  см, начальный угол  $\theta$

выбирался от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  с шагом  $45^\circ$ . Видно, что существуют такие начальные направления, из которых выйти на структуру роботу не удастся. Это можно объяснить тем, что робот находится на таком расстоянии от прямой, при котором в определенных начальных направлениях значения поля, измеряемые датчиками меньше, чем шум в датчиках. Из-за этого робот управляется только шумом. При этом при благоприятных углах роботу удастся выйти на структуру и отслеживать ее.

На рис. 2 изображена окружность радиуса 10 см с центром в начале координат; робот начинает с координатами  $x = 0.0$  см,  $y = 15.0$  см,  $\theta = 45^\circ$ . Несмотря на то, что робот в начальный момент направлен от окружности, ему удастся развернуться и двигаться в направлении структуры, после чего отслеживать ее. По сравнению с экспериментом, изображенным на рис. 1 начальная точка робота расположена ближе к структуре. Также, такое поведение робота можно объяснить наличием шумов в датчиках, которые могут помочь ему повернуть в нужном направлении, если значения в правом и левом датчиках примерно одинаковы.

В случае, представленном на рис. 3, криволинейная структура описана фигурой Лиссажу. Робот имеет следующие начальные координаты:  $x = 12.0$  см,  $y = 5.0$  см, начальный угол  $\theta = 0^\circ$ . Как и в предыдущем случае роботу удастся развернуться по направлению к фигуре и отслеживать ее из-за близкого расположения начальной точки к структуре. Интересно, что даже несмотря на имеющееся самопересечение фигуры Лиссажу, робот отслеживает структуру и не сбивается с пути.

### 3. Заключение

Таким образом, проведенные эксперименты демонстрируют способность закона навигации успешно находить и отслеживать кривые, образованные точками максимума поля. Закон находит почти оптимальные пути к структурам. Эксперименты показали, что успешность применения метода зависит от начальных условий, в частности от начального угла робота. В будущем предполагается улучшить закон управления и обеспечить его сходимостью при любых значениях начального угла ориентации.

### Литература

1. Матвеев А., Минюк Е., Гусев С., Шепеляевый А. Навигация неголономных роботов, вдохновленная поведением муравьев, для поиска экстремумов в окружающей среде и отслеживания скрытых путей без использования градиента // 8-я Международная конференция по робототехнике и инженерии автоматизации (ICRAE). IEEE, 2023. С. 159–164.
2. Аморим П., Тьерри Г., Перуани Ф. Модель навигации муравьев, основанная на законе Вебера // Журнал математической биологии. 2019. 78. С. 943–984.
3. Денебур Ж.-Л., Арон С., Госс С., Пастелс Жак М. Самоорганизующийся исследовательский паттерн аргентинского муравья // Журнал поведения насекомых. 1990. 3. С. 159–168.

MSC 68T40

## Computer Simulation of a Biomimetic Law for Tracking Hidden Structures

V. Chebotareva

Sirius University of Science and Technology

*Abstract:* The article presents the results of computer simulations of an algorithm inspired by biological systems. A mobile robot of the Dubins-car type moves on a flat surface with an unknown scalar field. The robot is equipped with two sensors that measure the field values at their current positions. The algorithm directs the robot to the points of maximum field values, and in the case where a curve of maximum values is formed, the robot is capable of following this curve. The article includes the results of computer simulations of this method, confirming the robot's ability to track the structure without gradient estimation.

*Keywords:* mobile robot, autonomous navigation, computer simulation, curve tracking.

### References

1. Matveev A., Minuk E., Gusev S., Shepeljavyi A. Ants-inspired non-gradient based navigation of non-holonomic robots for environmental extremum seeking and tracking hidden paths // 8th International Conference on Robotics and Automation Engineering (ICRAE). IEEE, 2023. P. 159-164.
2. Amorim P., Thierry G., Peruani F. An ant navigation model based on Weber's law // Journal of Mathematical Biology. 2019. 78. P. 943–984.
3. Deneubourg J -L., Aron S., Goss S., Pasteels Jacques M. The self-organizing exploratory pattern of the argentine ant // Journal of insect behavior. 1990. 3. P. 159–168.

УДК 004.89

# Математическая модель гибридной рекомендательной системы для выбора товаров магазина электроники

Черемушкин В.К., Бакаева О.А.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

*Аннотация:* В статье предложена математическая модель гибридной рекомендательной системы для выбора товаров магазина электроники. Данная модель основывается на результатах рекомендаций аддитивной рекомендательной системы, системы TF-IDF, меры Жаккара и коэффициента корреляции Пирсона.

*Ключевые слова:* гибридные рекомендательные системы, коллаборативная фильтрация, контент-ориентированный подход, магазин электронной техники, аддитивная система, TF-IDF, косинусное сходство, мера Жаккара, корреляция Пирсона.

## 1. Исследование проблемы

В наше время выбор товаров и услуг стал непростой задачей для потребителя из-за разнообразия предложений на рынке. Оценка покупателями всех характеристик и качеств товаров не всегда возможна, что затрудняет определение их соответствия потребностям и ожиданиям. В таких ситуациях приходят на помощь рекомендательные системы, помогая покупателям принимать обоснованные решения и экономить свое время.

Специализированные магазины электронной техники представляют собой оригинальные торговые площадки, обладающие обширным ассортиментом продукции. Это обилие выбора создает необходимость в разработке математической модели персональной рекомендательной системы для оптимизации процесса выбора товаров среди многочисленных предложений.

Разработанная математическая модель гибридной рекомендательной системы включает методы контентно-ориентированной рекомендательной системы и методы коллаборативной фильтрации. Суть контентно-ориентированной рекомендательной системы состоит в том, что если пользователь купил один из схожих товаров, то ему будут рекомендовать другие аналогичные товары. Методы коллаборативной фильтрации состоят в том, что если один из схожих по интересам пользователей купил какой-то товар, то другому пользователю будет рекомендоваться данный товар [1].

## 2. Математическая модель гибридной рекомендательной системы

Структура гибридной рекомендательной системы заключается в использовании результатов работы аддитивной рекомендательной системы, системы TF-IDF, меры Жаккара и коэффициента корреляции Пирсона [2, 3]. Общая схема представлена на рис. 1.



