

УДК 532.591

## Математическое моделирование динамических процессов в непрерывной электропроводящей среде

Казанков В.К.<sup>1</sup>, Перегудин С.И.<sup>2</sup>, Холодова С.Е.<sup>1</sup>

Университет ИТМО<sup>1</sup>,  
Санкт-Петербургский государственный университет<sup>2</sup>

*Аннотация:* Представлена математическая модель, описывающая динамику геофизических процессов в электропроводящей несжимаемой жидкости, ограниченной свободной и твёрдой непроницаемой поверхностями с учетом эффектов диффузии магнитного поля, гравитации и силы Кориолиса. Математическая модель строится на основе решения краевой магнитогидродинамической задачи для уравнений в частных производных, учитывающей эффекты длинных волн малой амплитуды. Посредством соответствующих преобразований система дифференциальных уравнений векторного типа в частных производных может быть приведена к одному скалярному уравнению для модифицированной функции возмущения свободной поверхности океана. Проведённый математический анализ представленной модели, используемой для исследования магнитогидродинамических процессов в океане северного полушария, демонстрирует возникновение явления инверсии индуцированного магнитного поля.

*Ключевые слова:* магнитная гидродинамика, геофизика, океан, электропроводящая жидкость, несжимаемая жидкость, математическое моделирование, инверсия магнитного поля.

### 1. Введение

Мировой океан играет огромную роль в жизни человечества, поэтому задача определения характеристик динамики морской среды является важной проблемой комплекса океанологических исследований. Поскольку в океане, обладающем относительно малой проводимостью и находящемся в земном магнитном поле, проявляются такие магнитогидродинамические эффекты, как изменения магнитного поля Земли морскими течениями, возникает возможность определения гидродинамических параметров течений и волн по индуцированному ими магнитному полю. Поэтому знания о характере индуцированного магнитного поля могут способствовать получению информации о динамике морской среды, параметрах волнового источника, физических характеристиках морских пород, в частности, электрической проводимости, что и указывает на актуальность изучения морских магнитных полей для океанологических и морских геологических исследований динамических процессов в геосредах. Представленное исследование посвящено теоретическому изучению динамики магнитных полей, индуцированных крупномасштабными гидродинамическими волновыми возмущениями, а именно, рассматривается модель океана, основанная на задаче магнитной гидродинамики, которая в приближении длинных волн малой амплитуды редуцируется к интегрированию одного скалярного уравнения для модифицированной функции, описывающей возмущение свободной поверхности жидкого слоя [1–5]. В работах [5, 6] проведены качественные и численные исследования геофизических процессов во вращающейся электропроводящей жидкости с учётом топографических

особенностей и диссипативных факторов диффузии магнитного поля, а также представлен анализ и способ определения параметров источников гидродинамических возмущений в зависимости от магнитного числа Рейнольдса.

В работе [6] в рамках кинематической теории динамо проводится моделирование инверсий магнитного поля галактического диска с использованием планарного приближения, учитывающего, что галактический диск достаточно тонкий. Возникает интерес к выяснению возможности существования инверсий магнитного поля морской среды, что и проводится в данном исследовании, причём при построении соответствующей модели используется не только уравнение индукции магнитного поля, но и полная система трёхмерных магнитогидродинамических уравнений.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим вращающийся слой идеальной несжимаемой электропроводящей жидкости, ограниченной сверху свободной поверхностью  $z = h_B(x, y, t)$ , снизу – твердой непроницаемой поверхностью  $z = Z(x, y)$ . Используя прямоугольную декартову систему координат, под объемной силой будем понимать вектор, перпендикулярный невозмущенной поверхности и направленный в сторону, противоположную вертикальной оси. Полагая, что ось вращения жидкости совпадает с вертикальной осью, динамика исследуемой сплошной среды будет определяться решением системы дифференциальных уравнений с частными производными [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - 2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}] - \mathbf{g}z + \frac{1}{\mu\rho} [\text{rot } \mathbf{b}, \mathbf{b}],$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \text{rot } [\mathbf{b}, \mathbf{v}] + \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \mathbf{b}, \quad \text{div } \mathbf{b} = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

с граничными условиями на поверхностях  $z = h_B(x, y, t)$ ,  $z = Z(x, y)$ :

$$v_z(x, y, Z, t) = v_x \frac{\partial Z}{\partial x} + v_y \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad v_z(x, y, h_B, t) = \frac{\partial h_B}{\partial t} + v_x \frac{\partial h_B}{\partial x} + v_y \frac{\partial h_B}{\partial y},$$

$$b_z(x, y, h_B, t) = b_{z0}(x, y, t), \quad b_z(x, y, Z, t) = b_{z0}^{(e)}(x, y, t), \quad p(x, y, h_B, t) = p_0, \quad \mathbf{b}(x, y, h_B, t) = \mathbf{b}_0,$$

где  $v$  – скорость жидкости,  $p$  – давление,  $h_B$  – свободная океаническая поверхность слоя, вращающегося со скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $g$  – величина ускорения силы тяжести,  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{b}$  – вектор индукции магнитного поля,  $\mu$  – магнитная проницаемость,  $\sigma$  – электропроводность среды,  $b_{z0}$ ,  $b_{z0}^{(e)}$  – известные функции,  $p_0$  и  $\mathbf{b}_0$  – заданные константы.

