

УДК 517.91

## **Подходы для повышения порядка аппроксимации метода гидродинамика сглаженных частиц (SPH) на гладких решениях\***

Стояновская О.П., Григорьев В.В., Савватеева Т.А.

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

*Аннотация:* В работе обсуждаются подходы для повышения порядка аппроксимации метода гидродинамика сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) на гладких решениях. Приводится численное решение задачи о движении поршня в газе, показываются проблемы при сопряжении в SPH методов второго и более высоких порядков с граничными условиями газ-твердая стенка.

*Ключевые слова:* гидродинамика сглаженных частиц, SPH, Smoothed Particle Hydrodynamics, методы 4 порядка, задача о движении поршня в газе.

### **1. Введение**

Гидродинамика сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) представляет собой численный метод аппроксимации нестационарных уравнений в частных производных [6]. Основу метода составляет способ вычисления пространственных производных от функции, значения которой заданы в подвижных нерегулярно расположенных в пространстве узлах – лагранжевых частицах. Для аппроксимации уравнений по значениям функции, известной в узлах, строится гладкая интерполирующая функция с помощью ядра (функции радиального базиса), носитель которого охватывает несколько соседних частиц. Такой способ интерполяции означает, что пространственное разрешение метода (точность интерполирования и вычисления производных от интерполянта) определяется независимыми параметрами – размером ядра  $h$  и расстоянием между модельными частицами  $\Delta x$ , а также видом ядра.

В настоящее время численные модели механики сплошных сред на основе SPH интенсивно развиваются. Об этом свидетельствует большое количество научных публикаций, посвященных SPH, а также появление новых свободно-распространяемых кодов для исследовательских и инженерных расчетов на основе этого метода SPHinxsys [1], Phantom [2], или новых версий давно развиваемых кодов DualPhysics [3], Gadget [4]. Обзор современных достижений в SPH и нерешенных проблем для этого метода можно найти, например, в [5].

### **2. Подходы к повышению порядка метода SPH**

#### **2.1. По радиусу сглаживания – использование немонотонных ядер**

В [5] обсуждается проблема конструирования методов высокого порядка на основе SPH и длительное время существовавший «барьер второго порядка». Суть «барьера второго порядка» состоит в невозможности занулить члены погрешности метода

---

\*Исследование проведено за счет проекта РФФИ 23-11-00142 <https://rscf.ru/project/23-11-00142/>

старше второго порядка при использовании классических знакоопределенных ядер в SPH. Под классическими ядрами будем понимать  $W(\varphi)$  – положительную финитную функцию радиального базиса (значение функции зависит только от расстояния до нуля), монотонно убывающую от 0, нормированную, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(\varphi) d\varphi = 1, \quad (1)$$

и такова, что ее преобразование Фурье  $F(kH)W(\varphi)$  имеет следующие свойства

$$\diamond \forall kH \quad 0 < F(kH)W(\varphi) < \frac{2}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\diamond \lim_{kH \rightarrow 0} F(kH)W(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + o((kH)^2).$$

При использовании классических ядер SPH имеет второй порядок аппроксимации на гладких решениях по  $H$ -радиусу сглаживания. Для повышения порядка до 4 разработчики метода SPH [6] предложили сконструировать немонотонную функцию радиального базиса  $W_*(\varphi) = (A + B\varphi^2)W(\varphi)$ , где  $A, B$  – константы, удовлетворяющие системе

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (A + B\varphi^2)W(\varphi) d\varphi = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (A + B\varphi^2)\varphi^2 W(\varphi) d\varphi = 0. \quad (2)$$

Так группа в Университете Манчестера, Великобритания, занимающаяся развитием идеи знакопеременных ядер высокого порядка аппроксимации при моделировании динамики несжимаемой жидкости на практике показали 4 порядок аппроксимации [7, 8] для ядер, сконструированных на основе этой идеи.

Представленный подход можно расширять на многомерный случай, а также искать большее количество констант, зануляя большее количество интегралов из (2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (A_0 + A_2\varphi^2 + \dots A_{2n}\varphi^{2n})\varphi^0 W(\varphi) d\varphi = 1, \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (A_0 + A_2\varphi^2 + \dots A_{2n}\varphi^{2n})\varphi^2 W(\varphi) d\varphi = 0, \dots, \int_{-\infty}^{+\infty} (A_0 + A_2\varphi^2 + \dots A_{2n}\varphi^{2n})\varphi^{2n} W(\varphi) d\varphi = 0. \quad (4)$$

Предполагается, что это очень дешевый и простой способ повысить порядок аппроксимации SPH на гладких решениях путем замены ядра  $W(\varphi)$  на ядро

$$W_{Hn}(\varphi) = (A_0 + A_2\varphi^2 + \dots A_{2n}\varphi^{2n})\varphi^{2n} W(\varphi).$$

## 2.2. По количеству модельных частиц – использование ядер, имеющих более двух гладких производных

В работе [10] показано, что порядок аппроксимации решения по количеству соседей определяется гладкостью (количеством непрерывных производных) ядра метода. Этот результат был получен теоретически и практически.

