УДК 519.62

Абсолютная устойчивость явной схемы метода Эйлера для задач, преобразованных к наилучшему аргументу и его модификации *

Цапко Е. Д.[1], Леонов С. С.[1,2], Кузнецов Е. Б.[1]

Московский авиационный институт[1], Российский университет дружбы народов[2]

Аннотация: При моделировании физических и технологических процессов исследователи часто сталкиваются с необходимостью решения жестких начальных задач. Как правило, для таких задач явные численные методы решения оказываются непригодными из-за недостаточной устойчивости. Наиболее часто применяемый наилучший аргумент оказывается малоприменим для решения задач, скорость роста интегральных кривых которых является близкой к экспоненциальной. Авторами ранее была предложена модификация наилучшего аргумента, которая позволила сгладить этот недостаток. В этой работе даны оценки абсолютной устойчивости явной схемы метода Эйлера при решении задач, преобразованных к модифицированному наилучшему аргументу. Проведена апробация полученных теоретических оценок на примере решения тестовой задачи.

Ключевые слова: абсолютная устойчивость, область устойчивости, тестовая задача Далквиста, разностная схема, явный метод Эйлера, начальная задача, метод продолжения решения, наилучший аргумент, модифицированный наилучший аргумент.

1. Область устойчивости явного метода Эйлера

Исследование области устойчивости и спектральных характеристик, как было предложено в [1], рассматривают на примере задачи, получившей название задачи Далквиста, вида

$$\frac{dy}{dt} = ay, \quad y(0) = y_0, \tag{1}$$

где a — некоторая константа. Задача (1) моделирует исходную решаемую задачу, если a — собственное значение линеаризованной задачи [2].

Область устойчивости явной разностной схемы метода Эйлера для задачи (1) имеет вид [2]

$$h_t \leq \frac{2}{|a|}. \tag{2}$$

Неравенство (2) справедливо в случае, если $a < 0$, а $h_t > 0$. Если рассмотреть случай отрицательного шага $h_t < 0$, то несложно получить следующий результат:

$$|h_t| \leq \frac{2}{|a|}. \tag{3}$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-31-90054).

2. Метод продолжения решения по наилучшему аргументу

Преобразование задачи (1) к наилучшему аргументу λ: $d\lambda^2 = dy^2 + dt^2$ приводит к системе вида

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{ay}{\sqrt{1+a^2y^2}}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2y^2}}, \qquad y(0) = y^{(0)}, \quad t(0) = t_0. \tag{4}$$

Применение наилучшего аргумента λ к жестким задачам Коши обладает рядом преимуществ [3]: он позволяет снизить показатель жесткости решаемой системы, а также устранить вычислительные трудности, связанные с неограниченным ростом правых частей исходной задачи. В работе Е. Б. Кузнецова и В. И. Шалашилина [4] сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Разностная схема явного метода Эйлера для преобразованной к наилучшему аргументу λ задачи (4) является абсолютно устойчивой, если шаг интегрирования удовлетворяет неравенству*

$$|h_\lambda| \le \frac{2\left(1+a^2y_m^2\right)^{3/2}}{|a|}.$$

В статье [4] принималось, что второе уравнение системы задачи (4) вносит пренебрежимо малый вклад в характер устойчивости приближенного решения, что является верным только в окрестности предельной особой точки. В следствие чего, второе уравнение исключалось из рассмотрения. Однако можно показать, что с учетом второго уравнения системы (4) теорема 1 остается справедливой, а значит, теорема 1 не требует дополнительных условий на рассматриваемую область.

3. Метод продолжения решения по экспоненциальному наилучшему аргументу

Рассмотрим задачу (1), преобразованную к экспоненциальному наилучшему аргументу μ: $d\mu^2 = dy^2 + \exp(-2\gamma t)\cdot dt^2$, которая имеет вид:

$$\frac{dy}{d\mu} = \frac{ay\exp\gamma t}{\sqrt{1+a^2y^2\exp 2\gamma t}}, \quad \frac{dt}{d\mu} = \frac{\exp\gamma t}{\sqrt{1+a^2y^2\exp 2\gamma t}}, \qquad y(0) = y_0 \quad t(0) = 0. \tag{5}$$

Данная модификация наилучшего аргумента ориентирована на решение задач с экспоненциальной скоростью роста интегральных кривых. Этот подход позволяет получить решение таких задач тогда, когда традиционные методы и преобразование к наилучшему аргументу λ оказывается малоэффективным [5].

