

УДК 519.63

## О точности разрывного метода Галеркина при расчете газодинамических ударных волн\*

Ладонкина М.Е.<sup>1,2</sup>, Неклюдова О.А.<sup>1,2</sup>, Остапенко В.В.<sup>2</sup>, Тишкин В.Ф.<sup>1,2</sup>

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша  
Российской Академии наук<sup>1</sup>,

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской  
Академии наук<sup>2</sup>

*Аннотация:* В статье представлены результаты расчетов газодинамических ударных волн, возникающих при решении задачи Коши с гладкими периодическими начальными данными. Эти расчеты проводились по трем модификациям DG (Discontinuous Galerkin) метода, в которых решение представлено в виде кусочно-линейной разрывной функции. Результаты расчетов показали, что DG методы, в которых для монотонизации полученного решения применяется ограничитель Кокбуерна, обладают примерно одинаковой точностью в областях влияния ударных волн, в то время как немонотонный DG метод, в котором этот ограничитель не используется, демонстрирует в этих областях существенно более высокую точность. Это позволяет использовать немонотонный DG метод в качестве базисного при построении комбинированной схемы, которая монотонно локализует фронты ударных волн и одновременно сохраняет повышенную точность в областях их влияния.

*Ключевые слова:* уравнения газовой динамики, ударные волны, разрывный метод Галеркина

### 1. Введение

Предыдущие исследования в области численных схем для гиперболических систем законов сохранения показали, что среди двухслойных по времени линейных схем не существует схем повышенного порядка аппроксимации [1]. В связи с этим, развитие теории схем сквозного счета было направлено на создание численных схем, которые обеспечивают повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонность на ударных волнах за счет нелинейной коррекции потоков. Эта коррекция приводит к нелинейности данных схем при аппроксимации линейных гиперболических систем. В результате были разработаны различные классы NFC (Nonlinear Flux Correction) схем, такие как MUSCL, TVD, WENO, DG и CABARET. К NFC схемам также относятся гибридные схемы, в которых численное решение на каждом временном слое монотонизируется с помощью специального численного алгоритма в окрестностях больших градиентов точного решения. Главное преимущество NFC схем состоит в их способности с высокой точностью локализовать ударные волны, не приводя к существенным нефизическим осцилляциям. При этом основной недостаток NFC схем заключается в том, что эти схемы имеют не более чем первый порядок локальной сходимости в областях влияния ударных волн и, по существу, схемами повышенной точности не являются. Было показано, что некоторые немонотонные схемы, в частности, схема Русанова из [2], схема CWA (Compact Weak Approximation)

---

\*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФ, проект № 22-11-00060

из [3] и схема DG1 из [4], в отличие от NFC схем, сохраняют повышенную точность в областях влияния ударных волн, что позволило использовать эти схемы в качестве базисных при построении для системы уравнений мелкой воды комбинированных схем сквозного счета [5-8], которые монотонно локализируют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенную точность в областях их влияния.

В данном исследовании изучается точность разрывного метода Галеркина при численном моделировании разрывных решений системы уравнений неизоэнтропической газовой динамики, которая, в отличие от системы уравнений мелкой воды, в общем случае не допускает записи в форме инвариантов. Для проведения сравнительного анализа точности используются следующие схемы: немонотонная схема DG1 и две NFC схемы DG1A1 и DG1A2, алгоритмы которых приведены в [5]. Для тестирования используется специальная задачи Коши [9] с гладкими периодическими начальными данными, при решении которой внутри расчетной области в результате градиентных катастроф формируется последовательность изолированных ударных волн, распространяющихся с постоянной скоростью. Между этими ударными волнами образуются их области влияния, которые с течением времени заполняют всю расчетную область. Для данной задачи Коши будем использовать аббревиатуру PCPG (Periodic Cauchy Problem for Gas dynamics).

