

УДК 517.925.5, 537.611.44, 51-73

Метод нелинейных функциональных подстановок для уравнений нелинейной диффузии и волновых уравнений*

Морозов В.М.^{1,2}, Журавлев В.М.³

Самарский национальный исследовательский университет¹,
Ульяновское конструкторское бюро приборостроения²,
Ульяновский государственный университет³

Аннотация: В работе развивается обобщение метода функциональных подстановок (МФП) – нелинейные функциональные подстановки (НФП), основанные на системе нелинейных базовых соотношений. С помощью НФП строятся преобразования Бэклунда и точные решения уравнений типа Лиувилля, Sin-Gordon и нелинейной диффузии.

Ключевые слова: метод функциональных подстановок, преобразования Бэклунда, нелинейная диффузия.

1. Нелинейные функциональные подстановки

В работах [1, 2] для построения точных решений нелинейных уравнений был предложен метод функциональных подстановок (МФП), основная идея которого заключается в том, что некоторое нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка:

$$F(N_{xx}, N_{tt}, N_{xt}, N_x, N_t, x, t) \quad (1)$$

может быть представлено в виде условия совместности пары дифференциальных соотношений, называемых базовыми:

$$T_x = A(x, t)T, \quad T_t = B(x, t)T \quad (2)$$

и добавочного уравнения для вспомогательной функции $T(x, t)$:

$$G(T_{xx}, T_{tt}, T_{xt}, T_x, T_t, x, t). \quad (3)$$

Например, уравнение быстрой диффузии вида $N_t = (\ln N)_{xx} + N_x$ получается из добавочного уравнения следующего вида:

$$T_t T_x = T_{xx} T \quad (4)$$

заменой $N = (\ln A)_x$ после использования базовых соотношений (2) и условия совместности $A_t = B_x$.

Нелинейные функциональные подстановки:

$$T_x = u(t, x, T), \quad T_t = v(t, x, T) \quad (5)$$

*Работа выполнена в рамках проекта 0777-2020-0018, финансируемого из средств государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, подведомственных Минобрнауки России.

преобразуют (4) (УБД) к эквивалентной ему системе квазилинейных уравнений:

$$vu = T(u_x + uv_T), \quad (6)$$

$$u_t + vu_T = v_x + uv_T. \quad (7)$$

Решить полученную систему уравнений можно с использованием различных методов, в частности, можно искать решение в виде полиномиального разложения функций $u(t, x, T)$ и $v(t, x, T)$ по T .

В некоторых случаях полученное разложение приводит к автопреобразованию Бэклунда исходного уравнения.

Для уравнений нелинейной диффузии с взаимными коэффициентами диффузии [5] вида:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{N_\xi}{N^2 F(1/N)} + \frac{NH(1/N)}{F(1/N)} \right). \quad (8)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{n_x}{F(n)} - \frac{H(n)}{F(n)} \right). \quad (9)$$

с помощью НФП найдено преобразование, связывающее решения:

$$N(\xi(x, t), t)n(x, t) = 1. \quad (10)$$

2. Локализованные решения и симметрии уравнений нелинейной диффузии

Уравнение быстрой диффузии с источником:

$$n_t = (\ln n)_{xx} + \tilde{C}n_x + J(x, t), \quad (11)$$

соответствует обобщенному добавочному уравнению

$$T_t (T_x + q(x, t)T) = T_x (CT_x + p(x, t)T) + T (T_{xx} + r(x, t)T), \quad (12)$$

$q(z, t)$, $p(x, t)$, $r(x, t)$ определяются из условия перехода (12) в УБД.

