

УДК 519.67 517.91 538.94

Дифференциальные уравнения для восстановления зависимости из ее гармоник

Кузьмичев Н.Д.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В работе представлены неоднородные дифференциальные уравнения для восстановления производной экспериментально исследуемой зависимости из ее первой гармоники. На основе дифференциальных уравнения 2-го и 4-го порядков рассмотрен пример восстановления зависимости. Решение задачи Коши осуществлялось численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

Ключевые слова: восстановление производной зависимости, гармоники Фурье, неоднородное дифференциальное уравнение, задача Коши, метод Рунге-Кутты.

1. Введение

Хорошо известна модуляционная методика, которая широко применяется в экспериментальной физике, приборостроении, радиотехнике и других приложениях. В указанной методике используется следующая простая связь. При наложении на объект исследования статического x_0 и гармонического воздействия с малой амплитудой a объект откликается периодическим сигналом, в основном содержащим первую гармонику Фурье. Амплитуда первой гармоники пропорциональна производной изучаемой зависимости:

$$F(x_0 + h \cdot \cos(\omega t)) \approx F(x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x_0} \cdot h \cdot \cos(\omega t).$$

Данное соотношение можно использовать для малых амплитудах модуляции, слабой нелинейности зависимости и в отсутствие гистерезиса. При невыполнении одного из отмеченных условий задача значительно усложняется и требует детального анализа для каждого отдельного случая. Указанный анализ был проведен в работах [1-6]. Примером могут служить нелинейные магнитные свойства и вольтамперные характеристики высокотемпературных сверхпроводников.

2. Ряды Тейлора для коэффициентов Фурье

Пусть экспериментально исследуется гистерезисная зависимость, например, намагниченность $M(H)$ образца магнитного материала. При статическом и переменном воздействии частотой ω на образец внешним магнитным полем напряженностью $H = H_0 + h \cdot \cos \omega \tau$ сигнал отклика материала будет периодической функцией времени τ и в регистрируемом сигнале, содержащем информацию о зависимости, имеются высшие гармоники. Для удобства обозначим $M(H) = f(x)$. Следуя работам [1-6], разложим исследуемую зависимость $M(H)$ в ряд Тейлора в точке $H_0 \equiv x_0$ по $z = a \cdot \cos \omega \tau$, который преобразуется в ряд Фурье:

$$f(x) = f(x_0 + a \cdot \cos(t)) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [c'_n \cdot \cos(nt) + c''_n \cdot \sin(nt)]. \quad (1)$$

В выражении (1) переменная величина $t = \omega \cdot \tau$ есть безразмерное время. Ряды для амплитуд гармоник (коэффициентов ряда Фурье) равны:

$$\begin{cases} c'_n(x_0, a) = 2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(n+m)!} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2m+n} \langle f(x_0) \rangle^{(2m+n)} \\ c''_n(x_0, a) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \Delta c(x_0)^{(p)} \cdot S_{p,n} \cdot \frac{h^p}{p!} \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $\langle f(x) \rangle = \frac{[f_-(x) + f_+(x)]}{2}$ – средняя кривая гистерезисной зависимости, $\langle f(x) \rangle^{(k)}$, $\Delta f(x)^{(k)}$ производная от $\langle f \rangle$ или от $\Delta f(x)$ по x порядка k , $\Delta f(x) = [f_-(x) - f_+(x)]$ – разностная кривая гистерезисной зависимости, $f_-(x)$ – ветвь гистерезисной зависимости для убывающего x , а $f_+(x)$ – возрастающего x ,

$$S_{p,n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{p!(n+p-2i-2)!!}{(p-i)!(p+n)!!}.$$

Здесь при $n = 2k, p = 2m + 1$, а при $n = 2k + 1, p = 2m$. Например, $S(p, 0) = 0$, $S(p, 1) = \frac{1}{p+1}$, $S(p, 2) = \frac{2}{p+2}$, $S(p, 3) = \frac{3p+1}{(p+1)(p+3)}$ и т. д. При получении выражений (1) и (2) предполагалось, что ветви $f_-(x)$ и $f_+(x)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями на интервале $(x_0 - a, x_0 + a)$. Для первой гармоники зависимости имеем следующие ряды:

$$c'_1(x_0, h) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+1)!} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{2m+1} \langle f(x_0) \rangle^{(2m+1)} \quad (3)$$

$$c''_1(x_0, h) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \Delta f(x_0)^{(2m)} \cdot \frac{a^{2m}}{(2m+1)!} \quad (4)$$

В отсутствие гистерезиса $\langle f(x) \rangle = f(x)$, а $\Delta f(x) = 0$. В этом случае $c''_n = 0$.