## 2. Задача Коши для гиперболической системы законов сохранения

Рассмотрим квазилинейную гиперболическую систему законов сохранения

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (1)$$

где  $u(x, t)$  – искомая, а  $f(u)$  – заданная гладкие вектор-функции. Поставим для системы (1) задачу Коши с гладкими периодическими начальными данными

$$u(x, 0) = u_0(x) \equiv u_0(x + X). \quad (2)$$

Предположим, что задача (1), (2) при  $t > 0$  имеет единственное ограниченное обобщенное решение  $u(x, t)$ , в котором с течением времени формируется последовательность изолированных ударных волн.

Численные схемы разрывного метода Галеркина, аппроксимирующие задачу (1), (2), будем строить на равномерной прямоугольной сетке

$$S = \{(x_j, t_n) : x_j = jh, t_n = n\tau, n \geq 0\}, \quad (3)$$

где  $h = \frac{X}{M}$  – шаг сетки по пространству,  $M$  – заданное целое положительное число,

$$\tau = zh / \max_{k,j,n} |\lambda_k(v_h(x_{j+1/2}, t_n))| \quad (4)$$

$\tau$  – шаг сетки по времени, выбираемый из условия устойчивости Куранта, в котором  $z \in (0, 1)$  – коэффициент запаса,  $\lambda_k(u)$  – собственные значения матрицы Якоби  $f_u(u)$  системы (1),  $v_h(x_{j+1/2}, t_n)$  – значение численного решения  $v_h(x, t_n)$  в полущелом пространственном узле  $x_{j+1/2} = (j + 1/2)h$ .

Поскольку в рассматриваемой тестовой задаче Коши (1), (2) точное решение  $u(x, t)$  заранее неизвестно, то для приближенного вычисления ошибок численного решения  $v_h(x, t_n)$  этой задачи мы применим метод Рунге [5]. Для этого зафиксируем

на сетке (3) некоторый узел  $(x_{j+1/2}, t_n)$ , где  $n \geq 1$ , и введем для него обозначение  $(\tilde{x}, \tilde{t})$ , где  $\tilde{x} = (j + 1/2)h$  и  $\tilde{t} = n\tau > 0$ . Предположим, что на последовательности сгущающихся сеток

$$S_i = \{(x_j^i, t_n^i) : x_j^i = jh_i, t_n^i = n\tau_i, n \geq 0\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где  $h_i = h/3^{i-1}$ ,  $\tau_i = \tau/3^{i-1}$ , получаемых путем сжатия базисной сетки (3), численное решение  $v_{h_i}(x, t_n^i)$  в точке  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  сходится к точному решению  $u(x, t)$  с порядком  $r$ , который приближенно вычисляется по следующей формуле Рунге

$$r = \log_3 \frac{|v_{h_1} - v_{h_2}|}{|v_{h_2} - v_{h_3}|} = \log_{1/3} \frac{|v_{h_2} - v_{h_3}|}{|v_{h_1} - v_{h_2}|}, \quad (5)$$

С учетом (5) получаем приближенную оценку для вектора ошибок численного решения на базисной сетке (3)

$$\delta v_h = v_h - u = (v_{h_1} - v_{h_2}) \left(1 - \frac{|v_{h_2} - v_{h_3}|}{|v_{h_1} - v_{h_2}|}\right)^{-1},$$

из которой следует формула для относительных дисбалансов (погрешностей) численного решения

$$\Delta v_h = \lg \frac{|\delta v_h|}{|v_h|} = \lg \frac{|v_h - u|}{|v_h|}. \quad (6)$$

### 3. Задача Коши для системы уравнений неизэнтропической газовой динамики

В качестве конкретной гиперболической системы (1) выберем систему законов сохранения неизэнтропической газовой динамики, для которой

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad f(u) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e + p) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$  и  $e = \varepsilon + u^2/2$  – плотность, скорость, давление и удельная полная энергия,  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия. Давление и внутренняя энергия удовлетворяют уравнению состояния идеального политропного газа  $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ , в котором  $\gamma = 1.4$  – показатель адиабаты двухатомного газа. Система (1), (7) имеет два изоэнтропических квазиинварианта  $w_1$ ,  $w_3$  и инвариант  $w_2 = s$ , которые задаются формулами

$$w_1 = u - \frac{2c}{\gamma - 1}, \quad w_2 = \frac{1}{\gamma - 1} \ln \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad w_3 = u + \frac{2c}{\gamma - 1},$$