Для теоретического обоснования применялся дисперсионный анализ. Путем численного анализа дисперсионного соотношения показано, что погрешность вычисления фазовой скорости волн в SPH немонотонно зависит от расстояния между модельными частицами. Эта зависимость имеет осциллирующий характер, причем амплитуда осцилляций убывает пропорционально величине  $\left(\frac{\Delta x}{H}\right)^\alpha$ , где  $\alpha$  – гладкость ядра. Немонотонная зависимость погрешности затрудняет практическое исследование скорости сходимости метода.

На практике сходимость метода SPH изучена на бесконечно-гладком решении задачи о распространении монохроматической звуковой волны в газе. В вычислительных экспериментах показано, что теоретическая погрешность фазовой скорости движения волн пропорциональна погрешности скорости в базовых физических переменных. Для ядер, представляющих собой полиномы Вендланда гладкости 2 и 4 показана сходимость численного решения к аналитическому со скоростью 2 и 4 соответственно.

### 3. Вычислительные эксперименты

В настоящей работе мы расширяем систему тестов для изучения порядка аппроксимации SPH. Чтобы иметь возможность количественно оценить ошибки, возникающие при аппроксимации граничных условий газ-твердая стенка (в том числе при использовании осциллирующих ядер), будем решать одномерную задачу о движении поршня в газе.

Пусть бесконечная труба имеет непроницаемую перегородку, справа от перегородки находится покоящийся политропный газ с  $\gamma = \frac{4}{3}$ . Перегородка (поршень) двигается по заданному закону (см. решение задачи 4.8 стр. 90 в [11])

$$x = X(t) = -\frac{2c_0}{\gamma-1}t + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}L \left( \left(1 + \frac{c_0}{L}t\right)^{\frac{2}{\gamma+1}} - 1 \right), \quad (5)$$

где  $c_0$  – скорость звука в покоящемся газе,  $L > 0$  – постоянная (характерный линейный размер),  $\gamma$  – показатель политропы. Тогда параметры газа в трубе описываются с течением времени так:

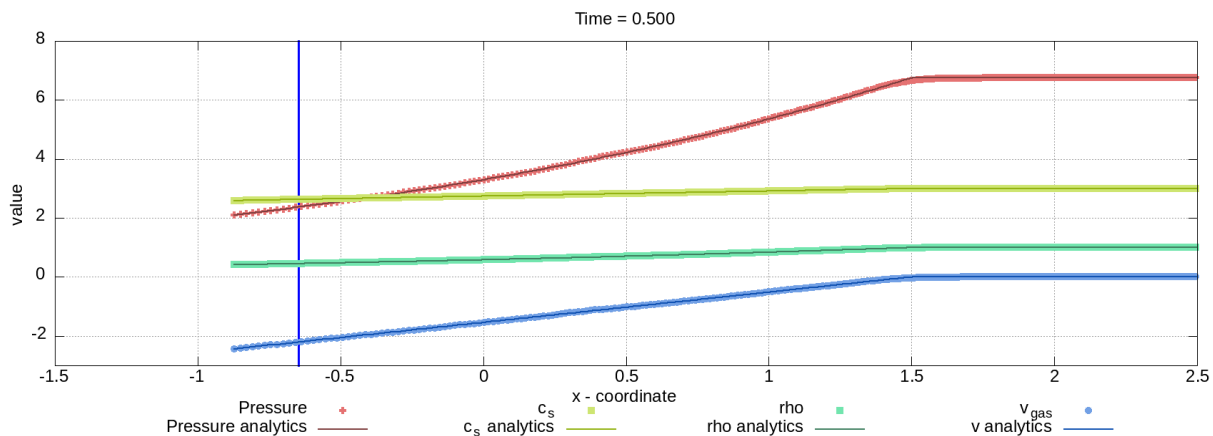
$$c(x, t) = c_0 + \frac{\gamma-1}{2}u(x, t), \quad (6)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & c_0t \leq x < \infty, \\ \frac{2c_0}{\gamma+1} \frac{x - c_0t}{c_0t + L}, & X(t) < x < c_0t. \end{cases} \quad (7)$$