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Разностная схема явного метода Эйлера для задачи (5), преобразованной к экспоненциальному наилучшему аргументу μ, является абсолютной устойчивой для значений параметра γ, удовлетворяющих условию $a\cdot\gamma \le 0$, если шаг интегрирования удовлетворяет неравенству*

$$|h_\mu| \le \frac{4\left(1+a^2y_m^2\exp 2\gamma t_m\right)^{3/2}}{|D_{\max}|\exp\gamma t_m},$$

где

$$D_{\max} = \begin{cases} D_1, & a+\gamma \geq -\dfrac{2(1+a^2y_m^2\exp(2\gamma t_m))^{3/2}}{h_\mu \exp(\gamma t_m)}, \\ D_2, & a+\gamma < -\dfrac{2(1+a^2y_m^2\exp(2\gamma t_m))^{3/2}}{h_\mu \exp(\gamma t_m)}, \end{cases}$$

$$D_1 = a+\gamma+\sqrt{(a-\gamma)^2-4a^3\gamma y_m^2\exp(2\gamma t_m)}, \qquad D_2 = a+\gamma-\sqrt{(a-\gamma)^2-4a^3\gamma y_m^2\exp(2\gamma t_m)}.$$

4. Экспоненциальный тест

На примере численного решения методом Эйлера тестовой задачи, рассмотренной в работе А. А. Белова и Н. Н. Калиткина [6],

$$\frac{du}{dt} = -\xi(t)\cdot u\cdot\left(u^2-a^2\right), \qquad u(0)=u_0, \qquad t\in[0,2\pi],$$

преобразованной к экспоненциальному наилучшему аргументу, показано, что область устойчивости согласуется с результатами, сформулированными в теореме 2.

Таким образом, в работе показано, что преобразование исходной задачи к наилучшему и модифицированному наилучшему аргументам позволяет увеличить шаг интегрирования при применении явного метода Эйлера, что соответствует полученным теоретическим результатам.

Литература

1. Dahlquist G. A special stability problem for linear multistep methods // BIT. 1963. № 3. P. 27-43.

2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.

3. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.

4. Кузнецов Е. Б., Шалашилин В. И. Задача Коши как задача продолжения решения по параметру // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33, №12. С. 1792-1805.

5. Kuznetsov E. B., Leonov S. S., Tsapko E. D. A new numerical approach for solving initial value problems with exponential growth integral curves // 2020 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 927. 012032.

6. Белов А. А., Калиткин Н. Н. Особенности расчета контрастных структур в задачах Коши // Математическое моделирование. 2016. Т. 28, № 10. С. 97-109.

MSC 65L20

Absolute stability of the explicit scheme of the Euler method for problems transformed to the best argument and its modification

E. D. Tsapko[1], S. S. Leonov[1,2], E. B. Kuznetsov[1]

Moscow Aviation Institute[1], Peoples' Friendship University of Russia[2]

Abstract: When modeling physical and technological processes, researchers often face the need to solve stiff initial tasks. As a rule, explicit numerical methods of solving such problems are unsuitable due to insufficient stability. The most frequently used best argument turns out to be hardly applicable for solving problems whose growth rate of integral curves is close to exponential. The authors previously proposed a modification of the best argument, which made it possible to smooth out this disadvantage. In this paper, estimates of the absolute stability of the explicit scheme of the Euler method in solving problems transformed to a modified best argument are given. The approbation of the obtained theoretical estimates is carried out on the example of solving a test problem.

Keywords: absolute stability, stability domain, Dahlquist test problem, difference scheme, explicit Euler method, initial problem, solution continuation method, best argument, modified best argument.

References

1. G. Dahlquist, A special stability problem for linear multistep methods, *BIT*, 1963, № 3, P. 27-43.
2. A. A. Samarskii, A. V. Goolin, Numerical methods, Moscow, Nauka, Main Editorial Board for Physical and Mathematical Literature, 1989. (In Russ.)
3. V. I. Shalashilin, E. B. Kuznetsov, Parametric continuation and optimal parametrization in applied mathematics and mechanics. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2003, 236 p.
4. E. B. Kuznetsov, V. I. Shalashilin, The Cauchy problem as a problem of the continuation of a solution with respect to a parameter, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1993, 33:12, 1792–1805.
5. E. B. Kuznetsov, S. S. Leonov, E. D. Tsapko, A new numerical approach for solving initial value problems with exponential growth integral curves, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng*, 2020, 927, 012032.
6. A. A. Belov, N. N. Kalitkin, Features of calculating contrast structures in the Cauchy problem, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2017, 9:3, 281-291.