

УДК 517.9:539.3

## Асимптотический анализ математической модели системы «трубопровод – датчик давления»\*

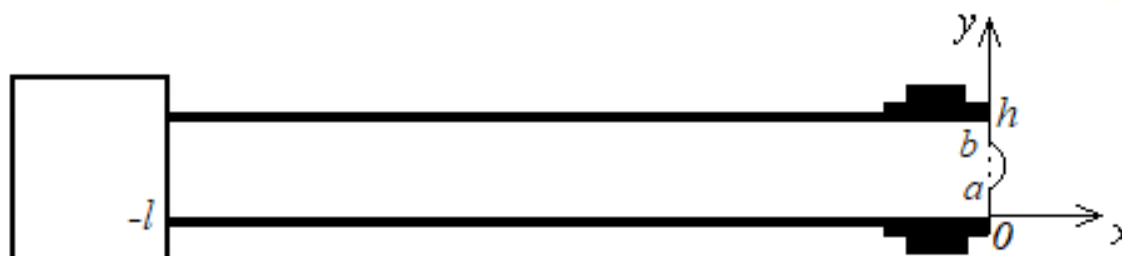
Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А., Алексанин Н.Д., Анкилов Г.А.

Ульяновский государственный технический университет

*Аннотация:* В статье рассматриваются математические модели механической системы «трубопровод – датчик давления», предназначенные для контроля давления рабочей среды в камерах сгорания двигателей. Получены асимптотические уравнения, описывающие совместную динамику упругого чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе. Разработаны методы решения соответствующих начально-краевых задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными.

*Ключевые слова:* датчик, упругий элемент, трубопровод, динамика, дифференциальные уравнения.

Пусть на одном конце трубопровода задан закон изменения давления рабочей среды (например, на выходе из камеры сгорания двигателя), а на другом расположен датчик [1, 2], предназначенный для измерения этого давления и содержащий в качестве составной части чувствительный упругий элемент в виде пластины (рис. 1)



**Рис. 1.** Схема механической системы «трубопровод – датчик давления».

Рассмотрим математическую постановку задачи, соответствующую модели системы «трубопровод – датчик давления» с учетом сжимаемости рабочей среды:

$$\Phi_{tt} + 2\Phi_x\Phi_{xt} + 2\Phi_y\Phi_{yt} + \Phi_x^2\Phi_{xx} + 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + \Phi_y^2\Phi_{yy} = a_0^2(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}), \quad x, y \in G, \quad (1)$$

$$\Phi_y(x, 0, t) = \Phi_y(x, h, t) = 0, \quad x \in (-l, 0), \quad (2)$$

$$\Phi_x - \Phi_y w_y = w_t, \quad x = w(y, t), \quad y \in (a, b), \quad (3)$$

$$\Phi_x(0, y, t) = 0, \quad y \in (0, a) \cup (b, h) \quad (4)$$

$$L(w(y, t)) = P - \bar{P}, \quad x = w(y, t), \quad y \in (a, b), \quad (5)$$

$$P(-l, y, t) = \tilde{P}(y, t), \quad y \in (0, h). \quad (6)$$

\*Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда №23-21-00517

В (1)-(6)  $x, y$  – декартовы координаты;  $t$  – время;  $\Phi(x, y, t)$  – потенциал скорости рабочей среды (газа или жидкости);  $w(y, t)$  – поперечная деформация (прогиб) упругого элемента датчика, занимающего в недеформированном состоянии положение  $x = 0, a < y < b$ ;  $\tilde{P}(y, t)$  – закон изменения давления на выходе  $x = -l$  из камеры сгорания двигателя (на левом конце трубопровода);  $\bar{P}$  – внешнее воздействие (например, давление окружающей среды);  $G$  – область в трубопроводе и в полости датчика, занятая рабочей средой. Давление  $P(x, y, t)$ , плотность  $\rho(x, y, t)$ , скорость звука  $a(x, y, t)$  в рабочей среде выражаются через потенциал скорости из интеграла Лагранжа-Коши

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\chi-1}{\chi}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\chi-1} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = 1 - \frac{\chi-1}{a_0^2} \left(\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_x^2 + \frac{1}{2}\Phi_y^2\right), \quad (7)$$

