УДК 517.956.223+517.575

Функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре

Карачик В.В.

Южно-Уральский государственный университет
(Национальный исследовательский университет)

Аннотация: В работе дается явное представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре.

Ключевые слова: задача Дирихле, полигармоническое уравнение, функция Грина.

1. Введение

Для решения краевых задач для однородных уравнений часто используют функцию Грина этих задач. Явный вид функций Грина для разных краевых задач представлен во многих работах. Например, явный вид функции Грина для 3-й краевой задачи был найден в работах [1-3], а функции Грина в секторе для бигармонического и 3-гармонического уравнений в работах [4,5]. Статьи [6-8] посвящены построению функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре, а в работе [9] находятся решения задач Дирихле и Неймана для однородного полигармонического уравнения. В [10-12] приведен явный вид функций Грина для бигармонического и 3-гармонического уравнений в единичном шаре. В связи с бигармоническим уравнением отметим недавние работы [13,14], посвященные условиям разрешимости некоторых нестандартных задач в шаре для бигармонического уравнения. В работе [15] на основании интегрального представления функций класса $u \in C^4(D) \cap C^3(\bar{D})$ даются интегральные представления решений задач Навье [16] и Рикье-Неймана [17] для бигармонического уравнения в единичном шаре, а также строятся функции Грина этих задач. В работах [18,19] эти результаты продолжаются на полигармоническое уравнение. Функция Грина применяется также и для исследования нелокальных уравнений. Например, в работе [20], исследована разрешимость четырех краевых задач для одного нелокального бигармонического уравнения с инволюцией. Отметим также некоторые недавно вышедшие работы по построению функции Грина различных краевых задач [21-24]. В настоящей работе, исследуется представление решений однородной задачи Дирихле для m-гармонического уравнения в единичном шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$

$$\Delta^m u(x) = f(x), \quad x \in S, \tag{1}$$

$$u|_{\partial S} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial S} = 0, \quad \ldots, \quad \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}\right|_{\partial S} = 0. \tag{2}$$

2. Фундаментальное решение

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда множество $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ можно разбить на два непересекающихся множества $\mathbb{N}_m = \{n \in \mathbb{N} : n > 2m > 1\} \cup (2\mathbb{N} + 1)$ и дополнение к нему

$\mathbb{N}_m^c = \{2, 4, \ldots, 2m\}$. Поскольку множество $\mathbb{N}_m^c$ – конечное, то $\mathbb{N}_m$ – бесконечное. Ясно, что $\mathbb{N}_{m-1}^c \subset \mathbb{N}_m^c$, а поэтому $\mathbb{N}_m \subset \mathbb{N}_{m-1}$. Рассмотрим фундаментальное решение m-гармонического уравнения $\Delta^m u = 0$ в виде

$$\mathcal{E}_{2m}(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^m |x-\xi|^{2m-n}}{(2-n,2)_m (2,2)_{m-1}}, & n \in \mathbb{N}_m, \\ \dfrac{(-1)^m |x-\xi|^{2m-n}}{(2-n,2)_m^* (2,2)_{m-1}} \left(\ln|x-\xi| - \sum\limits_{k=1}^{m-n/2} \dfrac{1}{2k} \right), & n \in \mathbb{N}_m^c. \end{cases}$$

Здесь $(a,b)_k = a(a+b)\ldots(a+kb-b)$ – обобщенный символ Похгаммера с соглашением $(a,b)_0 = 1$, а символ $(a,b)_k^*$ - означает, что если среди сомножителей $a, (a+b), \ldots (a+kb-b)$, входящих в $(a,b)_k$, есть 0, то его следует заменить на 1, например, $(-2,2)_3^* = (-2)\cdot 1 \cdot 2 = -4$. Кроме того, если в сумме, входящей в (3) верхний индекс становится меньше нижнего, то сумма считается равной нулю.