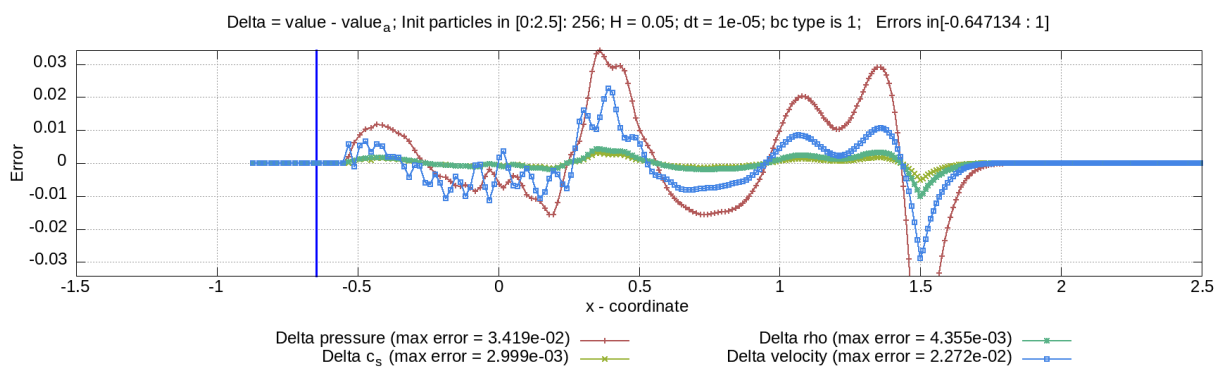
$$\rho(x, t) = \rho_0 \left( \frac{c(x, t)}{c_0} \right)^{2/(\gamma-1)}, \quad p(x, t) = \frac{\rho c^2}{\gamma} = \frac{\rho_0 c^{2\gamma/(\gamma-1)}}{\gamma c_0^{2/(\gamma-1)}}. \quad (8)$$

Численное решение задачи (36), (43), (44) из [12] с использованием схемы приведено на рис. 1-2. Счетные параметры представлены на самом рисунке.

Граничным частицам (отстоят от поршня не более, чем на  $2.1 H$  за поршнем и  $2 H$  перед поршнем) предписывается скорость, плотность и внутренняя энергия, определяемая аналитическим решением (данный способ не может быть применим при решении немодельных задач, но выбран для минимизации ошибки, вносимой



**Рис. 1.** Решение задачи о выдвигании поршня из газа: численное и аналитическое решение задачи в момент времени  $T=0.5$ . Вертикальная синяя линия – положение поршня.



**Рис. 2.** Решение задачи о выдвигании поршня из газа: абсолютная погрешность решения. Вертикальная синяя линия – положение поршня.

аппроксимацией граничных условий), перемещения частиц рассчитываются согласно предписанной скорости.

Видно, что максимум погрешности наблюдается на границе волны разрежения и невозмущенного газа. Это точка, в которой решение терпит слабый разрыв. Мы убедились, что по погрешностям в этой точке будет получаться первый порядок аппроксимации схемы по  $H$ . Кроме того, видно, что даже при использовании аналитических значений макропараметров граничных частиц, от границы поршня в сторону невозмущенного газа идут колебания периода порядка  $2H$ . Эти колебания нарастают по амплитуде и, по-видимому, носят счетный характер.

#### 4. Предварительные выводы и планы

В работе приведены подходы для повышения порядка аппроксимации SPH на гладких решениях. Приведены результаты численного решения задачи о движении поршня методом SPH. Показано, что нерешенной проблемой является способ аппроксимации граничных условий. Мы предполагаем, что если удастся преодолеть счетную генерацию коротких волн от стенки, то в области волны разрежения можно будет наблюдать высокий порядок аппроксимации SPH при использовании немонотонных ядер повышенной гладкости. В этом случае задача о движении поршня будет одним из базовых тестов определения порядка аппроксимации метода. Кроме того,

отметим, что решение о разлете неизэнтропического газа в вакуум, не содержащее слабого разрыва внутри расчетной области (для газопылевой среды такое решение приведено в [12]), по-видимому, является одним из наиболее простых решений (кроме звуковых волн), на котором можно будет непосредственно наблюдать высокий порядок аппроксимации SPH.