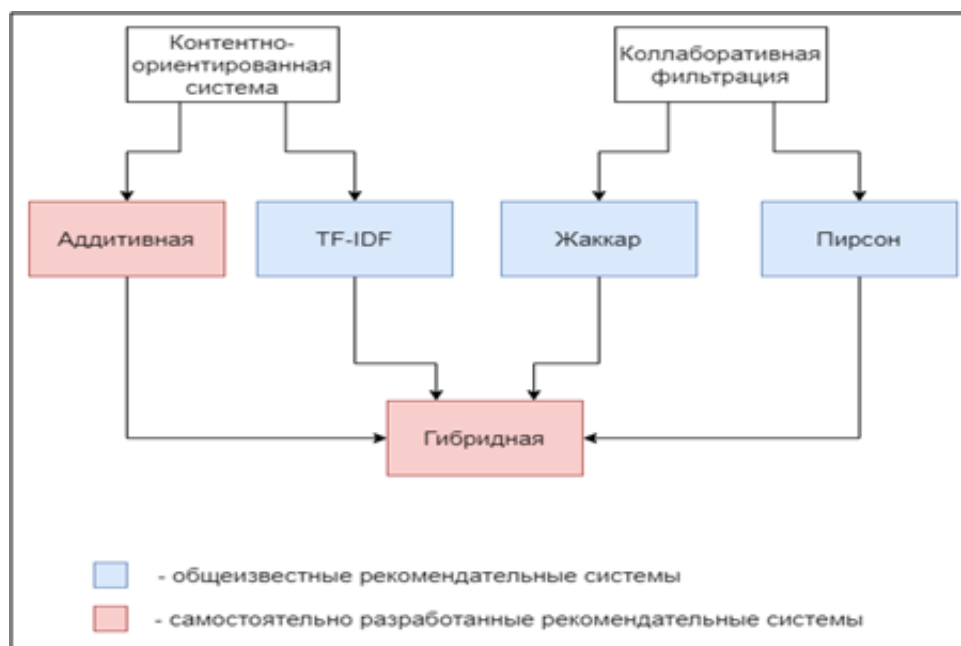


Рис. 1. Модель гибридной рекомендательной системы

Аддитивная (контентно-ориентированная) рекомендательная система представляет собой персональную накопительную систему подсчета баллов за проявленный к определенным категориям товара интерес (просмотр страницы и категории товара, новостей и т.д.). При покупке товара происходит уменьшение рейтинга этой категории. Таким образом формируется категория с максимальным рейтингом, товары из которой и будут предложены покупателю.

Алгоритм TF-IDF основан на описании товаров, которые будут преобразованы в векторы, после чего их можно сравнивать с помощью косинусного сходства.

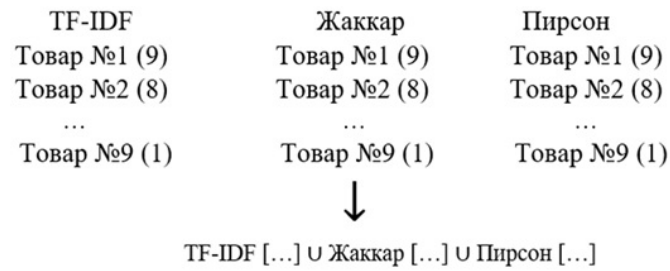
Сходство Жаккара – это мера, которая показывает, насколько схожи два набора данных. В данном контексте каждый пользователь представляет собой набор товаров, которые он просмотрел. Сравнение двух пользователей осуществляется путем сравнения их наборов товаров.

Корреляция Пирсона измеряет степень линейной зависимости между двумя переменными. В данном контексте переменные представляют собой оценки, выставленные пользователями товарам. Система вычисляет коэффициент корреляции между оценками текущего пользователя и других пользователей, чтобы определить степень их схожести. Затем на основе схожих пользователей система рекомендует товары, которые они высоко оценили, но текущий пользователь еще не видел.

В результате работы трех вышеописанных рекомендательных систем происходит формирование массивов рекомендуемых товаров (на данном этапе пока не используется аддитивная рекомендательная система).

Начальный рейтинг формируется методом ранжирования по убыванию для каждой рекомендательной системы. Самый приоритетный товар получает максимальный рейтинг. Далее формируется единый массив рекомендаций, состоящий из объединения товаров и их рейтингов (для примера возьмем количество товаров  $N = 9$  для вывода покупателю). Схема гибридной рекомендательной системы представлена на рис. 2.

Если при объединении в один массив товар встречается повторно, то его рей-



**Рис. 2.** Объединение товаров и их рейтингов

тинг увеличивается на +4. И так с каждым повторяющимся товаром. Товар-дубль удаляется, чтобы в гибридной рекомендательной системе каждый товар встречался только один раз.

Далее для каждого товара из единого массива рекомендаций корректируем рейтинг товара, добавляя к предыдущему значению индекс, соответствующий номеру категории в топ-категориях, полученных в результате работы аддитивной рекомендательной системы:

$$R_{cor} = R + I_m,$$

где  $R$  – рейтинг товара,  $I_m = i \in (1, \dots, m)$ ,  $m$  соответствует максимальному количеству категорий в топе.

Если выбраны 4 топ-категории, и данный товар относится к самой востребованной, то  $I_m = m = 4$ , и к значению рейтинга добавляется 4.

Дальше следует сортировка товаров по итоговому рейтингу по убыванию. Следует оставить лишь топ- $N$  товаров, которые будут составлять список товаров с высочайшим рейтингом.

Последний шаг для получения релевантных рекомендаций состоит в отбрасывании  $(10\% \cdot N)$ -элементов, а вместо них добавлении случайных товаров из топ-категорий, которых нет в итоговом рейтинге. Это делается для максимально широкой линейки предлагаемых товаров.

Таким образом модель гибридной рекомендательной системы, основанная на результатах работы нескольких рекомендательных систем, позволит нивелировать их недостатки (холодный старт, повторное предложение уже купленных товаров, отсутствие индивидуальных рекомендаций) и получить в результате персонализированные релевантные рекомендации товаров магазина электроники.

## Литература

1. Черемушкин В.К., Бакаева О.А. Разработка гибридной рекомендательной системы для формирования индивидуальных предложений клиентам магазинов по продаже электроники // Проблемы развития современного общества: сборник научных статей 9-й Всероссийской национальной научно-практической конференции. Т. 3. Курск: ЗАО «Университетская книга», 2024. С. 156–159.
2. Фальк К. Рекомендательные системы на практике. М.: ДМК Пресс, 2020. 448 с.

3. Ляликова В.Г., Безрядин М.М. Построение гибридной рекомендательной системы // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2021. № 4. С. 121–129. DOI: 10.17308/sait.2021.4/3802.

MSC 68T35

## Mathematical model of a hybrid recommendation system for an electronics store

V.K. Cheremushkin, O.A. Bakaeva

National Research Mordovia State University

*Abstract:* The article proposes a mathematical model of a hybrid recommendation system for choosing electronics store products. This model is based on the results of the recommendations of the additive recommendation system, the TF-IDF system, the Jacquard measure and the Pearson correlation coefficient.

*Keywords:* hybrid recommendation systems, collaborative filtering, content-oriented approach, electronics store, additive system, TF-IDF, cosine similarity, Jacquard measure, Pearson correlation.