где индекс 0 соответствует параметрам рабочей среды в состоянии покоя. Дифференциальный (интегро-дифференциальный) оператор  $L(w(y, t))$  в уравнении (5), который описывает динамику упругого элемента, можно задать различным способом в зависимости от выбранной модели твердого деформируемого тела, например

$$L(w(y, t)) = L^*(w(y, t)) \equiv m\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \beta\dot{w}'''' + f(w, \dot{w}), \quad (8)$$

$$L(w(y, t)) \equiv L^*(w(y, t)) - w'' \left( \mu \int_a^b w'^2(y, t) dy + \eta \frac{d}{dt} \int_a^b w'^2(y, t) dy \right), \quad (9)$$

$$L(w(y, t)) \equiv m\ddot{w} + \left[ Dw'' \left( 1 - \frac{3}{2}w'^2 \right) \right]'' + Nw'' + \beta\dot{w}'''' + f(w, \dot{w}), \quad (10)$$

$$L(w(y, t)) \equiv mw_{tt} + \left[ Dw_{yy} \left( 1 - \frac{3}{2}w_y^2 \right) \right]_{yy} + Nw_{yy} + \beta \left[ Dw_{yy} \left( 1 - \frac{3}{2}w_y^2 \right) \right]_{yyt} + f(w, w_t), \quad (11)$$

$$L(w(y, t)) \equiv mw_{tt} + D \left( \frac{w_{yy}}{(1+w_y^2)^{3/2}} \right)_{yy} + \beta \left( \frac{w_{yy}}{(1+w_y^2)^{3/2}} \right)_{yyt} + Nw_{yy} + f(w, w_t), \quad (12)$$

$$L(w(y, t)) \equiv -EF \left[ w' \left( u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) \right]' + m\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \beta\dot{w}'''' + f(w, \dot{w}). \quad (13)$$

Математическую модель с использованием оператора (13) следует дополнить уравнением

$$-EF \left( u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)' + m\ddot{u} + g(u, \dot{u}) = 0. \quad (14)$$

В (8)-(14)  $u(y, t)$  – продольная деформация упругого элемента;  $m, D$  – погонная масса и изгибная жесткость упругого элемента датчика, представляющего собой деформируемую пластину и расположенного на правом конце трубопровода;  $N$  – сжимающее (растягивающее) элемент усилие;  $\beta, \eta$  – коэффициенты внутреннего демпфирования (материала элемента);  $\mu$  – коэффициент, зависящий от прочностных и геометрических характеристик элемента и типа его закрепления;  $E$  – модуль упругости материала элемента;  $F$  – площадь поперечного сечения элемента;  $f(w, \dot{w}), g(u, \dot{u})$  – некоторые линейные или нелинейные функции, зависящие от поперечной или продольной деформации  $w(y, t)$  или  $u(y, t)$  и скорости деформации  $\dot{w}(y, t), \dot{u}(y, t)$ ;

индексы  $x, y, t$  снизу обозначают частные производные по  $x, y, t$ , точка сверху – частную производную по  $t$ , штрих сверху – частную производную по  $y$ .

Уравнение (1) описывает движение газа или жидкости в трубопроводе с прямолинейными стенками  $y = 0, y = h$ ; уравнение (5) описывает динамику упругого элемента; условие (6) задает закон изменения давления на входе в трубопровод ( $x = -l$ ); (3), (4) – условия непротекания поверхности элемента ( $y \in (a, b)$ ) и прямолинейной вертикальной части стенки трубопровода ( $y \in (0, a) \cup (b, h)$ ); условия (2) – условия непротекания горизонтальных стенок трубопровода. Имеем нелинейную задачу (1)-(6) для функций  $\Phi(x, y, t), w(y, t)$ , которую следует дополнить начальными условиями для  $\Phi, w$  и граничными условиями для  $w$ .