Замечание 3. *Фундаментальное решение $\mathcal{E}_{2m}(x,\xi)$ незначительно отличается от фундаментального решения полигармонического уравнения $G_{m,n}(x)$ рассматриваемого С.Л. Соболевым в [25]. При $n \in \mathbb{N}_m$ отличие в множителе $(-1)^m$, а при $n \in \mathbb{N}_m^c$ различие более заметно: вместо $\ln(C|x|)$, как у Соболева, берется выражение $\ln|x| - \sum\limits_{k=1}^{m-n/2} \frac{1}{2k}$. Введем обозначение $\mathcal{E}_{2m}^*(x,\xi) = \mathcal{E}_{2m}\left(\frac{x}{|x|} - |x|\xi\right)$.*

Лемма 1. *Симметричная функция $\mathcal{E}_{2m}(x,\xi)$ является m-гармонической по $x \in S$ при $x \neq \xi$. Симметричная функция $\mathcal{E}_{2m}^*(x,\xi)$ является m-гармонической по $x \in S$ при $\xi \in \bar{S}$.*

Замечание 4. *В работе [19] использовалось элементарное решение полигармонического уравнения $E_{2m}(x,\xi)$, которое связано с функцией $\mathcal{E}_{2m}(x,\xi)$ равенством*

$$E_{2m}(x,\xi) = \begin{cases} \mathcal{E}_{2m}(x,\xi), & n \in \mathbb{N}_m \\ \mathcal{E}_{2m}(x,\xi) - \dfrac{(-1)^m |x-\xi|^{2m-n}}{(2-n,2)_m^* (2,2)_{m-1}} \sum\limits_{k=n/2}^{m-1} \dfrac{1}{2k}, & n \in \mathbb{N}_m^c \end{cases}.$$

Такая функция $E_{2m}(x,\xi)$ обладает свойством $\Delta_x E_{2m}(x,\xi) = -E_{2m-2}(x,\xi)$ при $x \neq \xi$. Это равенство применялось при построении функции Грина задачи Рикье-Неймана.

3. Функция Грина

Теперь мы можем получить представление функции Грина задачи Дирихле (1)-(2). Введем оператор $\Lambda u(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_{x_i}$.

Теорема 1. *Функция Грина $G_{2m}(x,\xi)$ задачи Дирихле (1)-(2) при $n \geq 2$ и $m \in \mathbb{N}$ может быть записана в виде*

$$G_{2m}(x,\xi) = \mathcal{E}_{2m}(x,\xi) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(|x|^2-1)^k (|\xi|^2-1)^k}{(2m-2,-2)_k (2,2)_k} \mathcal{E}_{2m-2k}\Big(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\Big). \tag{3}$$

Функция $G_{2m}(x,\xi)$ является m-гармонической по $x \in S$, $x \neq \xi \in \bar{S}$ и удовлетворяет равенствам

$$G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S} = 0,\ \frac{\partial G_{2m}(x,\xi)}{\partial \nu}|_{x\in\partial S} = 0, \ldots, \frac{\partial^{m-1} G_{2m}(x,\xi)}{\partial \nu^{m-1}}|_{x\in\partial S} = 0,\ \xi \in S.$$

Замечание 5. *При $n = 2$, в соответствии с [10, теорема 2.3], функция Грина имеет вид*

$$G_4(x,\xi) = E_4(x,\xi) - E_4^*(x,\xi) - \frac{(|x|^2-1)(|\xi|^2-1)}{4}\Big(E_2^*(x,\xi) + \frac{1}{2}\Big). \tag{4}$$

Формула (4) совпадает с (3). Действительно, поскольку $\mathbb{N}_2^c = \{2,4\}$, а $\mathbb{N}_1^c = \{2\}$, то в силу замечания 2 имеем

$$E_2(x,\xi) = \mathcal{E}_2(x,\xi),\ E_4(x,\xi) = \mathcal{E}_4(x,\xi) - \frac{|x-\xi|^2}{(0,2)_2^*(2,2)_1}\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{2k} = \mathcal{E}_4(x,\xi) - \frac{|x-\xi|^2}{8}.$$

Подставляя эти значения в (4) получим формулу (3)

$$G_4(x,\xi) = \mathcal{E}_4(x,\xi) - \frac{|x-\xi|^2}{8} - \mathcal{E}_4^*(x,\xi) + \frac{\left|\dfrac{x}{|x|} - |x|\xi\right|^2}{8} -$$
$$\frac{(|x|^2-1)(|\xi|^2-1)}{4}\Big(\mathcal{E}_2^*(x,\xi) + \frac{1}{2}\Big) = \mathcal{E}_4(x,\xi) - \mathcal{E}_4^*(x,\xi) - \frac{(|x|^2-1)(|\xi|^2-1)}{4}\mathcal{E}_2^*(x,\xi).$$

При $m = 3$ и $n = 4$ имеем $2 \in \mathbb{N}_2^c$. В этом случае в [12, теорема 2] также было получено представление функции Грина, которое тоже совпадает с формулой (3).

4. Полиномиальная правая часть

Рассмотрим простейший частный случай полиномиальной правой части уравнения (1).