На рис. 1 для примера приведены различные кривые и ветви намагниченности для сверхпроводника второго рода, находящегося в критическом состоянии [7].

3. Дифференциальные уравнения для восстановления производной

Рассмотрим безгистерезисную зависимость $f(x)$. При достаточно малых значениях в (4) оставим три члена разложения:

$$c'_1 \approx a \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x_0} + \frac{a^3}{8} \cdot \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \Big|_{x_0} + \frac{a^5}{192} \cdot \frac{d^5 f(x)}{dx^5} \Big|_{x_0}. \quad (5)$$

Из формулы (5) следует линейное дифференциальное уравнение для восстановления производной $\frac{df}{dx}$ при известной зависимости первой гармоники $c'_1(x_0, a)$. Зависимость $c'_1(x_0, a)$ можно определить экспериментально, например, для исследования магнитных свойств материала – путем исследования спектра гармоник намагниченности при помещении образца в переменное магнитное поле амплитудой h и постоянное поле напряженностью H_0 . Таким образом, для малых фиксированных амплитуд a

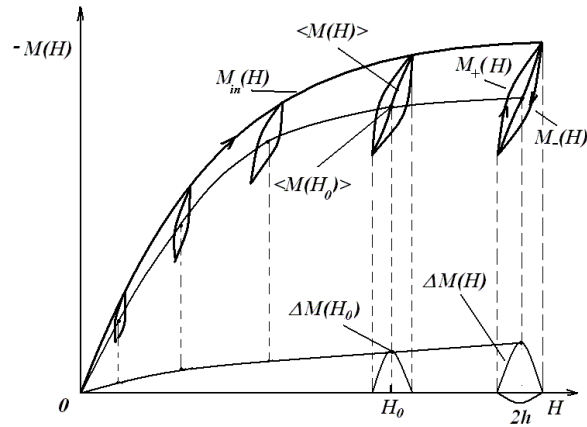


Рис. 1. $M_{in}(H)$ – начальная кривая намагниченности, $\langle M(H) \rangle$ – средняя кривая намагниченности, $\Delta M(H)$ – разностная кривая намагниченности, $M_-(H)$ – ветвь намагниченности в убывающем поле, $M_+(H)$ – ветвь намагниченности в возрастающем поле.

формула (5) превращается в линейное дифференциальное уравнение пятого порядка, которое сводится к уравнению четвертого порядка относительно $\frac{df}{dx}$. Для простоты введем обозначение $\frac{df}{dx} = Z$, тогда уравнение имеет вид:

$$\frac{d^4 z}{dx_0^4} + \frac{24}{a^2} \cdot \frac{d^2 z}{dx_0^2} + \frac{192}{a^4} \cdot Z = \frac{192}{a^5} \cdot c'_1(x_0, a). \quad (6)$$

При уменьшении амплитуд модуляции a можно уменьшить порядок уравнения на два:

$$\frac{d^2 z}{dx_0^2} + \frac{8}{a^2} \cdot Z = \frac{8}{a^3} \cdot c'_1(x_0, a). \quad (7)$$

В уравнениях (6) и (7) величина Z является производной исследуемой зависимости по величине статического воздействия x_0 . При увеличении амплитуды необходимо учитывать следующий член разложения (5) и т. д. Это приводит к увеличению порядка дифференциального уравнения на два.