### References

1. Cheremushkin V.K., Bakaeva O.A. Development of a hybrid recommendation system for generating individual offers to customers of stores selling electronics // Problems of development of modern society: collection of scientific articles of the 9th All-Russian National Scientific and Practical Conference, 2024. Vol. 3. P. 156–159 (in Russian).
2. Falk K. Recommender systems in practice. M.: DMK Press, 2020. 448 p.
3. Lyalikova V.G., Bezryadin M.M. Construction of a hybrid recommender system // Vestnik VSU. Series: System analysis and information technologies. 2021. No. 4. P. 121–129 (in Russian). DOI: 10.17308/sait.2021.4/3802.

УДК 517.9

## К вопросу об исследовании вынужденных колебаний цепочки трех связанных осцилляторов вблизи резонанса

Шаманаев П.А., Катин Д.А., Ошина Н.В.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

*Аннотация:* В настоящей работе методом Ляпунова-Шмидта исследуется математическая модель колебаний в цепочке трех связанных осцилляторов вблизи резонанса с малым параметром при условии, что на систему действует внешняя периодическая сила с двумя соизмеримыми частотами. Разработанный на основе метода Ляпунова-Шмидта алгоритм реализован в математической библиотеке SymPy Python. Приведен пример, который показывает, что если специальным образом подобрать параметры малого возмущения, то компоненты решения возмущенной системы имеет полюс в точке  $\varepsilon = 0$ .

*Ключевые слова:* цепочка связанных осцилляторов, вынужденные колебания, периодические решения, малый параметр, метод Ляпунова-Шмидта, резонанс.

В работах [1–3] приведены результаты исследования вынужденных колебаний одного и двух связанных осцилляторов вблизи резонанса с малым параметром методом Ляпунова-Шмидта [4].

В настоящей работе исследуется математическая модель колебаний в цепочке трех связанных осцилляторов [5]

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 = -(k_1 + k_2)q_1 + k_2q_2 + F(t), \\ m\ddot{q}_2 = k_2q_1 - (k_2 + k_3)q_2 + k_3q_3, \\ m\ddot{q}_3 = k_3q_2 - (k_3 + k_4)q_3, \end{cases} \quad (1)$$

где  $q_i$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) – обобщенные координаты,  $k_i > 0$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) – коэффициенты жесткости пружин,  $m$  – масса каждого осциллятора,  $F_1(t)$  – внешняя периодическая сила, действующая по следующему закону

$$F(t) = r_1 \sin(p_1 t + \theta_1) + r_2 \sin(p_2 t + \theta_2), \quad (2)$$

где  $r_i, \theta_i, p_i \in \mathbb{R}$ , ( $i = 1, 2$ ),  $p_1 = \alpha p_2$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}$ .

Предполагая, что в системе (1) для коэффициентов жесткости пружин справедлива формулы

$$k_i = k + m d_i \varepsilon, \quad i = 1, \dots, 4,$$

где  $d_i$  – некоторые вещественные параметры,  $\varepsilon$  – малый вещественный параметр, и вводя новую переменную

$$\omega_0^2 = 4 \frac{k}{m},$$

систему (1) можно записать в виде

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = - \left( \frac{\omega_0^2}{2} + (d_1 + d_2)\varepsilon \right) q_1 + \left( \frac{\omega_0^2}{4} + d_2\varepsilon \right) q_2 + \frac{1}{m}F(t), \\ \ddot{q}_2 = - \left( \frac{\omega_0^2}{4} + d_2\varepsilon \right) q_1 - \left( \frac{\omega_0^2}{2} + (d_1 + d_2)\varepsilon \right) q_2 + \left( \frac{\omega_0^2}{4} + d_3\varepsilon \right) q_3, \\ \ddot{q}_3 = - \left( \frac{\omega_0^2}{4} + d_2\varepsilon \right) q_1 - \left( \frac{\omega_0^2}{4} + d_3\varepsilon \right) q_2 - \left( \frac{\omega_0^2}{2} + (d_3 + d_4)\varepsilon \right) q_3. \end{cases} \quad (3)$$

Сформулируем задачу для системы (3) [4]: при достаточно малых вещественных  $\varepsilon$  найти  $\frac{2\pi}{p_1}$ -периодическое решение  $\{q_i(t, \varepsilon)\}_{i=1}^3$  системы (3). Если найденное решение удовлетворяет условию  $q_i(t, 0) = Q_i(t)$ , где  $\{Q_i(t)\}_{i=1}^3$  есть  $\frac{2\pi}{p_1}$ -периодическое решение системы

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 = -\frac{\omega_0^2}{2}Q_1 + \frac{\omega_0^2}{4}Q_2 + \frac{1}{m}F(t), \\ \ddot{Q}_2 = \frac{\omega_0^2}{4}Q_1 - \frac{\omega_0^2}{2}Q_2 + \frac{\omega_0^2}{4}Q_3, \\ \ddot{Q}_3 = \frac{\omega_0^2}{4}Q_2 - \frac{\omega_0^2}{2}Q_3, \end{cases} \quad (4)$$

то поставленную задачу будем называть задачей Пуанкаре, а найденное решение – решением задачи Пуанкаре.

Будем предполагать, что для системы (4) выполняется условие резонанса, а, именно, одна из собственных частот совпадает с одной из внешних частот колебаний.

Для нахождения  $\frac{2\pi}{p_1}$ -периодического решения к системе (3) применен метод Ляпунова-Шмидта, изложенный в [3]. В качестве примера рассмотрена система (3) со следующими параметрами

$$\begin{aligned} k = 2, \quad m = 1, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 4, \\ d_1 = -1, \quad d_2 = 2, \quad d_3 = -2, \quad d_4 = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

В этом случае частоты собственных колебаний системы (4) равны

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \quad \omega_3 = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

и выполняется условие резонанса  $\omega_1 = p_1 = 2$ .

В результате проведения вычислительного эксперимента в математической библиотеке SymPy Python для системы (1) с параметрами (5) получены следующие компоненты  $\pi$ -периодического решения

$$\begin{aligned} q_1(t, \varepsilon) &= -\frac{1}{8\varepsilon^2} \left( 2\sqrt{2}\varepsilon^2 - 4\varepsilon + \sqrt{2} \right) r_1 \sin(2t + \theta_1) + r_2 \eta_1(\varepsilon) \sin(4t + \theta_2), \\ q_2(t, \varepsilon) &= -\frac{1}{8\varepsilon} \left( \sqrt{2}\varepsilon + 1 \right) r_1 \sin(2t + \theta_1) + r_2 \eta_2(\varepsilon) \sin(4t + \theta_2), \\ q_3(t, \varepsilon) &= \frac{\sqrt{2}}{8\varepsilon^2} \left( 1 - 2\varepsilon^2 \right) r_1 \sin(2t + \theta_1) + r_2 \eta_3(\varepsilon) \sin(4t + \theta_2), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\eta_i(\varepsilon)$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) – некоторые непрерывные функции аргумента  $\varepsilon$  в достаточно малой окрестности нуля.