Для решения задачи (1)-(6) используем метод малого параметра  $\varepsilon$ . Таким параметром может служить отношение толщины упругого элемента  $h_*$  к его длине  $\left(\varepsilon = \frac{h_*}{b-a}\right)$ , или отношение ширины трубопровода  $h$  к его длине  $l$   $\left(\varepsilon = \frac{h}{l}\right)$ . Представим функции  $\Phi, P, \tilde{P}, w$  в виде разложений:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \varepsilon\varphi_1(x, y, t) + \dots, & P(x, y, t) &= P_0 + \varepsilon P_1(x, y, t) + \dots, \\ \tilde{P}(y, t) &= P_0 + \varepsilon P_*(y, t), & w(y, t) &= w_0(y) + \varepsilon w_1(y, t) + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Из интеграла Лагранжа-Коши (7) получим асимптотическую формулу для давления

$$P = P_0 - \varepsilon\rho_0\varphi_{1t} + o(\varepsilon). \quad (16)$$

Оставляя старшие члены порядка  $\varepsilon$  в уравнении (1), получим уравнение для  $\varphi_1$

$$\varphi_{1tt} = a_0^2(\varphi_{1xx} + \varphi_{1yy}). \quad (17)$$

Здесь  $a_0^2 = \frac{\chi P_0}{\rho_0}$  – квадрат скорости звука в покоящейся среде. Граничное условие (3) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  запишется в виде

$$\varphi_{1x}(w_0(y), y, t) - \varphi_{1y}(w_0(y), y, t) \cdot w_0'(y) = \dot{w}_1(y, t). \quad (18)$$

Подставляя (15) в (5) и выбирая  $L(w(y, t))$  в виде (8), будем иметь

$$Dw_0'''' + Nw_0'' + f(w_0, 0) = P_0 - \bar{P}, \quad (19)$$

$$m\ddot{w}_1 + Dw_1'''' + Nw_1'' + \beta\dot{w}_1'''' + \frac{\partial f}{\partial w}(w_0, 0)w_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{w}}(w_0, 0)\dot{w}_1 = -\rho_0\varphi_{1t}(w_0, y, t). \quad (20)$$

При выборе  $L(w(y, t))$  в виде (11) аналогичная система уравнений будет иметь вид

$$\left[ Dw_0'' \left( 1 - \frac{3}{2}w_0'^2 \right) \right]'' + Nw_0'' + f(w_0, 0) = P_0 - \bar{P}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{w}_1 + \left[ D \left( 1 - \frac{3}{2}w_0'^2 \right) w_1'' - 3Dw_0'w_0''w_1' \right]'' + \left[ D \left( 1 - \frac{3}{2}w_0'^2 \right) \dot{w}_1'' - 3Dw_0'w_0''\dot{w}_1' \right] + \\ + Nw_1'' + \frac{\partial f}{\partial w}(w_0, 0)w_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{w}}(w_0, 0)\dot{w}_1 = -\rho_0\varphi_{1t}(w_0, y, t). \end{aligned} \quad (22)$$

Если  $L(w(y, t))$  взять в виде (12), то получим

$$\left( \frac{Dw_0''}{(1+w_0'^2)^{3/2}} \right)'' + Nw_0'' + f(w_0, 0) = P_0 - \bar{P}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{D}{(1+w_0'^2)^{3/2}} \left( w_1'' - \frac{3w_0'w_0''}{1+w_0'^2} w_1' \right) \right]'' + \left[ \frac{D}{(1+w_0'^2)^{3/2}} \left( \dot{w}_1'' - \frac{3w_0'\dot{w}_0''}{1+w_0'^2} \dot{w}_1' \right) \right]'' + \\ & + m\ddot{w}_1 + Nw_1'' + \frac{\partial f}{\partial w}(w_0, 0)w_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{w}}(w_0, 0)\dot{w}_1 = -\rho_0\varphi_{1t}(w_0, y, t). \end{aligned} \quad (24)$$

На основе полученных приближенных асимптотических уравнений построены математические модели систем измерения давления в газожидкостных средах. Разработаны методы решения начально-краевых задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными, соответствующих этим моделям [3-9]. Разработан программный комплекс для математического моделирования механической системы «трубопровод – датчик давления» [10]. Он предназначен для исследования совместной динамики чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе, соединяющем камеру сгорания двигателя с датчиком, и позволяет получать графики функции  $w(y, t)$ , характеризующей деформацию упругого элемента датчика, при различном задании механических параметров системы, в том числе при задании закона изменения давления рабочей среды в двигателе.