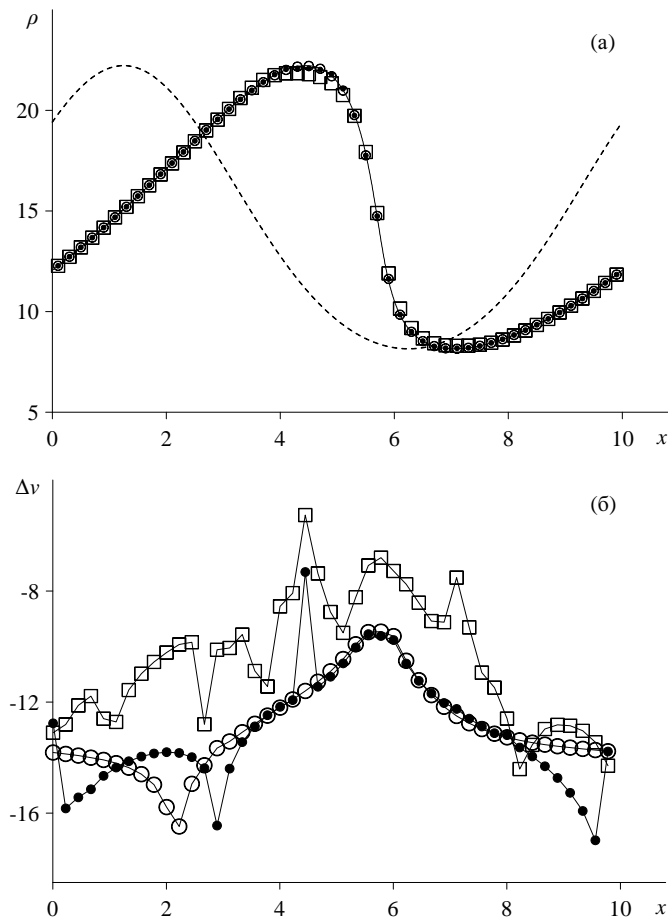
где  $s$  – энтропия и  $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$  – скорость звука.

Рассмотрим для системы (1), (7) задачу Коши с гладкими периодическими начальными условиями (задача PCFG)

$$w_1(x, 0) = -10, \quad w_2(x, 0) = 0, \quad w_3(x, 0) = \sin\left(\frac{2\pi(x+3)}{X} + \frac{\pi}{4}\right) + 10, \quad (8)$$

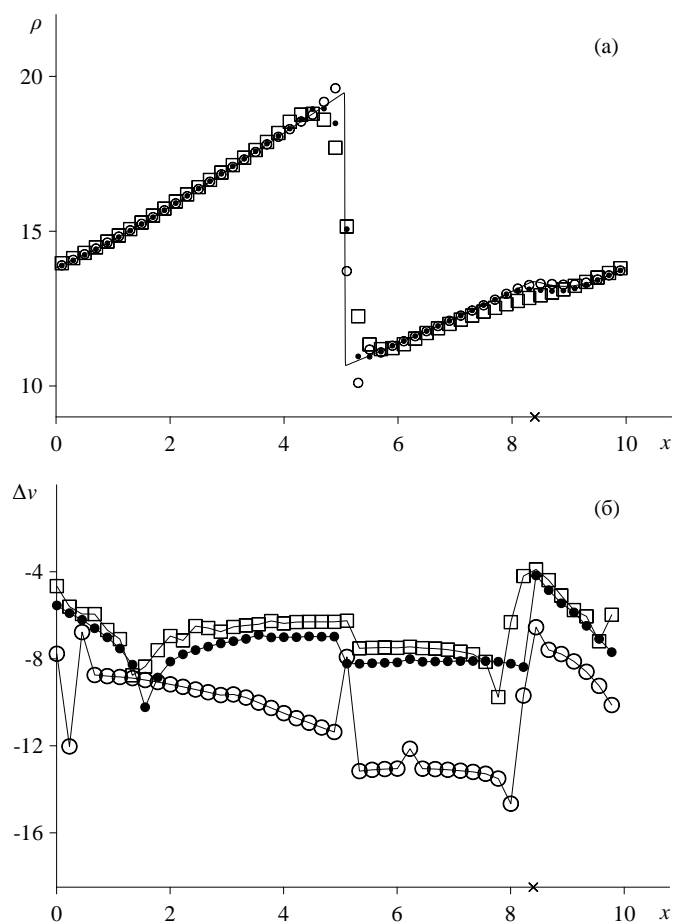
где  $X = 10$  – длина периода. Из условий (8) однозначно определяются начальные значения  $u(x, 0)$  базисных параметров течения, в частности, плотность газа  $\rho(x, 0)$ , показанная на рис. 1а пунктирной линией. Поскольку в начальный момент времени энтропия газа постоянна, то во всех гладких частях точного решения, не входящих в области влияния ударных волн, течение газа является изоэнтропическим.