Из формул (6) следует, что компоненты  $q_i(t, \varepsilon)$   $\pi$ -периодического решения системы (1) удовлетворяют следующим условиям:

- 1) компоненты  $q_i(t, \varepsilon)$  непрерывно зависят от параметров  $r_k, \theta_k$  ( $k = 1, 2$ ) внешних сил (2);
- 2) компоненты  $q_1(t, \varepsilon)$  и  $q_3(t, \varepsilon)$  имеет полюс второго порядка в точке  $\varepsilon = 0$ ;
- 3) компонента  $q_2(t, \varepsilon)$  имеет полюс первого порядка в точке  $\varepsilon = 0$ .

## Литература

1. Кадрякова М. Р., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. О периодических решениях одного класса линейных неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром в резонансном случае // Огарев-online. 2017. № 13. С. 8–17 [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://journal.mrsu.ru/arts/operiodicheskix-resheniyax-odnogo-klassa-linejnyx-neodnorodnyx-sistemobyknovennyx-differencialnyx-uravnenij-s-malym-parametrom-v-rezonansnomsluchae> (дата обращения: 10.07.2024).
2. Шаманаев П. А., Прохоров С. А. Исследование вынужденных колебаний линейной системы с двумя степенями свободы и малым параметром методом Ляпунова–Шмидта // Огарев-online. 2021. № 12. С. 83–91 [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://journal.mrsu.ru/arts/issledovanie-vynuzhdennyx-kolebanij-linejnoj-sistemy-s-dvumya-stepenyami-svobody-i-malym-parametrom-metodom-lyapunovashmidta> (дата обращения: 30.07.2023).
3. Шаманаев П. А., Осипов Д. А. К вопросу об исследовании вынужденных колебаний линейной системы двух связанных осцилляторов вблизи резонанса [Электронный ресурс] // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: сборник материалов XVI Международной научной конференции. (Саранск, 17-20 августа 2023 г.). Саранск: СВМО, 2023. С. 256–261. Режим доступа: <https://conf.svmo.ru/files/2023/papers/paper41.pdf>. - Дата обращения: 10.07.2024.
4. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 1. С. 45–53.
5. Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. Москва: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1997. 495 с.

MSC 34C10, 34C25

## Study of forced oscillations of a chain of three coupled oscillators near resonance

P.A. Shamanaev, D.A. Katin, N.V. Oshina

National Research Mordovia State University

*Abstract:* The Lyapunov-Schmidt method is used to study a mathematical model of oscillations in a chain of three coupled oscillators near a resonance with a small parameter, provided that the system is acted upon by an external periodic force with two commensurate frequencies. The algorithm developed based on the Lyapunov-Schmidt method is implemented in the SymPy Python mathematical library. An example is given that shows that if the parameters of a small perturbation are selected in a special way, then the solution components of the perturbed system have a pole at the point  $\varepsilon = 0$ .

*Keywords:* chain of coupled oscillators, forced oscillations, periodic solutions, small parameter, Lyapunov-Schmidt method, resonance.

### References

1. Kadryakova M. R., Loginov B. V., Shamanaev P. A. [On periodic solutions for a class of linear inhomogeneous systems of ordinary differential equations with small parameter in resonance case] // Ogarev-online. 2017. Issue 13. P. 8–17. URL: <http://journal.mrsu.ru/arts/operiodicheskix-resheniyax-odnogo-klassa-linejnyx-neodnorodnyx-sistemobyknovennyx-differencialnyx-uravnenij-s-malym-parametrom-v-rezonansnomsluchae> (access date: 30.07.2023). (In Russian).
2. Shamanaev P. A., Prokhorov S. A. [Investigation of forced vibrations of a linear system with two degrees of freedom and a small parameter by the Lyapunov-Schmidt method] // Ogarev-online. 2021. Issue 12. P. 83–91. URL: <https://journal.mrsu.ru/arts/issledovanie-vynuzhdennyx-kolebanij-linejnoj-sistemy-s-dvumya-stepenyami-svobody-i-malym-parametrom-metodom-lyapunovashmidta> (access date: 30.07.2023). (In Russian).
3. Shamanaev P. A., Osipov D. A. [On the question of studying forced vibrations of a linear system of two coupled oscillators near resonance] Electronic resource. Proceedings of the XVI International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling". (Saransk, July 17-20, 2023). Saransk: SVMO Publ, 2023. P. 256–261. Available at: <https://conf.svmo.ru/files/2023/papers/paper41.pdf>. Date of access: 22.07.2024. (In Russian).
4. Kyashkin A. A., Loginov B. V., Shamanaev P. A. [The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with degenerate or identity operator in the derivative and the disturbance in the form of small linear term] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2016. Vol. 18, No. 1. P. 45–53 (In Russian).



5. Landa P. S. Nonlinear oscillations and waves [Nonlinear oscillations and waves]. Moscow: Nauka, FIZMATLIT, 1997. 495 p. (In Russian).

УДК 51-7

## Численное моделирование распространения фронта горения по слою катализатора

Язовцева О.С.

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

*Аннотация:* Работа посвящена численному исследованию распространения фронта горения в неподвижном слое катализатора со сферической формой зерна при проведении гетерогенных химических реакций с детальным описанием кинетики на примере выжига коксовых отложений из слоя катализатора. Математическая модель, описывающая выжиг, является системой уравнений математической физики с начально-краевыми условиями. Вычислительный алгоритм для системы построен на основе принципа расщепления по физическим процессам с подбором адекватных методов интегрирования для каждого из них. Фронт горения описан как тепловая волна, перемещающаяся по слою катализатора. В модели реализован динамический режим выжига, заключающийся в подаче реакционной смеси переменных температуры и состава. Анализ результатов расчета выявил преимущества динамического выжига перед стационарным.

*Ключевые слова:* фронт горения, волновые процессы, окислительная регенерация, математическое моделирование, вычислительный алгоритм.

Во многих промышленных процессах присутствуют явления, труднопредсказуемые с точки зрения теории, однако существенно меняющие ход всего процесса. К таким явлениям относится распространение тепловых волн в слое катализатора [1]. Оценка условий возникновения волн представляет собой актуальную задачу [2]. Этот вопрос напрямую связан с теорией движения фронта горения и распространения пламени [3].

Работа посвящена численному исследованию распространения фронта горения в неподвижном слое катализатора со сферической формой зерна при проведении гетерогенных химических реакций с детальным описанием кинетики на примере выжига коксовых отложений из слоя катализатора.

Математическая модель процесса описана системой уравнений математической физики и является двухфазной – это подразумевает составление отдельных уравнений для слоя катализатора и слоя газа [4].

Для описания процессов в зерне катализатора используются уравнения диффузии-конвекции-реакции [5]. Они записываются для каждого вещества, участвующего в реакции. В них учтена диффузия веществ в поры зерна, а также изменения концентраций в ходе химических превращений как источниковый член. Гетерогенные реакции приводят к уменьшению объема реакционной смеси. В модели это учтено за счет использования вынужденного конвективного переноса – стефановского потока. Материальный баланс зерна катализатора также включает в себя обыкновенные дифференциальные уравнения для концентраций веществ твердой фазы реакции.