Решение добавочного уравнения и условия совместности ищем в форме полиномиальных подстановок:

$$T_x = u(x, t, T) = U_1(x, t)T + U_N(x, t)T^N, \quad (13)$$

$$T_t = v(x, t, T) = V_1(x, t)T + V_N(x, t)T^N. \quad (14)$$

Решение для концентрации $n(x, t)$ записывается следующим образом:

$$n(x, t) = \frac{1}{1-N} \frac{\partial}{\partial x} \ln \left[(1-N) \int e^{2(N-1)H(x+(N+C)t)} dx + \beta_0 \right] + \quad (15)$$

$$+ F((C-N+2)t+x) + H'(x+(N+C)t) - \frac{1}{C-N+2} G(x, t). \quad (16)$$

Волновые компоненты решения $H(x+(N+C)t)$ и $F(x+(C-N+2)t)$ связаны с функцией $G(x, t)$, определяющей источник ($J = \sigma G_x - G_t$):

$$\frac{\partial G}{\partial x} + 2mF G - m G^2 = F' + m F^2 + H'' - m (H')^2 \quad (17)$$

На рис. 1 представлены варианты решений $n(x, t)$ для различных источников $J(x, t)$.

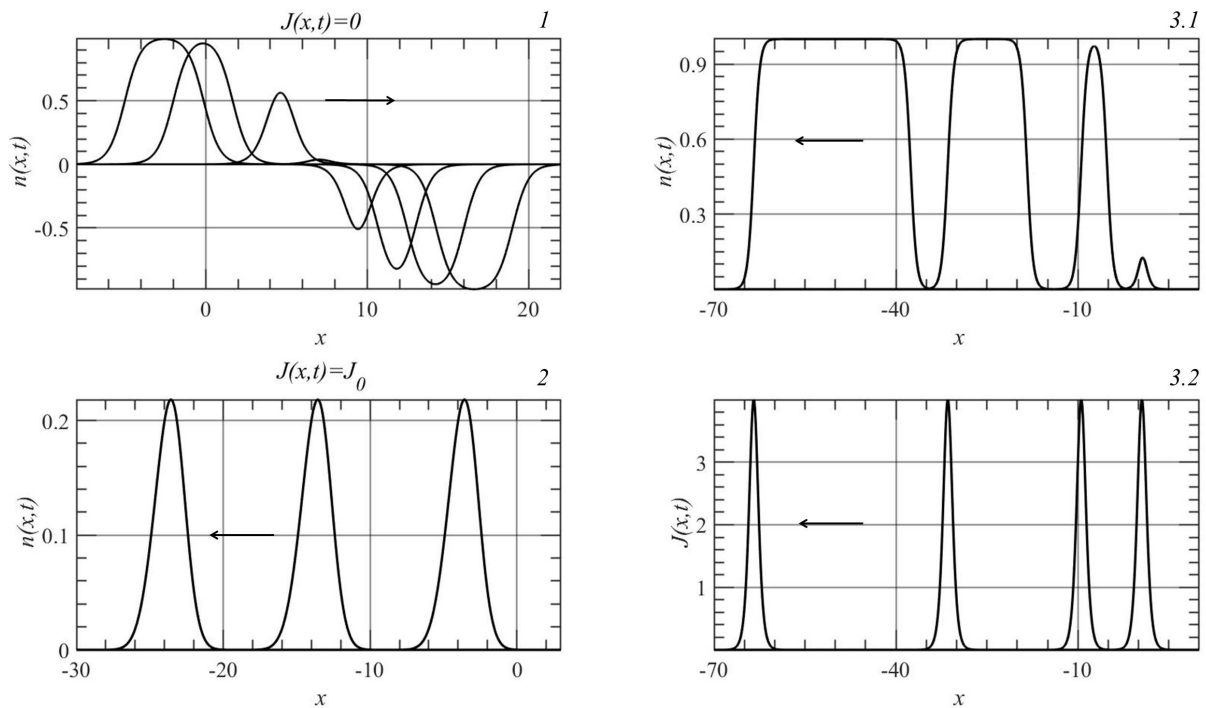


Рис. 1. Распределения концентраций при разных значениях источника $J(x, t)$.