Критерий точности восстановления $\frac{df}{dx}$ из уравнений (6) и (7) находится из следующего соотношения [3, 4]:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{a} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1) c'_{2m+1} \approx \frac{1}{a} [c'_1 - 3c'_3 + 5c'_5].$$

При $\left| \frac{3c'_3}{c'_1} \right| \sim 1$ и $\left| \frac{5c'_5}{c'_1} \right| \ll 1$ хорошую точность дает уравнение (7), при $\left| \frac{5c'_5}{c'_1} \right| \sim 1$ – уравнение (6). Ошибку восстановления можно оценить по формуле [4,6]:

$$\left| \frac{df}{dx} - \frac{1}{a} (c'_1 - 3c'_3 + 5c'_5) \right| < \frac{c'_7}{7a}.$$

При практическом восстановлении дифференциальной восприимчивости, кроме численного задания правой части уравнения (7) (экспериментально определенная

$c'_1(x_0, a)$) необходимо задавать начальные условия $Z(x_H)$ и $\frac{dZ(x_H)}{dx}$, т. е. поставить задачу Коши. В силу численного задания экспериментально определенной правой части уравнения (7) его необходимо решать численно путем сведения его к системе уравнений 2-го порядка. Определенную таким способом задачу Коши можно решать методом Рунге-Кутты 4-го порядка [8]. Другим методом решения уравнения (7) является использование аналитического решения, выраженного общим интегралом записанного в виде свертки с правой частью указанного уравнения [9]:

$$Z(x) = A \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{a}x\right) + B \sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{a}x\right) + \frac{2\sqrt{2}}{a^2} \int_{x_0}^x c'_1(x_0, a) \sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{a}(x - x_0)\right) dx_0. \quad (8)$$

Здесь A и B являются значениями постоянно определяемых начальных условий. Интеграл в правой части (8) в силу численного задания $c'_1(x_0, a)$ вычисляется численно. Рассмотрим развитую методику на примере зависимости средней кривой намагниченности, часто используемой для описания магнитных свойств тонкого сверхпроводящего диска, находящегося в критическом состоянии. Средняя намагниченность имеет вид [2]:

$$M(H) = -M_0 \cdot \exp\left(\frac{-|H|}{H^*}\right) \left[\sinh\left(\frac{H}{H^*}\right)\right]. \quad (9)$$

Первая гармоника намагниченности определялась по формуле:

$$M'_1(h, H_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M(H_0 + h \cdot \cos(t)) \cos(t) dt. \quad (10)$$

Вычисления производилось в системе MathCad. Результаты восстановления дифференциальной восприимчивости для $h = 0.5H^*$ приведены на рис. 2. Уравнение (7) сводилось к системе 2-х дифференциальных уравнений и решалось численно методом Рунге-Кутты. Величина магнитного поля выражена в единицах H^* , а X_c , X_d , и $M'_1(H, h)/h$ в единицах $X_d(0)$.

Из рис. 2 видно, что дифференциальная восприимчивость хорошо восстанавливается вдали от особенности, находящейся в нуле поля. Для улучшения результатов необходимо уменьшать h или увеличивать степень дифференциального уравнения: необходимо брать следующие члены ряда (4). Точность восстановления сильно зависит от выбора начальных условий $X_c(H_H)$ и $\frac{dX_c(H_H)}{dH}$. Для начала счета в качестве

$X_c(H_H)$ следует взять $\frac{M'_1(H_H)}{h}$. Таким образом, развитая методика восстановления на основе неоднородных дифференциальных уравнений позволяет определять производную зависимости. Рассмотренный метод восстановления можно применять для исследования нелинейных вольтамперных характеристик полупроводниковых структур и сверхпроводников, а также для исследования поляризации сегнетоэлектриков и имеет другие приложения.

Литература

1. Кузьмичев Н.Д. Поведение намагниченности поликристаллических образцов $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ в слабых магнитных полях // Письма в ЖТФ. 1991. Т.17, вып. 7. С. 56-60.

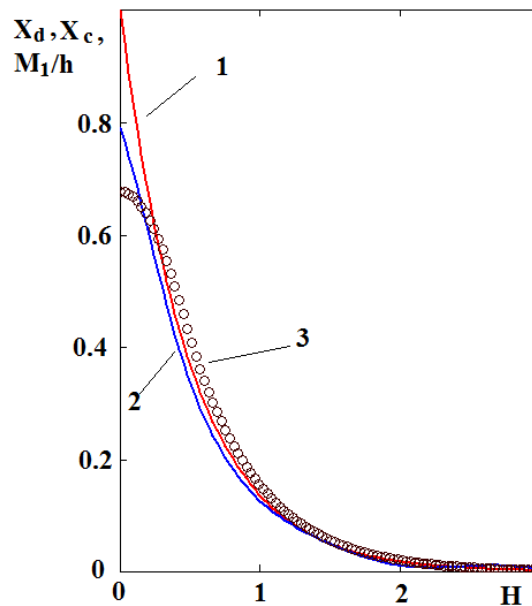


Рис. 2. Кривая 1 – дифференциальная восприимчивость X_d , кривая 2 – восстановленная восприимчивость X_c с помощью уравнения (7) из M'_1 в (10), кривая 3 – функция $\frac{M'_1(H, h)}{h}$.