В приближении длинных волн малой амплитуды решение изначальной краевой задачи сводится к решению уравнения

$$\mathcal{D} (\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2) \left( \left( \mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) - \frac{\mathcal{D}^2}{\mu\rho} \right) \Delta_2 \xi = \frac{b_{z0}^{(e)} - b_{z0}}{(\mu\rho)^2 H_0}$$

для некоторой модифицированной функции возмущения свободной поверхности жидкости  $\xi$ , существование решения которого в виде гармонической волны

$$\xi = \text{Im} (A \exp (i(kx + ly - \sigma t)))$$

обосновано в работе [3] как для конечных, так и бесконечного значений магнитного числа Рейнольдса, причём частота волновых возмущений  $\sigma$  является решением дисперсионного уравнения

$$P_n(\sigma) = \sum_{k=0}^n c_k \sigma^k,$$

где  $c_k \in \mathcal{C}$  определяются из соотношений для физических величин.

### 3. Моделирование

В работе [4] рассматривается метод и представляется алгоритм решения дисперсионного уравнения, созданный на основе машинного обучения и итерационного численного метода, что позволило провести анализ эволюции магнитогидродинамических характеристик в зависимости от магнитного числа Рейнольдса [5]. Примем далее значения волновых чисел  $k = l = 1$ , а проекции внешнего магнитного поля на оси  $x$  и  $y$  –  $b_{0x} = 0$  и  $b_{0y} = 1$  соответственно. Тогда с учётом представленных в работе [5] результатов компоненты вектора скорости примут вид

$$\begin{aligned} v_x &= \sigma(\eta + \tilde{b}_x) + i\alpha(\eta + \tilde{b}_y), & v_y &= \sigma(\eta + \tilde{b}_y) - i\alpha(\eta + \tilde{b}_x), \\ v_z &= \left( -\frac{b\sigma}{gH_0}(\sigma^2 + \alpha^2)\eta + v_z \frac{\partial H_0}{\partial x} + v_y \frac{\partial H_0}{\partial y} \right) (z - Z) + v_x \frac{\partial Z}{\partial x} + v_y \frac{\partial Z}{\partial y}, \end{aligned}$$

где  $H_0$  – функция невозмущенной глубины, а функции  $\eta, \tilde{b}_x, \tilde{b}_y$  имеют следующее представление:

$$\begin{aligned} \eta &= \left( \alpha^2 + \left( \mu\rho(\alpha^2 - \sigma^2) \left( -i\sigma + \frac{2\alpha^2}{R_m} \right) \right)^2 \right) \xi, \\ \begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\alpha^2 - \sigma^2) \left( \mu\rho(\alpha \cdot i\sigma) \left( -i\sigma + \frac{2}{R_m} \right) + 1 \right) \xi \\ (\alpha^2 - \sigma^2) \left( \mu\rho(\alpha \cdot i\sigma) \left( i\sigma - \frac{2}{R_m} \right) + 1 \right) \xi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Компоненты вектора магнитной индукции выражаются посредством модифицированной функции возмущения свободной поверхности жидкости следующим образом:

$$\begin{aligned} b_x &= \mu\rho(\alpha^2 - \sigma^2)^2 \left( \mu\rho(\alpha \cdot i\sigma) \left( -i\sigma + \frac{2}{R_m} \right) + 1 \right) \xi, \\ b_y &= \mu\rho(\alpha^2 - \sigma^2)^2 \left( \mu\rho(\alpha \cdot i\sigma) \left( i\sigma - \frac{2}{R_m} \right) + 1 \right) \xi, \\ b_z &= i(h_B - Z)(b_x + b_y). \end{aligned}$$

Графическая визуализация проведенного вычислительного эксперимента позволяет утверждать, что динамический процесс имеет выраженную периодическую структуру, при этом через регулярный промежуток времени происходит резкая смена направления течения силовых линий. Это явление, как правило, регистрируется в тонком слое, прилегающем к границе подобластей с разными знаками векторного поля магнитной индукции. Именно в этом пограничном слое градиент поля имеет большое значение и меняет знак. В теории нелинейных параболических уравнений математической физики решения, обладающие такими свойствами, принято называть

контрастными структурами [7]. Подобное поведение магнитного поля описывается, например, в работе [6], где рассматривается кинематическая модель, представляющая структуру планарного галактического магнитного поля, в которой также возникает инверсия магнитного поля. Анализ построенной математической модели также демонстрирует существование у векторного поля магнитной индукции особых точек двух типов, а именно, узла и седла, причем узел, будучи устойчивым в некоторый момент времени, переходит с течением времени в неустойчивое состояние.