Верхняя левая часть рис. 1 построена для значений: $t = 0.3 k$, $k = \overline{0,8}$, $m = 2$, $\lambda = 1$, $C = -9$, $a = -5$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $\beta_0 = -12$.

Для верхней правой части выбраны следующие значения параметров: $t = 0, 2, 4, 6$; $m = 4$, $J_0 = 1$, $H_1 = 2$, $H_2 = 1$, $\sigma = 1$, $\beta_0 = 10$, $F_0 = 1$, $H_1 = -2$, $H_2 = 1$, $\beta_0 = 4.6$.

Третий рисунок выполнен при значениях $t = 0, 1, 3.2, 6.4$, $m = 2$, $f(t) = f_1 e^{k_0 t}$, $\beta_0 = -5$, $f_1 = 1$, $H_1 = 0.5$, $k_0 = -20$.

Литература

1. Peruani F. A kinetic model and scaling properties of non-equilibrium clustering of self-propelled particles [Текст] / F. Peruani, M. Baer // New Journal of Physics. 2013. Т. 15. No 6. – P. 15 - 30.
2. Ghoniem N.M. Theory and experiment of nanostructure self-organization in irradiated materials [Текст] / N.M. Ghoniem, D. Walgraef, S.J. Zinkle // Journal of computer-aided materials design. 2001. Т. 8. No 1. P. 1 - 38.
3. Alsabbagh A. Microstructure and mechanical behavior of neutron irradiated ultrafine grained ferritic steel [Текст] / A. Alsabbagh, A. Sarkar, B. Miller, J. Burns, L. Squires, D. Porter, J.I. Cole, K.L. Murty // Materials Science and Engineering: A. 2014. Т. 615. P. 128 - 138.
4. Журавлев В.М. Лазерно-индуцированная генерация поверхностных периодических структур в средах с нелинейной диффузией [Текст] / В.М. Журавлев, И.О. Золотовский, Д.А. Коробко, В.М. Морозов, В.В. Светухин, И.О. Явтушенко, М.С. Явтушенко // ФТТ. 2017. No 12. P. 2291 - 2998.

5. Морозов В.М. Модель радиационно-стимулированного роста когерентных структур в кристаллической среде с быстрой релаксацией и медленной диффузией [Текст] / В.М. Морозов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2022. No 2. P. 78 – 104.

MSC 34D20

Nonlinear functional substitutions method for nonlinear diffusion and wave equations

Morozov V.M.^{1,2}, Zhuravlev V.M.³

Samara National Research University¹,
Ulyanovsk instrument manufacturing design bureau²,
Ulyanovsk State University³

Abstract: In this work we develop a generalization of the functional substitutions method — nonlinear functional substitutions (NFS), based on a nonlinear system of basic relations. Using NFS, Backlund transformations and exact solutions of the Liouville and diffusion equations are constructed.

Keywords: functional substitutions method, Backlund transformation, nonlinear diffusion.

References

1. Peruani F., Baer M. A kinetic model and scaling properties of non-equilibrium clustering of self-propelled particles // *New Journal of Physics*. 2013. T.15. P.15-30.
2. Ghoniem N.M., Walgraef D., Zinkle S.J. Theory and experiment of nanostructure self-organization in irradiated materials // *Journal of computer-aided materials design*. 2001. T.8. No.1. P. 1-38.
3. Alsabbagh A., Sarkar A., Miller B., Burns J., Squires L., Porter D., Cole J.A., Murty K.L. Microstructure and mechanical behavior of neutron irradiated ultrafine grained ferritic steel // *Materials Science and Engineering: A*. 2014. T.615. P. 128-138.
4. Zhuravlev V. M. Et al. Laser-induced generation of surface periodic structures in media with nonlinear diffusion // *Physics of the Solid State*. 2017. T.59. P. 2313-2320.
5. Morozov V.M. Model of radiation-stimulated growth of coherent structures in a crystalline medium with fast relaxation and slow diffusion. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2022. P. 99–133. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2022-2-7