Для несжимаемой среды уравнение, описывающее движение газа или жидкости в трубопроводе, имеет вид

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0, \quad x \in (-l, 0), \quad y \in (0, h). \quad (25)$$

Тогда математическая постановка задачи в модели несжимаемой среды включает уравнения (2)-(6), (25). Решение этой задачи представим в виде разложения (15). Оператор  $L(w(y, t))$  возьмем в виде (8), где функция  $f(w, \dot{w}) = \gamma w + \alpha \dot{w}$  ( $\gamma$  – коэффициент жесткости основания,  $\alpha$  – коэффициент демпфирования основания). Тогда асимптотическая модель задачи в первом приближении имеет вид

$$\varphi_{1xx} + \varphi_{1yy} = 0, \quad (26)$$

$$\varphi_{1y}(x, 0, t) = \varphi_{1y}(x, h, t) = 0, \quad (27)$$

$$Dw_0'''' + Nw_0'' + \gamma w_0 = P_0 - \bar{P}, \quad (28)$$

$$m\ddot{w}_1 + Dw_1'''' + Nw_1'' + \beta \dot{w}_1'''' + \gamma w_1 + \alpha \dot{w}_1 = -\rho_0\varphi_{1t}(w_0(y), y, t), \quad (29)$$

$$\varphi_{1x}(w_0(y), y, t) - \varphi_{1y}(w_0(y), y, t)w_0'(y) = \dot{w}_1(y, t), \quad (30)$$

$$-\rho_0\varphi_{1t}(-l, y, t) = P_*(y, t), \quad (31)$$

где  $P_*(y, t)$  – избыточное давление на входе в трубопровод (в сечении  $x = -l$ ). Предполагая  $a = 0$ ,  $b = h$ ,  $P_*(y, t) = P_*(t)$ , потенциал  $\varphi_1(x, y, t)$  представим в виде

$$\varphi_1(x, y, t) = -\frac{1}{\rho_0} \int_0^t P_*(z) dz + (x+l)\psi(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1n}(t) \cos \lambda_n y \operatorname{sh} \lambda_n (x+l), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{h}. \quad (32)$$

Функция (32) удовлетворяет уравнению (26) и условиям (27), (31).

Функция  $w_1(y, t)$  отыскивается в виде разложения в ряд по полной на отрезке  $[0, h]$  системе функций  $\{q_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ , удовлетворяющих граничным условиям, соответствующим условиям закрепления пластины.

При шарнирном закреплении концов упругого элемента ( $w(0, t) = w''(0, t) = 0$ ,  $w(h, t) = w''(h, t) = 0$ ) функцию  $w_1(y, t)$  будем искать в виде

$$w_1(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin \lambda_n y, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{h}.$$

Для жесткого защемления концов упругого элемента ( $w(0, t) = w'(0, t) = 0$ ,  $w(h, t) = w'(h, t) = 0$ ) функция  $w_1(y, t)$  ищется в виде

$$w_1(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y),$$

где  $\xi_n(y) = \operatorname{ch}(\mu_n y) - \cos(\mu_n y) - \frac{\operatorname{ch}(\mu_n h) - \cos(\mu_n h)}{\operatorname{sh}(\mu_n h) - \sin(\mu_n h)} (\operatorname{sh}(\mu_n y) - \sin(\mu_n y))$  и  $\mu_n$  находятся из уравнения  $\operatorname{ch}(\mu_n h) \cos(\mu_n h) = 1$ .