#### **4. Заключение**

В представленном исследовании предложена математическая модель воспроизведения магнитогидродинамических процессов в океане северного полушария. Продемонстрирован аналитический вид поля скорости и поля магнитной индукции. Проведенный анализ результатов математического моделирования эволюции магнитного поля демонстрирует возникновение явления инверсии индуцированного магнитного поля с некоторой периодичностью. Результаты и методы представленных исследований могут быть использованы с целью определения магнитогидродинамических характеристик океана и морской среды, для оценки параметров источника волнений по имеющейся информации об электромагнитном поле, индуцированном соответствующим гидродинамическим волновым возмущением, содержащему знания о физических характеристиках шельфовой зоны, что является важным аспектом знаний для морских геологоразведочных изысканий и исследований. Представленные исследования могут позволить решать многие технические проблемы гидрофизики, связанные, например, с навигацией подводных аппаратов, поиском полезных ископаемых на морском дне, изучением электромагнитных явлений в океане с возможным установлением их взаимосвязи с динамическими процессами, протекающими в геофизических средах.

#### **Литература**

1. Peregudin S., Peregudina E., Kholodova S. On integration of the system of MHD equations modeling wave processes in a rotating liquid with arbitrary magnetic Reynolds number // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1268. No 1. P. 012055.
2. Peregudin S., Peregudina E., Kholodova S. The influence of dissipative effects on dynamic processes in a rotating electrically conductive liquid medium // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1359. No 1. P. 012118.
3. Холодова С. Е. Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой жидкости // *Вычислительная математика и математическая физика*. 2008. Т. 48. No 5. 882–898.
4. Казанков В. К., Холодова С. Е. Исследование и анализ уравнения теории идеальной несжимаемой электропроводящей жидкости // *Процессы управления и устойчивость*. 2021. Т. 8. No 1. 131-137.
5. Холодова С. Е., Казанков В. К., Перегудин С. И. Математический и численный анализ динамических процессов в электропроводящей сплошной среде // *Процессы в геосредах*. 2021. Т. 30. No 4. 1345-1356.

6. Андреасян Р. Р., Михайлов Е. А., Андреасян А. Р. Структура и особенности формирования инверсий галактического магнитного поля // *Астрономический журнал*. 2020. Т. 97. No 3. 179-189.
7. Бутузов В. Ф. О сингулярно возмущенных системах типа реакция-диффузия-перенос // *Дифференциальные уравнения*. 1993. Т. 29. No 5. 833-845.

MSC 34D20

## Mathematical modeling of dynamic processes in a continuous electrically conductive medium

S.K. Kazankov<sup>1</sup>, S.I. Peregudin<sup>2</sup>, S.E. Kholodova<sup>1</sup>  
University IFMO<sup>1</sup>, Saint-Petersburg State University<sup>2</sup>

*Abstract:* A mathematical model describing the dynamics of geophysical processes in an electrically conductive incompressible fluid bounded by free and solid impermeable surfaces is presented, taking into account the effects of magnetic field diffusion, gravity and Coriolis force. The mathematical model is based on the solution of the boundary magnetohydrodynamic problem for partial differential equations, taking into account the effects of long waves of small amplitude. By means of appropriate transformations, the system of differential equations of vector type and partial derivatives can be reduced to one scalar equation for the modified function perturbation of the free surface of the ocean. The mathematical analysis of the presented model used to study magnetohydrodynamic processes in the ocean of the northern hemisphere demonstrates the occurrence of the phenomenon of inversion of the induced magnetic field.

*Keywords:* magnetic hydrodynamics, geophysics, ocean, electrically conductive fluid, incompressible fluid, mathematical modeling, magnetic field inversion.

### References

1. Peregudin S., Peregudina E., Kholodova S. On integration of the system of MHD equations modeling wave processes in a rotating liquid with arbitrary magnetic Reynolds number // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1268. No 1. P. 012055.
2. Peregudin S., Peregudina E., Kholodova S. The influence of dissipative effects on dynamic processes in a rotating electrically conductive liquid medium // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1359. No 1. P. 012118.
3. Kholodova S. E. Dynamics of a rotating layer of an ideal electrically conductive incompressible fluid // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. V. 48. No 5. 882–898.
4. Kazankov V. K., Kholodova S. E. Investigation and analysis of the equation of the theory of an ideal incompressible electrically conductive fluid (in Russian) // Management processes and sustainability. 2021. T. 8. No 1. 131-137.
5. Kholodova S. E., Kazankov V. K., Peregudin S. I. Mathematical and numerical analysis of dynamic processes in an electrically conductive continuous medium // Processes in geomediuns. 2021. V. 30. No 4. 1345-1356.
6. Andreyan R. R., Mikhailov E. A., Andreyan A. R. Structure and features of formation of galactic magnetic field inversions // Astronomical Journal. 2020. V. 97. No 3. 179-189.
7. Butuzov V. F. On singularly perturbed reaction-diffusion-transfer systems // Differential equations. 1993. V. 29. No 5. 833-845.