Уравнение теплового баланса для слоя катализатора получено осреднением по радиусу из уравнения теплового баланса зерна катализатора в предположении изотермичности зерна. Оно учитывает обмен энергией зерна катализатора и слоя газа, распространение тепла по скелету катализатора и суммарный тепловой эффект реакций.

Уравнения для описания движения газа в слое катализатора записаны, исходя из модели реактора идеального вытеснения [6].

Для математической модели выжига коксовых отложений разработан вычислительный алгоритм на основе принципа расщепления по физическим процессам. Для обхода ограничений на шаг интегрирования по времени задачи химии решены трехстадийным методом Рунге-Кутты пятого порядка точности, успешно применяемым для расчета динамики веществ в многостадийных реакциях [7, 8]. Диффузионные потоки рассчитаны с использованием гиперболической модели [9].

На основе реализованного на языке C++ вычислительного алгоритма получена динамика распространения тепловых волн по регенерируемому слою катализатора. Скорость распространения фронта горения согласуется с оценками [2].

Для снижения длительности и величины температурного воздействия на слой катализатора хорошо зарекомендовал себя динамический режим выжига коксовых отложений [10]. Он заключается в подаче реакционной смеси переменных температуры и состава. Для этого в математическую модель добавлены нестационарные граничные условия. Сравнительный анализ динамического и стационарного режима выявил преимущества первого.

## Литература

1. Киселев О.В., Матрос Ю.Ш. Распространение фронта горения газовой смеси в зернистом слое катализатора. // Физика горения и взрыва. 1980. Т. 16, № 2. С. 25-30.
2. Боресков Г.К., Киселев О.В., Матрос Ю.Ш. Оценки основных характеристик фронта экзотермической реакции в неподвижном слое катализатора // Докл. АН СССР, 1979. Т. 248, № 2. С. 406-408.
3. Зельдович Я.Б. К теории распространения пламени // Журн. физ. Химии. 1948. Т. 22. С. 27.
4. Масагутов Р.М., Морозов Б.Ф., Кутепов Б.И. Регенерация катализаторов в нефтепереработке и нефтехимии. М.: Изд-во Химия, 1986. 144 с.
5. Малиновская О.А., Бесков В.С., Слинько М.Г. Моделирование каталитических процессов на пористых зернах. Новосибирск: Наука, 1975. 265 с.
6. Слинько М.Г. Моделирование химических реакторов. Новосибирск: Наука, 1968. 95 с.
7. Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Yazovtseva O.S., Zagoruiko A.N. Numerical Simulation of Oxidative Regeneration of a Spherical Catalyst Grain // Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. V. 15. P. 485–495. DOI: 10.1134/S2070048223030079.
8. Peskova E.E., Yazovtseva O.S. Application of the Explicitly Iterative Scheme to Simulating Subsonic Reacting Gas Flows. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2024. Vol. 64, № 2. P. 326–339. DOI: 10.1134/S0965542524020106.
9. Chetverushkin B.N., Olkhovskaya O.G., Gasilov V.A. An Explicit Difference Scheme for a Nonlinear Heat Conduction Equation // Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. V. 15. P. 529–538. DOI: 10.1134/S2070048223030031.

10. Балаев А.В., Дробышев В.И., Губайдуллин И.М., Масагутов Р.М.  
Исследование волновых процессов в регенераторах с неподвижным слоем катализатора // Распространение тепловых волн в гетерогенных средах. 1983. С. 233-246.

MSC 34D20

## Numerical simulation of the combustion front propagation through the catalyst layer

O.S. Yazovtseva

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences

*Abstract:* The work is devoted to a numerical study of the propagation of the combustion front in a fixed catalyst layer with a spherical grain shape during heterogeneous chemical reactions with a detailed description of the kinetics using the example of burning coke sedimentation from the catalyst layer. The mathematical model describing the burning is a system of equations of mathematical physics with initial boundary conditions. The computational algorithm for the system is based on the principle of splitting by physical processes with the selection of adequate integration methods for each of them. The combustion front is described as a heat wave moving through the catalyst layer. The model implements a dynamic burning mode, which consists in supplying a reaction mixture of variable temperature and composition. The analysis of the calculation results revealed the advantages of dynamic burning over stationary.

*Keywords:* combustion front, wave processes, oxidative regeneration, mathematical modeling, computational algorithm.

### References

1. Kiselev O.V., Matros Yu.Sh. Propagation of the combustion front of a gas mixture in a granular layer of the catalyst // Physics of combustion and explosion. 1980. Vol. 16, № 2, P. 25-30.
2. Boreskov G.K., Kiselev O.V., Matros Yu.Sh. Estimates of the main characteristics of the front of an exothermic reaction in a fixed catalyst layer // The Proceedings of the USSR Academy of Sciences. 1979. Vol. 248, № 2. P. 406-408.
3. Zeldovich Ya.B. On the theory of flame propagation // Journal of Physics. Chemistry. 1948. Vol. 22. P. 27.
4. Masagutov R.M., Morozov B.F., Kutepov B.I. Regeneration of catalysts in oil processing and petrochemistry. Moscow, USSR, 1987. 144 p.
5. Malinovskaya O.A., Beskov V.S., Slinko M.G. Modeling of catalytic processes on porous grains. Novosibirsk: Nauka, 1975. 265 p.
6. Slinko M.G. Modeling of chemical reactors. Novosibirsk: Nauka, 1968. 95 p.
7. Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Yazovtseva O.S., Zagoruiko A.N. Numerical Simulation of Oxidative Regeneration of a Spherical Catalyst Grain // Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. V. 15. P. 485–495. DOI: 10.1134/S2070048223030079.
8. Peskova E.E., Yazovtseva O.S. Application of the Explicitly Iterative Scheme to Simulating Subsonic Reacting Gas Flows. Computational Mathematics and

Mathematical Physics. 2024. Vol. 64, № 2. P. 326–339. DOI:  
10.1134/S0965542524020106.

9. Chetverushkin B.N., Olkhovskaya O.G., Gasilov V.A. An Explicit Difference Scheme for a Nonlinear Heat Conduction Equation // Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. V. 15. P. 529–538. DOI: 10.1134/S2070048223030031.
10. Balaev A.V., Drobyshevich V.I., Gubaydullin I.M., Masagutov R.M. Investigation of wave processes in regenerators with a fixed catalyst layer // Propagation of heat waves in heterogeneous media. 1983. P. 233-246.

