УДК 517.983

О биортогонализации полных обобщенных жордановых наборов линейного оператора и ему сопряженного в банаховом пространстве

Шаманаев П. А.

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва

Аннотация: В статье изложен метод биортогонализации полных обобщенных жордановых наборов линейного оператора и ему сопряженного в банаховом пространстве. Метод основан на фиксировании одного набора и разложении элементов другого набора по новому базису.

Ключевые слова: линейные фредгольмовы операторы, банаховы пространства, условие биортогональности, обобщенный жорданов набор

При решении прикладных задач методом Ляпунова-Шмидта может возникнуть ситуация, когда построенные обобщенные жордановы наборы линейного оператора и ему сопряженного не удовлетворяют условию биортогональности [1]. В этом случае необходимо провести биортогонализацию этих наборов [2]. Этому вопросу и посвящена настоящая работа.

Пусть A и B – плотно заданные замкнутые линейные фредгольмовы операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2. Введем обозначения согласно работе [3]: $N(B)= span\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ – подпространство нулей оператора B, $N^*(B) = span\{\psi_k\}_{k=1}^n$ – подпространство дефектных функционалов оператора B, $N^*(B) \subseteq E_2^*$, B^* – оператор, сопряженный к B, действующий из E_2^* в E_1^*, E_1^* и E_2^* – пространства, сопряжённые к E_1 и E_2, соответственно.

Будем считать, что элементы φ_k и ψ_k, $k = \overline{1,n}$, образуют полные A- и A^*-жордановы наборы длины p_k операторов B и B^*, соответственно. Обозначим элементы этих наборов

$$\varphi_k^{(j)}, \quad j = \overline{1,p_k},\ k = \overline{1,n}, \tag{1}$$

$$\psi_s^{(l)}, \quad l = \overline{1,p_s},\ s = \overline{1,n}, \tag{2}$$

где $\varphi_k^{(1)} = \varphi_k$, $\psi_s^{(1)} = \psi_s$.

Предположим, что обобщенные жордановы наборы, состоящие из элементов (1) и (2), не удовлетворяют условиям биортогональности [1]. Приведем метод построения новых обобщенных жордановых наборов $\left\{\hat\varphi_k^{(j)}\right\}$ и $\left\{\hat\psi_s^{(l)}\right\}$, для которых будут справедливы условия биортогональности.

Покажем, что для этого достаточно лишь при фиксированном наборе $\left\{\varphi_k^{(j)}\right\}$ построить новый набор $\left\{\hat\psi_s^{(l)}\right\}$ так, что

$$< \varphi_k^{(j)}, \hat\gamma_s^{(l)} >= \delta_{ks}\delta_{jl}, \quad \hat\gamma_s^{(l)} = A^*\hat\psi_s^{(p_s+1-l)}, \tag{3}$$
$$j = \overline{1,p_k},\ l = \overline{1,p_s},\ k,s = \overline{1,n},$$

где δ_{ks}, δ_{jl} – символы Кроннекера, символом $< f, g >$ обозначено значение линейного функционала g на элементе f.

Будем искать элементы $\hat{\psi}_s^{(l)}$, удовлетворяющие соотношениям (3), из системы

$$\begin{cases} \psi_s^{(p_s+1-l)} = c_{1s}^{(l)}\hat{\psi}_1^{(1)} + c_{2s}^{(l)}\hat{\psi}_2^{(1)} + ... + c_{ns}^{(l)}\hat{\psi}_n^{(1)} + \hat{\psi}_s^{(p_s+1-l)}, \quad l = \overline{1, p_s - 1}, \\ \psi_s^{(1)} = c_{1s}^{(p_s)}\hat{\psi}_1^{(1)} + c_{2s}^{(p_s)}\hat{\psi}_2^{(1)} + ... + c_{ns}^{(p_s)}\hat{\psi}_n^{(1)}, \\ s = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{4}$$