Теорема 2. *Пусть в уравнении (1) $f(x) = |x|^{2l}H_k(x)$, где $H_k(x)$ – однородный гармонический полином степени $k \in \mathbb{N}_0$, $l \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$. Тогда решение задачи Дирихле (1)-(2) имеет вид*

$$u(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n}\int_{|\xi|<1} G_{2m}(x,\xi)|x|^{2l}H_k(\xi)\,d\xi =$$
$$= \left(|x|^{2l+2m} - \sum_{i=0}^{m-1}\begin{pmatrix} l+m \\ i \end{pmatrix}(|x|^2-1)^i\right)\frac{H_k(x)}{(2l+2,2)_m(2l+2k+n,2)_m},$$

где $(a,b)_m$ – обобщенный символ Похгаммера.

Литература

1. Begehr H., Vaitekhovich T. Modified harmonic Robin function // Complex Variables and Elliptic Equations. 2013. Vol.58. No.4. P. 483-496.

2. Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle // Adv. Pure Appl. Math. 2015. Vol.6. No.3. P. 163-172.

3. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. On Green's function of the Robin problem for the Poisson equation // Advances in Pure and Applied Mathematics. 2019. Vol.10. No.3. P. 203-214.

4. Ying Wang, Liuqing Ye. Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector // Complex Variables Elliptic Equ. 2013. Vol.58. No.1. P. 7-22.
5. Ying Wang. Tri-harmonic boundary value problems in a sector // Complex Variables Elliptic Equ. 2014. Vol.59. No.5. P. 732-749.
6. Boggio T. Sulle funzioni di Green d'ordine m // Palermo Rend. 1905. Vol.20. P. 97-135.
7. Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Var. Elliptic Equ. 2008. Vol.53. P. 177-183.
8. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. О новом методе построения функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2012. Т.48, № 3. С. 435-438.
9. Karachik V.V. Dirichlet and Neumann boundary value problems for the polyharmonic equation in the unit ball // Mathematics. 2021. Vol.9. No.16. 1907.
10. Karachik V.V. Greens function of Dirichlet problem for biharmonic equation in the ball // Complex Variables and Elliptic Equations. 2019. Vol.64. No.9. P. 1500-1521.
11. Карачик В.В. О функции Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т.59. № 1. С. 71-86.
12. Карачик В. В. Функция Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре // Матем. заметки. 2020. Т.107. № 1. С. 87-105.
13. Карачик В. В., Торебек Б. Т. О задаче Дирихле-Рикье для бигармонического уравнения // Матем. заметки. 2017. Т.102. № 1. С. 39-51.
14. Карачик В.В. Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения // Математические труды. 2016. Т.19. № 2. С. 86-108.
15. Карачик В.В. Функции Грина задач Навье и Рикье-Неймана для бигармонического уравнения в шаре // Дифференциальные уравнения. 2021. Т.57. № 5. С. 673-686.
16. Sweers G. A survey on boundary conditions for the biharmonic // Complex Variables and Elliptic Equations. 2009. Vol.54. P. 79-93.
17. Карачик В.В. Задача Рикье-Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Дифференциальные уравнения. 2018. Т.54. № 5. С. 653-662.
18. Karachik V.V. The Green function of the Navier problem for the polyharmonic equation in a ball // Journal of mathematical sciences. 2023. Vol.269. No.2. P. 189-204.
19. Karachik V.V. Riquier-Neumann problem for the polyharmonic equation in a ball // Mathematics. 2023. Vol.11. No.4. 1000.
20. Karachik V., Turmetov B., Yuan H. Four Boundary Value Problems for a Nonlocal Biharmonic Equation in the Unit Ball // Mathematics. 2022. Vol.10. No.7. 1158 p.

21. Begehr H., Burgumbayeva S., Shupeyeva B. Remark on Robin problem for Poisson equation // Complex Variables and Elliptic Equations. 2017. Vol.62. No.10. P. 1589-1599.

22. Akel M., Begehr H. Neumann function for a hyperbolic strip and a class of related plane domains // Mathematische Nachrichten. 2017. Vol.290. No.4. P. 490-506.

23. Lin H. Harmonic Green and Neumann functions for domains bounded by two intersecting circular arcs // Complex Variables and Elliptic Equations. 2020. Vol.67. P. 79-95.

24. Begehr H., Burgumbayeva S., Dauletkulova A., Lin H. Harmonic Green functions for the Almaty apple // Complex Variables and Elliptic Equations. 2020, Vol.65. No.11. P. 1814-1825.

25. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

MSC 31B30

The Green's function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in a ball

V.V. Karachik

South Ural State University (NRU)

Abstract: The paper gives an explicit representation of the Green's function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in the unit ball.

Keywords: Dirichlet problem, polyharmonic equation, Green's function.

References

1. Begehr H., Vaitekhovich T. Modified harmonic Robin function // Complex Variables and Elliptic Equations, 2013. Vol.58. No.4. P. 483-496.

2. Sadybekov M. A., Torebek B. T., and Turmetov B. Kh. On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle // Adv. Pure Appl. Math. 2015. Vol.6 No.3. P. 163-172.

3. Karachik V. V., Turmetov B. Kh. On Green's function of the Robin problem for the Poisson equation // Advances in Pure and Applied Mathematics. 2019. Vol.10. No.3. P. 203-214.

4. Ying Wang, Liuqing Ye. Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector // Complex Variables Elliptic Equ. 2013. Vol.58. No.1. P. 7-22.

5. Ying Wang. Tri-harmonic boundary value problems in a sector // Complex Variables Elliptic Equ. 2014. Vol.59. No.5. P. 732-749.

6. Boggio T. Sulle funzioni di Green d'ordine m // Palermo Rend. 1905. Vol.20. P. 97-135.

7. Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Var. Elliptic Equ, 2008. Vol.53. P. 177-183.

8. Kal'menov T.Sh., Suragan D. On a new method for constructing the Green function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation // Differential Equations. 2012. Vol.48. No.3. P. 441-445.

9. Karachik V.V. Dirichlet and Neumann boundary value problems for the polyharmonic equation in the unit ball // Mathematics. 2021. Vol.9. No.16. 1907.

10. Karachik V.V. Greens function of Dirichlet problem for biharmonic equation in the ball // Complex Variables and Elliptic Equations. 2019. Vol.64. No.9. P. 1500-1521.

11. Karachik V.V. The Green Function of the Dirichlet Problem for the Biharmonic Equation in a Ball // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. Vol.59. P. 66-81.

12. Karachik V.V. The Green Function of the Dirichlet Problem for the Triharmonic Equation in the Ball // Mathematical Notes. 2020. Vol.107. P. 105-120.

13. Karachik V.V., Torebek B.T. On the Dirichlet-Riquier problem for biharmonic equations // Mathematical Notes. 2017. Vol.102. P. 31-42.

14. Karachik V.V. A Neumann-type problem for the biharmonic equation // Siberian Advances in Mathematics. 2017. Vol.27. P. 103-118.

15. Karachik, V.V. Green's Functions of the Navier and Riquier-Neumann Problems for the Biharmonic Equation in the Ball // Differential Equations. 2021. Vol.57. No.5. P. 654-668.

16. Sweers G. A survey on boundary conditions for the biharmonic // Complex Variables and Elliptic Equations. 2009. Vol.54. P. 79-93.

17. Karachik V.V. Riquier-Neumann Problem for the Polyharmonic Equation in a Ball // Differential equations. 2018. Vol.54. P. 648-657.

18. Karachik V.V. The Green function of the Navier problem for the polyharmonic equation in a ball // Journal of mathematical sciences. 2023. Vol.269. No.2. P. 189-204.

19. Karachik V.V. Riquier-Neumann problem for the polyharmonic equation in a ball // Mathematics. 2023. Vol.11. No.4. 1000.

20. Karachik V., Turmetov B., Yuan H. Four Boundary Value Problems for a Nonlocal Biharmonic Equation in the Unit Ball // Mathematics. 2022. Vol.10. No.7. P. 1158.

21. Begehr H., Burgumbayeva S., Shupeyeva B. Remark on Robin problem for Poisson equation // Complex Variables and Elliptic Equations. 2017. Vol.62. No.10. P. 1589-1599.

22. Akel M., Begehr H. Neumann function for a hyperbolic strip and a class of related plane domains // Mathematische Nachrichten. 2017. Vol.290. No.4. P. 490-506.

23. Lin H. Harmonic Green and Neumann functions for domains bounded by two intersecting circular arcs // Complex Variables and Elliptic Equations. 2020. Vol.67. P. 79-95.

24. Begehr H., Burgumbayeva S., Dauletkulova A., Lin H. Harmonic Green functions for the Almaty apple // Complex Variables and Elliptic Equations. 2020, Vol.65. No.11. P. 1814-1825.

25. Sobolev S.L. Cubature Formulas and Modern Analysis: An Introduction. Nauka, Moscow, 1974; Gordon and Breach, Montreux, 1992.