MSC 91B02; 00A71

# Economics as a Science: The resolution of the microeconomic problem of market demand

V.K. Gorbunov

Ulyanovsk State University

*Abstract:* The purpose of this report is to acquaint applied mathematicians solving real problems of economic analysis, as well as economists, both theoretical and applied, with our solution, published mainly in Russian-language books and economic journals, of a valuable problem in economic theory and practice. The problem is that modern neoclassical economics, which is studied in most universities around the world and forms the majority of economic investigations contains an unrealistic mathematical axiomatic individual demand theory (IDTh) in multi-product consumer markets, but does not contain a realistic market demand theory (MDTh), which is of real interest to economic practitioners and governments. The consequences of this failure are the lack of founded mathematical methods for analysing market demand, in particular, the calculation of economic (analytical) consumer demand indexes that reflect the consumers preferences of the population, and a theory of economic equilibrium that determines prices that are effective for real economies. The realistic MDTh has created by the author as a revision of the IDTh within scientific methodology. Also, we have developed a verification method of this MDTh on the basis of Afriat-Varian's nonparametric (individual) demand analysis. The problem of verifying an applied mathematical theory is the inverse problem of that theory, and the latter is usually ill-posed and generally has many solutions. The solution of such problems consists in their regularization with involvement of additional information about the desired solution, and to regularize the MDTh inverse problem we use economic indexes, which makes it possible to obtain solutions with various meaningful properties.

*Keywords:* market demand problem, methodological analysis, statistical ensemble of consumers, verification, Konüs indexes

## 1. Introduction

The founders of the mathematized neoclassical approach to economics, William Stanley Jevons [1] and Leon Walras [2], have intended (independently) to reconsider Economics, which at that time was a collection of loosely linked verbal doctrines on welfare and the value of goods, on general scientific principles used in the natural sciences, firstly, mechanics and physics. Educated in natural (Jevons) and technical (Walras) sciences, they both saw economics as a teaching dealing with quantities and believed it should be a mathematized science. Jevons realised that the demand theory that is of interest to any economic activity is the theory of aggregate (collective) market demand [3], but he and Walras started by constructing a mathematical theory of individual demand (IDTh). Perhaps because of the ideas of the classics Adam Smith and John Stuart Mill about Man as an independent egoist (Homo Economicus), which became established in Europe in the 19th century.

The programs to revise economic theories along natural sciences line met with stiff resistance from most academic economists already at the late 19th century, and this resistance continues to this day. Modern neoclassical economic theory (orthodox/main-

stream Economics) has been established within a framework of methodological individualism [4]. This methodology denies the existence of socio-economic phenomena as special ones and prescribes that researchers of such phenomena, collective in nature, should represent them through the actions of elementary agents – individual consumers and production firms acting independently and selfishly. In accordance with this prescribe, Economics has accepted a mathematical axiomatic method for constructing partial theories [5] but the natural sciences are based not on axioms, but on hypotheses tested by facts. So, methodological individualism differs radically from scientific methodology, and the contributions of Jevons and Walras have proved potentially contradictory.

This report presents a methodological analysis of the market demand problem within a general scientific methodology and a resolution to the problem on this basis in our works [6–12].

## **2. The program «Economics as a science»**

Opponents of the scientization of economic theory explain their position by the significant differences in natural and social phenomena. In doing so, they deny the legitimacy of a (natural) scientific approach to economic problems.

The opponents' arguments about the significant differences between natural and social phenomena are not in doubt. The feature of the natural sciences is the identity of elementary objects in their classes, complete in physics, chemistry, and molecular biology. Here main processes are usually reproduced experimentally, and this simplifies the formalization of their research and the application of mathematical and statistical methods to create and verify many descriptive laws and predictive theories.

The feature of the social sciences is that the «atoms» of the objects – persons – have a psyche and an active mind, an ability to work and transform the environment and society. People behave, especially when making decisions under uncertainty, in a poorly predictable manner and often spontaneously. Accordingly, economic processes at the personal (when buying), meso and macro levels are unique, which limits the possibilities of experiments, error assessment, and this feature complicates the verification of the proposed theories.

However, the Natural Sciences and Social Sciences (Humanities) are Sciences, so there should be commonality in their definitions and methodology, consistent with the root concept of Science. We understand Science as a system of non-trivial knowledge, justified logically and empirically, about some system of real objects.

The coined essence of the principles of scientific research (scientific methodology) are objectivity, provability of proposing theories and verifiability of their findings by facts. Many economic phenomena can be investigated within this methodology.

## **3. Holistic theory of market demand**

The market demand theory [7, 10, 11] is a revision of the individual demand theory [5, Ch. 3] with the replacement of the object of the theory – an individual/household – with a set of buyers of a given market. This set is not precisely defined, since buyers usually spend only a fraction of their consumer spending in a given market. The set of such buyers is understood as a «fuzzy set» in the sense of Lotfi Zadeh [13] and is called the «Statistical Ensemble of Consumers» (SAC) of a given market. SAC is a subset of consumers of the population of a region/country who have made purchases in this market. The ratio of the value of an individual's purchases to his total consumption expenditures is the «degree» of the individual's belonging to a given SAC. This concept is conceptual and not observed



for real markets, as well as individual utility functions. For more details, see [7, pp. 35-36].

The second basic difference in our theory is the replacement of the postulate of individual rationality with the hypothesis of collective rationality. It is assumed that most individuals only want to be rational, and this can be considered their limited rationality, which forms, on average, under relatively stable market conditions, the dominant of collective market behavior, which can be considered hypothetically as collective rationality, or SAC's rationality. The SAC's preferences are manifested on average, represented by a collective utility function, and the corresponding holistic model is taken as a hypothetical model of market demand to be tested by trade statistics of market prices and bought goods' quantities. Due to space limitation of this presentation, we refer interested readers to our published and archived books and articles listed in the Introduction for a detailed and formal presentation of the issues and results outlined here.

## References

1. Jevons W.S. The Theory of Political Economy, 5 edn. NY: Augustus M. Kelley, 1957 (1st edn 1871).
2. Walras L. Elements of Pure Economics, London: Allen and Unwin, 1954 (1st French edn. 1877).
3. Jevons W.S. Brief account of a general mathematical theory of Political Economy // Journal of the Statistical Society of London. XXIX. No. 2. P. 282–287
4. Arrow K.J. Methodological individualism and social knowledge // American Economic Review. 1994. 84, 2. P. 1–9.  
URL: <https://www.jstor.org/stable/i337077>
5. Mas-Colell A., Whinston M., Green J. Microeconomic Theory. NY: OUP, 1995.
6. Gorbunov V.K. The mathematical model of the consumer demand: Theory and applied potential. Moscow: Economizdat, 2004 (In Russian).
7. Gorbunov V.K. Consumer demand: Analytical theory and applications. Ulyanovsk: Ulyanovsk State University Publishing House, 2015 (In Russian).  
URL: <https://www.rfbr.ru/library/books/2641/>
8. Gorbunov V.K., Kozlova L.A., Lvov A.G. To the problem of constructing analytical indexes of market demand: a variative approach // Voprosy Statistiki. 2020. 27, 3. P. 65–80 (In Russian).
9. Gorbunov V.K., Lvov A.G. The Analysis of Consumers' Demand in Russia, 2012-2017: Two-Stage Construction of Analytical Indexes // Voprosy Statistiki. 2022. 29, 4. P. 97–113 (In Russian).
10. Gorbunov, V. The holistic theory of the consumer market demand // European Proceedings of Social and Behavioural Science. 2021. Vol. 105. CDSSES. P. 476–485.  
DOI: 10.15405/epsbs.2021.04.52
11. Gorbunov, V. The positive resolution of the microeconomic problem of market demand: issues of methodology and verification // MPRA Paper No. 115514. Posted 01 Dec 2022.  
URL: <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/115514/>