где $c_{rs}^{(l)}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Применяя оператор A^* к уравнениям системы (4) и рассматривая левые и правые части полученных уравнений как линейные функционалы, вычислим их значение на элементах $\varphi_k^{(j)}$. Получим

$$\begin{cases} < \varphi_k^{(j)}, A^*\psi_s^{(p_s+1-l)} >= \sum\limits_{r=1}^{n} c_{rs}^{(l)} < \varphi_k^{(j)}, A^*\hat{\psi}_r^{(1)} > + < \varphi_k^{(j)}, A^*\hat{\psi}_s^{(p_s+1-l)} >, \\ < \varphi_k^{(j)}, A^*\psi_s^{(1)} >= \sum\limits_{r=1}^{n} c_{rs}^{(p_s)} < \varphi_k^{(j)}, A^*\hat{\psi}_r^{(1)} >, \\ j = \overline{1, p_k},\ k = \overline{1, n},\ l = \overline{1, p_s - 1},\ s = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{5}$$

Полагая $\gamma_s^{(l)} = A^*\psi_s^{(p_s+1-l)}$ и учитывая формулы (3), систему (5) запишем в виде

$$\begin{cases} < \varphi_k^{(j)}, \gamma_s^{(l)} >= \sum\limits_{r=1}^{n} c_{rs}^{(l)} < \varphi_k^{(j)}, \hat{\gamma}_r^{(p_r)} > + < \varphi_k^{(j)}, \hat{\gamma}_s^{(l)} >, \\ < \varphi_k^{(j)}, \gamma_s^{(p_s)} >= \sum\limits_{r=1}^{n} c_{rs}^{(p_s)} < \varphi_k^{(j)}, \hat{\gamma}_r^{(p_r)} >, \\ j = \overline{1, p_k},\ k = \overline{1, n},\ l = \overline{1, p_s - 1},\ s = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{6}$$

Учитывая соотношения (3), из системы (6) найдем неизвестные коэффициенты

$$\begin{cases} c_{ks}^{(l)} =< \varphi_k^{(p_k)}, \gamma_s^{(l)} >, \\ k = \overline{1, n},\ l = \overline{1, p_s},\ s = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{7}$$

Подставим вычисленные по формуле (7) коэффициенты $c_{ks}^{(p_s)}$ во второе уравнение системы (4) и запишем это уравнение в виде

$$[\psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)}, ..., \psi_n^{(1)}] = [\hat{\psi}_1^{(1)}, \hat{\psi}_2^{(1)}, ..., \hat{\psi}_n^{(1)}]\, C, \tag{8}$$

где $C \equiv \left\{ c_{ks}^{(p_s)} \right\}_{k,s=1}^{n}$ – постоянная матрица.

Запишем матрицу C в виде

$$C = \left\{ < \varphi_k^{(p_k)}, \gamma_s^{(p_s)} > \right\}_{k,s=1}^{n} = \left\{ < \varphi_k^{(p_k)}, A^*\psi_s^{(1)} > \right\}_{k,s=1}^{n} = \left\{ < A\varphi_k^{(p_k)}, \psi_s^{(1)} > \right\}_{k,s=1}^{n}.$$

Поскольку A-жорданов набор оператора B является полным, то определитель матрицы C не равен нулю. Тогда выражение (8) можно записать в виде

$$[\hat{\psi}_1^{(1)}, \hat{\psi}_2^{(1)}, ..., \hat{\psi}_n^{(1)}] = [\psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)}, ..., \psi_n^{(1)}]\, C^{-1},$$

или

$$\begin{cases} \hat{\psi}_1^{(1)} = \hat{c}_{11}\psi_1^{(1)} + \hat{c}_{21}\psi_2^{(1)} + ... + \hat{c}_{n1}\psi_n^{(1)}, \\ \hat{\psi}_2^{(1)} = \hat{c}_{12}\psi_1^{(1)} + \hat{c}_{22}\psi_2^{(1)} + ... + \hat{c}_{n2}\psi_n^{(1)}, \\ ... \\ \hat{\psi}_n^{(1)} = \hat{c}_{1n}\psi_1^{(1)} + \hat{c}_{2n}\psi_2^{(1)} + ... + \hat{c}_{nn}\psi_n^{(1)}, \end{cases} \tag{9}$$

где $\hat{c}_{ks}$ – элементы обратной матрицы C^{-1}.