В точном решении задачи PCPG в момент времени  $t_* \approx 1.35$  формируется последовательность изолированных ударных волн, которые распространяются друг за другом с одинаковыми скоростями в положительном направлении оси  $x$ . На рис. 1а и 2а в моменты времени  $t = 1$  и  $t = 5$  сплошными линиями изображены квазиточные профили плотности, получаемые при расчете по схеме DG1A1 на мелкой сетке (3), в которой  $h = 1/1215$ . К моменту времени  $t = 1$  в точном решении начинают формироваться области больших градиентов, но решение еще остается гладким (рис. 1а). В момент времени  $t = 5$  сформировавшиеся ударные волны проходят расстояние большее длины периода  $X = 10$  и вся расчетная область становится их областью влияния. С учетом этого сильный разрыв, расположенный на линии, приведенной на рис. 2а, соответствуют ударной волне, которая сформировалась в момент времени  $t_*$  внутри интервала  $[-X, 0]$ .



**Рис. 1.** Плотность газа (а) и относительные локальные дисбалансы (б), получаемые в момент времени  $t = 1$  при численном решении задачи PCPG.

На рис. 1 и 2 приведены результаты расчетов задачи PCPG по схемам DG1 (кружки), DG1A1 (квадратики) и DG1A2 (точки) на равномерной сетке (3). На верхних рисунках с индексом (а) показаны значения плотности газа, получаемые при расче-



**Рис. 2.** Плотность газа (а) и относительные локальные дисбалансы (б), получаемые в момент времени  $t = 5$  при численном решении задачи PCPG.

те, в котором  $h = 0.2$ . Из этих рисунков видно, что, в отличие от NFC схем DG1A1 и DG1A2, немонотонная схема DG1 имеет заметные нефизические осцилляции в окрестностях ударных волн. На нижних рисунках с индексом (б) приведены относительные локальные дисбалансы (б), получаемые при расчете на базисной сетке (3), где  $h = 1/135$ . Значения этих дисбалансов показаны для каждого 30-го полуцелого пространственного узла разностной сетки.

Из рис. 1б и 2б следует, что NFC схемы DG1A1 и DG1A2, в которых для монотонизации численного решения применяется ограничитель Кокбуерна, имеют приблизительно одинаковую точность в областях влияния газодинамических ударных волн, в то время как немонотонная схема DG1, в которой этот ограничитель не используется, демонстрирует в этих областях существенно более высокую точность. Это позволяет использовать схему DG1 в качестве базисной при построении комбинированной схемы, которая монотонно локализует фронты ударных волн и одновременно сохраняет повышенную точность в областях их влияния.

## Литература

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т.47. № 3. С. 271-306.