12. Gorbunov V.K., Lvov A.G. The Problem of Verifying the Market Demand Theory  
// Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2024. 18, 2. P. 253–270.
13. Zadeh, L. A. Fuzzy sets. Information and Control. 8. P. 338–353.  
URL: [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)

MSC 35G16, 35C10 MSC 2010

# Convergence of Fourier Method connected with Orthogonal Splines

V.L. Leontiev

World-Class Research Center for Advanced Digital Technologies at  
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

*Abstract:* Fourier series, Fourier method and spline approximations have wide scopes. The generalized Fourier method associated with the use of finite Fourier series and orthogonal splines was applied earlier for solving the parabolic initial boundary value problems for regions with curvilinear boundaries. Here another analogous generalized Fourier method is applied for solving parabolic initial boundary value problems in noncanonical regions and the investigation of convergence of this method is proposed. The study of convergence is based on the theory of finite difference methods. This method gives solutions in form of finite Fourier series which structure is similar to that of partial sums of an infinite Fourier series of an exact solution. As a number of grid nodes increases in a region, a finite Fourier series approach an exact solution of a parabolic initial boundary value problem. The investigation of convergence shows efficiency of the algorithm of the generalized Fourier method in solving parabolic initial boundary value problems for noncanonical regions. This method yields the approximate analytical solutions in the form of the sequence of finite Fourier series. The use of orthogonal splines brings together numerical and analytical methods – finite difference methods and the Fourier method, expanding the scope of their applications.

*Keywords:* parabolic initial boundary value problems, noncanonical regions, curvilinear boundary, the method of separation of variables, finite Fourier series, orthogonal splines.

## 1. Problem and Method

The modified Fourier method was proposed and investigated earlier [1] in parabolic problems for regions with a noncanonical curvilinear boundaries. This method connected with explicit difference scheme is similar to another variant of Fourier method connected with implicit difference scheme and proposed here. Convergence of approximate analytic solutions was obtained for this method earlier only with respect to eigenvalues and functions in the framework of the Sturm-Liouville problem. Here is proposed full investigation of convergence of approximate solutions obtained in form of finite Fourier series for novel variant of Fourier method connected with orthogonal splines in parabolic initial boundary value problems. An estimate is obtained, which shows a high rate of convergence of such finite Fourier series to exact solutions of problems for regions with a noncanonical curvilinear boundaries.

The method of separation of variables (Fourier method) allows finding solutions in analytical form of many initial boundary value problems. The method is connected with the Sturm-Liouville problem and in many cases of initial boundary value problems with using of special functions. Implementation of classical Fourier method for many types of initial boundary value problems, including problems to which all parts of the boundary of a canonical region are coordinate lines or surfaces, meets with significant difficulties. One way to expand the scope of the classical Fourier method is to solve

mathematical questions related to structure of boundary conditions. Special functions appear in the algorithm of the Fourier method when a Sturm-Liouville problem is solved in curvilinear coordinate systems in cases of canonical regions whose boundaries are coordinate lines or surfaces. In the general case of initial boundary value problems for noncanonical regions with curvilinear boundaries, the use of special functions is inefficient. The classical Fourier method is applicable only in initial boundary value problems for canonical regions of classical shape, in particular, in solving contact problems for elastic bodies. The applications of the classical Fourier method are given in many articles.

Other directions of development of different methods for solving initial boundary value problems for noncanonical regions with curvilinear boundaries are associated, first, with the application of finite element method and finite difference method, and, secondly, with a modification of the Fourier method itself. Finite difference methods and finite element methods have wide scopes. But numerical methods not give solutions in form of Fourier series, which are used in many applications. Scope of spline approximations also is enough wide. The generalized Fourier method associated with the use of orthogonal splines was proposed for parabolic initial boundary value problems in the article [1]. It gives solutions in form of finite Fourier series. This method, thanks to orthogonal splines, has expanded scope which contains initial boundary value problems for noncanonical regions with any curvilinear boundaries. Used in this article and here finite Fourier series, based on orthogonal splines, shows high efficiency also in problems of approximation of functions in regions with curvilinear boundaries and generates fast algorithm of approximations.

The parabolic initial boundary value problem

$$L[u] = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \forall (x, y) \in S, \quad \forall t \geq 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y) \quad \forall (x, y) \in S; \quad u|_{\partial S} = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (1)$$

is considered. Here  $\partial S$  is a piecewise smooth curvilinear boundary of the noncanonical region  $S$ ,  $u = u(x, y, t)$  – a function, continuous  $\forall t \geq 0$  in a closed region  $\bar{S} = S + \partial S$ ,  $a^2 = \text{const} > 0$ .

According to the Fourier method, the solutions of the problem (1) is sought as a product of two functions  $u(x, y, t) = U(x, y) \cdot V(t)$ . Substitution of this product in (1) and separation of variables  $U, V$  leads to the equation with the parameter  $\lambda$

$$\frac{dV}{dt} + \lambda V = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (2)$$

and to the Sturm-Liouville problem

$$L[U] + \lambda U = 0 (S), \quad U|_{\partial S} = 0. \quad (3)$$

The finite sum

$$U_N(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M d_{ij} \gamma_i(x) \delta_j(y) \quad (4)$$

is used for approximation of  $U$ ;  $\gamma_i(x) = \varphi_i(x)$ ,  $\delta_j(y) = \varphi_j(y)$  are orthogonal differentiable piecewise linear continuous splines on each specific grid. Here  $N, M$  are numbers of a grid nodes respectively for axes  $Ox, Oy$ ,  $d_{ij}$  are unknown constant coefficients. The approximation (4) is a finite Fourier series for orthogonal splines. The Reissner variational principle is used to solve the Sturm-Liouville problem. It gives a system finite difference equations for coefficients  $d_{ij}$ . The eigenvalues of the Sturm-Liouville problem are excluding

from this system of equations, as well as from the system of finite difference equations that are associated with equation (2). To do this, the orthogonality property of splines is used. The implicit difference scheme for node values of a solution  $u(x, y, t)$  appears as the result. This algorithm of modified Fourier method is novel.