## Литература

1. <https://www.sphinxsys.org/>
2. <https://phantomsph.bitbucket.io/>
3. <https://dual.sphysics.org/>
4. <https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/gadget/>
5. Vacondio, R., Altomare, C., De Leffe, M. et al. Grand challenges for Smoothed Particle Hydrodynamics numerical schemes. *Comp. Part. Mech.* 8, P. 575–588 (2021). URL:<https://doi.org/10.1007/s40571-020-00354-1>
6. Monaghan, J.J. Smoothed Particle Hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 1992. P. 543–574.  
<http://dx.doi.org/10.1146/annurev.aa.30.090192.002551>
7. Lind S.J., Stansby P.K. High-order Eulerian incompressible smoothed particle hydrodynamics with transition to Lagrangian free-surface motion. *J. Comp. Phys.* 2006. P. 290–311. (doi:10.1016/j.jcp.2016.08.047)
8. Nasar A.M.A., Fourtakas G., Lind S.J., King J.R.C., Rogers B.D., Stansby P.K. High-order consistent SPH with the pressure projection method in 2-D and 3-D *Journal of Computational Physics*. Volume 444, 1 November 2021, 110563 p.
9. Stoyanovskaya O., Lisitsa, V., Anoshin S., Markelova T. Dispersion Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics to Study Convergence and Numerical Phenomena at Coarse Resolution. 2022, *Computational Science and Its Applications - ICCSA 2022 - 22nd International Conference, Proceedings*.
10. Stoyanovskaya O., Lisitsa V., Anoshin S., Markelova T., Savvateeva T.A. Dispersion Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics as a way to understand its order of approximation. Submitted to *Journal of Computational and Applied Mathematics*.
11. Меньщиков В.М., Тешуков В.М. Газовая динамика. Задачи и упражнения // Новосибирск, Издательство НГУ, 2012. 134 с. URL:  
<http://parallels.nsu.ru/efomenko/mss/Chesnokov.pdf>
12. Stoyanovskaya O.P., Grigoryev V.V., Suslenkova A.N., Davydov M.N., Snytnikov N.V. Two-Phase Gas and Dust Free Expansion: Three-Dimensional Benchmark Problem for CFD Codes. *Fluids* 2022, 7, 51 p. URL:  
<https://doi.org/10.3390/fluids7020051>

MSC 34D20

## **Approaches for increasing the order of approximation of the Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method on smooth solutions**

O.P. Stoyanovskaya, V.V. Grigoryev, T.A. Savvateeva  
Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SB RAS

*Abstract:* The paper discusses approaches for increasing the order of approximation of the Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method on smooth solutions. A numerical solution of the problem of piston motion in a gas is presented, problems are shown when conjugating second and higher order methods in SPH with gas-solid wall boundary conditions.

*Keywords:* smoothed particle hydrodynamics, high order method, piston in gas.

### **References**

1. <https://www.sphnixsys.org/>
2. <https://phantomsph.bitbucket.io/>
3. <https://dual.sphysics.org/>
4. <https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/gadget/>
5. Vacondio R., Altomare C., De Lefte M. et al. Grand challenges for Smoothed Particle Hydrodynamics numerical schemes. *Comp. Part. Mech.* 8, 2021. P. 575–588. URL:<https://doi.org/10.1007/s40571-020-00354-1>
6. Monaghan J.J. Smoothed Particle Hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 30, 1992. P. 543-574. <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.aa.30.090192.002551>
7. Lind S.J., Stansby P.K. High-order Eulerian incompressible smoothed particle hydrodynamics with transition to Lagrangian free-surface motion. *J. Comp. Phys.* 326, 2016. P. 290–311. (doi:10.1016/j.jcp.2016.08.047)
8. Nasar A.M.A., Fourtakas G., Lind S.J., King J.R.C., Rogers B.D., Stansby P.K. High-order consistent SPH with the pressure projection method in 2-D and 3-D *Journal of Computational Physics*. Volume 444, 1 November 2021, 110563 p.
9. Stoyanovskaya O., Lisitsa V., Anoshin S., Markelova T. Dispersion Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics to Study Convergence and Numerical Phenomena at Coarse Resolution. 2022, *Computational Science and Its Applications - ICCSA 2022 - 22nd International Conference, Proceedings*.
10. Stoyanovskaya O., Lisitsa V., Anoshin S., Markelova T., Savvateeva T.A. Dispersion Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics as a way to understand its order of approximation. Submitted to *Journal of Computational and Applied Mathematics*.

11. Menshikov V.M., Teshukov V.M. Gas dynamics. Problems and Exercises // Novosibirsk, 2012. URL: <http://parallels.nsu.ru/efomenko/mss/Chesnokov.pdf>
12. Stoyanovskaya O.P., Grigoryev V.V., Suslenkova A.N., Davydov M.N., Snytnikov N.V. Two-Phase Gas and Dust Free Expansion: Three-Dimensional Benchmark Problem for CFD Codes. Fluids 2022, 7, 51. URL: <https://doi.org/10.3390/fluids7020051>