2. Русанов В.В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счёта разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. Т.180. № 6. С. 1303-1305.
3. Остапенко В.В. О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн // Ж. Вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т.40. № 12. С. 1857-1874.
4. Cockburn B. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection - dominated problems // Lect. Notes Math. 1998. V. 1697. P. 150-268. doi.org/10.1007/BFb0096353
5. Брагин М.Д., Ковыркина О.А., Ладонкина М.Е., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф., Хандеева Н.А. Комбинированные численные схемы // Ж. Вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т.62. № 11. С. 1763-1803.
6. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О построении комбинированных разностных схем повышенной точности // Докл. АН. 2018. Т. 478. № 5. С. 517-522.
7. Зюзина Н.А., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. Монотонная разностная схема, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2018. Т. 482. № 6. С. 639-643.
8. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. Комбинированная схема разрывного метода Галеркина, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2019. Т.489. № 2. С. 119-124.
9. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. О точности разрывного метода Галеркина при расчете газодинамических ударных волн // Докл. АН. 2023. Т.510. № 2. С. 43-51.

MSC 65M22

## On the accuracy of discontinuous Galerkin method calculating gas-dynamic shock waves

M.E. Ladonkina<sup>1,2</sup>, O.A. Nekliudova<sup>1,2</sup>, V.V. Ostapenko<sup>1</sup>, V.F. Tishkin<sup>1,2</sup>  
Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences<sup>1</sup>,  
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch,  
Russian Academy of Sciences<sup>2</sup>

*Abstract:* We present the results of calculations of gas-dynamic shock waves, arising in solving the Cauchy problem with smooth periodic initial data. These calculations were carried out for three modifications of DG (Discontinuous Galerkin) method, in which the solution is represented as a piecewise linear discontinuous function. The results showed that DG methods, in which the Cockburn's limiter is applied to monotone the obtained solution, have approximately the same accuracy in the areas of influence of shock waves, while the nonmonotonic DG method, in which this limiter is not used, demonstrates in these areas significantly higher accuracy. This allows the nonmonotonic DG method to be used as a basic one when constructing a combined scheme, which monotonously localizes the fronts of shock waves and at the same time preserves increased accuracy in the areas of their influence.

*Keywords:* gas dynamic equations, shock waves, discontinuous Galerkin method.

### References

1. Godunov S.K. A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics // Sbornik: Mathematics 1959. T. 47. No. 8-9. P. 357-393.
2. Rusanov V.V. Difference schemes of the third order of accuracy for the through calculation of discontinuous solutions // Doklady Mathematics USSR. 1968. T.180. No.6. P. 1303-1305.
3. Ostapenko V.V. Construction of high-order accurate shock-capturing finite-difference schemes for unsteady shock waves // Comp. Mathematics and Mathematical Physics. 2000. T.40. No.12. P. 1784-1800.
4. Cockburn B. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection - dominated problems // Lect. Notes Math. 1998. V.1697. P. 150-268.  
[doi.org/10.1007/BFb0096353](https://doi.org/10.1007/BFb0096353)
5. Bragin M.D., Kovyorkina O.A., Ladonkina M.E., Ostapenko V.V., Tishkin V.F., Khandeeva N.A. Combined numerical schemes // Comp. Mathematics and Mathematical Physics. 2022. T.62. No.11. P. 1743-1781.
6. Kovyorkina O.A., Ostapenko V.V. On the construction of combined finite-difference schemes of high accuracy // Doklady Mathematics. 2018. T. 97. No.1. P. 77-81.
7. Zyuzina N., Kovyorkina O., Ostapenko V. Monotone finite-difference scheme preserving high accuracy in regions of shock influence // Doklady Mathematica. 2018. T. 98. No.2. C. 506-510.

8. Ladonkina M.E., Nekliudova O.A., Ostapenko V.V., Tishkin V.F. Combined DG scheme that maintains increased accuracy in shock wave areas // Doklady Mathematics. 2019. T.100. No.3. P. 519-523.
9. Ladonkina M.E., Nekliudova O.A., Ostapenko V.V., Tishkin V.F. On the accuracy of discontinuous Galerkin method calculating gas-dynamic shock waves // Doklady Mathematics. 2023. T. 510. No.2. P. 43-51.