## 2. Convergence of Method

The convergence investigation of the proposed method uses here the theory of finite difference schemes. The approximate solutions of the parabolic initial boundary value problem (1) converge to an exact solution  $u$  of the problem (1) in a region  $\bar{S}$ , if  $\Delta t = \alpha h, \alpha = const > 0$ . It was investigated approximation of differential equations and stability of solutions of finite difference equations. The implicit finite difference equations together with a boundary condition and together with an initial condition approximate the problem (1) in a region  $S$  with an error of an order  $O(h^2)$ . The system of the finite difference equations is characterized by absolute stability. Convergence of solutions of finite difference equations is followed from it, if  $\Delta t = \alpha h, \alpha = const > 0$ . This means convergence

$$\|u - u^{(K)}\|_{W_{h,2}^0} \leq C_1 h^2$$

of values in grid nodes of a sequence of approximate solutions  $u^{(K)}$  to an exact solution  $u$  when a grid step  $h = \max(h_1, h_2)$  decreases. Here  $C_1$  is some positive constant coefficient. Here, the Sobolev space  $W_{h,2}^0$  on grid which is defined by the norm

$$\|u\|_{W_{h,2}^0} = \left( h^2 \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M |u(x_i, y_j)|^2 \right)^{1/2}$$

associated with a grid in a region. From the convergence of numerical solutions of finite difference equations obtained at grid nodes at specified time points follows the convergence of a sequence of analytical approximate solutions in the form of finite Fourier series. The inequality

$$\|u - u^{(K)}\|_{W_2^0(S)} \leq C_2 h^2$$

defines this convergence. Here  $C_2$  is some positive constant coefficient,  $W_2^0(S)$  is the Sobolev space.

## References

1. Leontiev V.L. Fourier method related with orthogonal splines in parabolic initial boundary value problem for domain with curvilinear boundary // Ufa Mathematical Journal. 2022. Vol. 14, No. 2. P. 58–68.

MSC 74H45, 74K05

## Mathematical modeling of nonlinear vibrations of a rope with a moving boundary

V.L. Litvinov<sup>1</sup>, K.V. Litvinova<sup>2</sup>

Syzran branch of Samara State Technical University<sup>1</sup>,  
Lomonosov Moscow State University<sup>2</sup>

*Abstract:* The problems of longitudinal – transverse vibrations of objects with moving boundaries were solved mainly in a linear setting, the energy exchange through the moving boundary and the interaction between longitudinal and transverse vibrations were not taken into account until now. The paper presents a new nonlinear mathematical model of transverse vibrations of an unbounded rope with a moving boundary, in which geometric nonlinearity is taken into account. The obtained mathematical model allows one to describe high-intensity vibrations of a rope with a moving boundary. The solution was made in the MATLAB environment of dimensionless variables, which allows one to use the obtained results to calculate oscillations of a wide range of technical objects

*Keywords:* nonlinear mathematical model, vibrations of a rope, moving boundaries.

The problems of longitudinal – transverse vibrations of objects with moving boundaries were solved mainly in a linear setting, the energy exchange through the moving boundary and the interaction between longitudinal and transverse vibrations were not taken into account until now [1–5, 7–14]. The action of the forces of the external environment's resistance was considered in rare cases [6]. Real technical objects are much more complicated, for example, with an increase in the intensity of oscillations, the geometric nonlinearities of the object have a great influence on the oscillatory process.

It became possible to more accurately describe complex mathematical models of longitudinal-transverse oscillations of objects with moving boundaries with a large number of factors influencing the oscillatory process in connection with the intensive development of numerical methods.

The paper presents a new nonlinear mathematical model of longitudinal-transverse vibrations of a rope with a moving boundary, which takes into account geometric nonlinearity, energy exchange across the boundary. The boundary conditions are obtained in the case of interaction between the parts of the object to the left and to the right of the moving boundary.

Thus, a new nonlinear mathematical model of transverse vibrations of an unrestricted rope with a moving boundary has been developed. It is solved numerically in the MATLAB environment. The boundary conditions are obtained in the case of occurrence between the parts of the object to the left and to the right of the boundary. The obtained model is linearized, while the principle of homogeneity is observed: in the particular case of small fluctuations, the obtained model coincides with the classical one, which indicates the correctness of the results obtained. The obtained mathematical models make it possible to describe high-power oscillations with moving boundaries.

## References

1. Savin G.N., Goroshko O.A. Dynamics of a variable length thread // Nauk. dumka, Kiev, 1962. 332 p.
2. Samarin Yu.P. On a nonlinear problem for the wave equation in one-dimensional space // Applied Mathematics and Mechanics. 1964. V. 26, No. 3. P. 77–80.
3. Vesnitsky A.I. Waves in systems with moving boundaries and loads // Fizmatlit, Moscow, 2001. 320 p.
4. Lezhneva A.A. Bending vibrations of a beam of variable length // Izv. Academy of Sciences of the USSR. Rigid Body Mechanics. 1970. No. 1. P. 159–161.
5. Litvinov V.L. Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations // Tr. Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. 2020. Vol. 26, No. 2. P. 188–199.
6. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Mathematical models of longitudinal-transverse vibrations of objects with moving boundaries // Vestn. Himsel. tech. un-t. Ser. Phys and mat. science. 2015. Vol. 19, No. 2. P. 382-397.
7. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Mathematical modeling and study of the resonance properties of mechanical objects with a changing boundary: monograph / V. L. Litvinov, V. N. Anisimov - Samara: Samar. state tech. un – t, 2020. 100 p.
8. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Application of the Kantorovich–Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics. 2018. No. 2. P. 70–77.
9. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Transverse vibrations of a rope moving in a longitudinal direction // Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2017. V. 19, No. 4. P. 161–165.
10. Litvinov V.L. Variational formulation of the problem on vibrations of a beam with a moving spring-loaded support // Theoretical and Mathematical Physics. 2023. Vol. 215, No. 2. P. 709–715.
11. Litvinov V.L. Calculation of natural frequencies of a rope moving in the longitudinal direction // Journal of the Middle Volga Mathematical Society. 2013. V. 15, No. 3. P. 112–119.
12. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Calculation of natural frequencies of a rope moving in the longitudinal direction // Journal of the Middle Volga Mathematical Society. 2017. V. 19, No. 1. P. 130–139.
13. Litvinov V.L., Litvinova K.V. An approximate method for solving boundary value problems with moving boundaries by reduction to integro-differential equations// Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2022. Vol. 62, No. 6. P. 945–954.

14. Litvinov V.L. Variational formulation of the problem on vibrations of a beam with a moving spring-loaded support // Theoretical and Mathematical Physics. 2023. Vol. 215, No. 2. P. 709–715.
15. Litvinov V.L., Litvinova K.V. On one inverse method for solving problems of vibrations of mechanical systems with moving boundaries // Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics and mechanics. 2024. Vol. 3. P. 53–59.



Научное электронное издание

**Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ  
XI МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ  
МОЛОДЕЖНОЙ ШКОЛЫ-СЕМИНАРА  
имени Е.В. Воскресенского**

Саранск

26 — 28 июля 2024 г.

Редакторы: Пескова Е.Е., Язовцева О.С.

Формат 60×84 1/16

Усл. печ. л. 13.54

Подписано в печать 25.07.2024

Средне-Волжское математическое общество  
Национальный исследовательский  
Мордовский государственный университет  
430005, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, 68