2. Кузьмичев Н.Д. Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: Анализ спектра гармоники намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников // ЖТФ. 1994. Т.64, вып. 12. С. 63–74.
3. Кузьмичев Н.Д. Модуляционная методика восстановления исходных зависимостей и их производных в случае произвольных амплитуд модуляции // Письма в ЖТФ. 1994. Т.20, вып.22. С. 39-43.
4. Кузьмичев Н.Д. Оценки ошибок модуляционного восстановления функции отклика и ее производных // ЖТФ. 1997. 37, вып.7. С. 124-127.
5. Кузьмичев Н.Д., Васютин М.А., Шилкин Д.А. Экспериментальное определение производной вольтамперной характеристики нелинейной полупроводниковой структуры с помощью модуляционного Фурье-анализа // ФТП. 2016. Т.50, вып.6. С. 830-833.
6. Кузьмичев Н.Д. Применение рядов Тейлора-Фурье для численного и экспериментального определения производных изучаемой зависимости. // Журн. средневожского математического общества. 2011. Т.13. №2. С. 70 – 80.
7. Кузьмичев Н.Д., Васютин М.А., Шитов А.Ю., Бурьянов И.В. Дифференциальные уравнения для восстановления средней дифференциальной восприимчивости сверхпроводников из измерений первой гармоники намагниченности. // Журнал Средневожского математического общества. 2018. Т.20. №3. С. 327–335.

8. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы //М. «ФИЗМАТЛИТ», 2006. 399 с.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики.Т.2. //М. «Наука», 1974. 656 с.

MSC 34A30; 32A05; 82D55

Differential equations for recovery of dependence from its harmonics

N.D. Kuzmichev

National Research Mordovian State University

Abstract: The article presents non-homogeneous differential equations used for restoring the derivative of the experimentally studied dependence from its first harmonic. Based on the differential equations of the 2nd and 4th orders, an example of dependence recovery is considered. The solution of the Cauchy problem was carried out numerically by the Runge-Kutta method of the fourth order of accuracy.

Keywords: recovery of the derivative dependence, Fourier harmonics, inhomogeneous differential equation, Cauchy problem, Runge-Kutta method.

References

1. Kuzmichev N.D. Behavior of the magnetization of polycrystalline YBa₂Cu₃O_{7-x} samples in weak magnetic fields // Letters to ZhTF. 1991. V.17. No.7. P. 56–60.
2. Kuzmichev N.D. Hysteresis magnetization and generation of harmonics by magnetic materials: Analysis of the spectrum of magnetization harmonics on the example of high-temperature superconductors. // ZhTF. 1994. V.64, No.12. P. 63–74.
3. Kuzmichev N.D. Modulation technique for restoring the original dependences and their derivatives in the case of arbitrary modulation amplitudes // Letters to ZhTF. 1994. V.20, No.22. P. 39–43.
4. Kuzmichev N.D. Estimates of errors in the modulation recovery of the response function and its derivatives // ZhTF. 1997. 37. No.7. P. 124–127.
5. Kuzmichev N.D., Vasyutin M.A., Shilkin D.A. Experimental determination of the derivative of the current-voltage characteristic of a nonlinear semiconductor structure using modulation Fourier analysis //FTP. 2016. Vol.50, No.6. P. 830–833.
6. Kuzmichev N.D. Application of the Taylor-Fourier series for the numerical and experimental determination of the derivatives of the dependence under study //Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. T.13. No.2. P. 70–80.
7. Kuzmichev N.D., Vasyutin M.A., Shitov A.Yu., Buryanov I.V. Differential Equations for Reconstructing the Average Differential Susceptibility of Superconductors from Measurements of the First Harmonic of Magnetization // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2018. V.20. No.3. P. 327–335.
8. Formalev V.F., Reviznikov D.L. Numerical methods //M. "FIZMATLIT 2006. 399 p.
9. Smirnov V.I. Course of higher mathematics.T.2 // M. Science, 1974. 656 p.