## Литература

1. Аш Ж. и соавторы Датчики измерительных систем: В 2-х книгах, Мир, М., 1992.
2. Эткин Л.Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, М., 2004. 408 с.
3. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Горбоконенко В.Д., Покладова Ю.В. Математическое моделирование механической системы "трубопровод - датчик давления Ульяновск: УлГТУ, 2008. 188 с.
4. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем, Ульяновск: УлГТУ, 2018. 152 с.
5. VelmisoV P.A., Tamarova Y.A., Pokladova Y.V. Mathematical modeling of pressure monitoring systems in fluid and gaseous media // AIP Conference Proceedings, 2021. 2333. 120004.
6. VelmisoV P.A., Tamarova Y.A., Pokladova Y.V. Mathematical modeling of a class of aerohydroelastic systems // Journal of Mathematical Sciences (United States), 2021. 255(5). P. 587-594.
7. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал Средневолжского математического общества, 2020. Т. 22. № 3. С. 352-367.
8. Тамарова Ю.А., Вельмисов П.А., Алексанин Н.Д., Нуруллин Н.И. Исследование динамических процессов в системах измерения давления газожидкостных сред // Журнал Средневолжского математического общества, 2021. Т.23. № 4. С. 461-471.

9. Вельмисов П.А., Покладова Ю.А. Математическое моделирование систем измерения давления // Вестник Ульяновского государственного технического университета, 2020. № 2-3 (90-91). С. 10-19.
10. Тамарова Ю.А., Вельмисов П.А., Анкилов А.В. Комплекс программ для математического моделирования механической системы "трубопровод - датчик давления". Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2022615319, 30.03.2022, заявка №2022615014 от 28.03.2022.

MSC 35Q35 35Q74

## **Asymptotic analysis of the mathematical model of the system «pipeline - pressure sensor»**

P.A. Velmisov, Yu.A. Tamarova, N.D. Aleksanin, G.A. Ankilov

Ulyanovsk State Technical University

*Abstract:* Mathematical models of the mechanical system «pipeline - pressure sensor», designed to control the pressure of the working medium in the combustion chambers of engines, are considered. Asymptotic equations are obtained that describe the joint dynamics of the elastic sensitive element of the pressure sensor and the working medium in the pipeline. Methods for solving the corresponding initial-boundary value problems for systems of differential equations with partial derivatives are developed.

*Keywords:* sensor, elastic element, pipeline, dynamics, differential equations.

### **References**

1. Ash ZH. i soavtory Datchiki izmeritel'nykh sistem: V 2-kh knigakh, Mir, M., 1992.
2. Etkin L.G. Vibrochastotnyye datchiki. Teoriya i praktika. Izd-vo MGTU im. N.E.Baumana, M., 2004. 408 p.
3. Ankilov A.V., Vel'misov P.A., Gorbokonenko V.D., Pokladova Yu.V. Matematicheskoye modelirovaniye mekhanicheskoy sistemy "truboprovod - datchik davleniya Ul'yanovsk: UIGTU, 2008. 188 p.
4. Vel'misov P.A., Pokladova Yu.V. Issledovaniye dinamiki deformiruyemykh elementov nekotorykh aerogidrouprugikh sistem, Ul'yanovsk: UIGTU, 2018. 152 p.
5. Velmisov P.A., Tamarova Y.A., Pokladova Y.V. Mathematical modeling of pressure monitoring systems in fluid and gaseous media // AIP Conference Proceedings, 2021. 2333. 120004.
6. Velmisov P.A., Tamarova Y.A., Pokladova Y.V. Mathematical modeling of a class of aerohydroelastic systems // Journal of Mathematical Sciences (United States), 2021. 255(5). P. 587-594.
7. Velmisov P.A., Tamarova Yu.A. Matematicheskoye modelirovaniye sistem izmereniya davleniya v gazozhidkostnykh sredakh // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 2020. 22. 3. P. 352–367.
8. Tamarova Yu.A., Velmisov P.A., Aleksanin N.D., Nurullin N.I. Issledovaniye dinamicheskikh protsessov v sistemakh izmereniya davleniya gazozhidkostnykh sred // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 2021. 23. 4. P. 461–471.
9. Velmisov P.A., Pokladova Y.V. Matematicheskoye modelirovaniye sistem izmereniya davleniya // Vestnik Ul'yanovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2020. №2-3(90-91). P.10-19.

10. Tamarova Yu.A., Velmisov P.A., Ankilov A.V. The software package for mathematical modeling of the mechanical system «pipeline - pressure sensor». Certificate of registration of the computer program 2022615319, 30.03.2022. Application No. 2022615014 dated 03/28/2022.