Подставляя элементы $\hat{\psi}_s^{(1)}$, вычисленные по формулам (9), в первое уравнение системы (7), найдем остальные элементы A^*-жорданова набора оператора B^*

$$\begin{cases} \hat{\psi}_s^{(p_s+1-l)} = c_{1s}^{(l)}\hat{\psi}_1^{(1)} + c_{2s}^{(l)}\hat{\psi}_2^{(1)} + ... + c_{ns}^{(l)}\hat{\psi}_n^{(1)} - \psi_s^{(p_s+1-l)}, \\ l = \overline{1, p_s - 1},\ s = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{10}$$

Полагая $z_k^{(j)} = A\varphi_k^{(p_k+1-j)}$, вычислим

$$< z_k^{(j)}, \hat{\psi}_s^{(l)} >=< A\varphi_k^{(p_k+1-j)}, \hat{\psi}_s^{(p_s+1-l)} >=< \varphi_k^{(p_k+1-j)}, A^*\hat{\psi}_s^{(l)} >=$$
$$=< \varphi_k^{(p_k-1+j)}, \hat{\gamma}_s^{(p_s+1-l)} >= \delta_{ks}\,\delta_{p_k+1-j,\,p_s+1-l}.$$

Поскольку равенства $\delta_{ks}\,\delta_{p_k+1-j,\,p_s+1-l} = \delta_{ks}\,\delta_{j,l}$ справедливы для всех $j = \overline{1, p_k}$, $k = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, p_s}$, $s = \overline{1, n}$, то

$$< z_k^{(j)}, \hat{\psi}_s^{(l)} >= \delta_{ks}\delta_{jl}, \quad j = \overline{1, p_k},\ l = \overline{1, p_s},\ k, s = \overline{1, n}.$$

Таким, образом обобщенные жордановы наборы $\left\{\hat{\varphi}_k^{(j)}\right\}$ и $\left\{\hat{\psi}_s^{(l)}\right\}$ операторов B и B^*, соответственно, удовлетворяют условиям биортогональности и новый набор $\left\{\hat{\psi}_s^{(l)}\right\}$ может быть найден по формулам (9) и (10).

Аналогично можно показать, что биортогональные обобщенные жордановы наборы операторов B и B^* можно построить, фиксируя набор $\left\{\psi_s^{(l)}\right\}$ и перестраивая набор $\left\{\varphi_k^{(j)}\right\}$.

Литература

1. Логинов Б. В., Русак Ю. Б. Обобщённая жорданова структура аналитической оператор-функции и её роль в теории ветвления. Редкол. “Известия АН УзССР“. Ташкент. 1977. 82 с. Деп. в ВИНИТИ 18.04.1977, № 1782-77.

2. Шаманаев П. А., Прохоров С. А. Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений с малым параметром методом Ляпунова-Шмидта в регулярном случае [Электронный ресурс] // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ имени Е.В. Воскресенского: IX Международная научная молодежная школа-семинар (Саранск, 8-11 октября 2020 г.). С. 129-131. Режим доступа: https://conf.svmo.ru/files/2020/papers/paper40.pdf.

3. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука. 1964. 524 с.

MSC 47A55, 47B01

On biorthogonalization of complete generalized Jordan sets of a linear operator and its adjoint in a Banach space

P. A. Shamanaev

National Research Ogarev Mordovia State University

Abstract: The article presents a method of biorthogonalization of complete generalized Jordan sets of a linear operator and its adjoint in a Banach space. The method is based on fixing one set and expanding the elements of another set according to a new basis.

Keywords: linear Fredholm operators, Banach spaces, biorthogonality condition, generalized Jordan set

References

1. B. V. Loginov, Yu. B. Rusak Generalized Jordan structure of an analytic operator function and its role in branching theory. Tashkent: Izvestiya AN UzSSR. 1977. 82 p. Dep. in VINITI 04.18.1977, No. 1782-77.

2. P. A. Shamanaev, S. A. Prokhorov. Algorithm for solving systems of linear algebraic equations with a small parameter by the Lyapunov-Schmidt method in the regular case [Electronic resource]. Proceedings of the International Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software complexes"named after E.V. Voskresensky (Saransk, October 8-11, 2020). Saransk: SVMO Publ, 2020. pp. 129-131. Available at: https://conf.svmo.ru/files/2020/papers/paper40.pdf.

3. M. M. Weinberg, V. A. Trenogin. Theory of branching of solutions of nonlinear equations. M.: Nauka. 1964. 524 p.