УДК 517.9

Численное решение обратной задачи для интегральных динамических моделей с разрывными ядрами

Тында А. Н.[1], Сидоров Д. Н.[2,3]

Пензенский государственный университет[1],
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН[2],
Иркутский национальный исследовательский университет[3].

Аннотация: В статье построен численный метод решения обратной задачи для математической модели, описываемой слаборегулярным интегральным уравнением Вольтерра I рода с ядром, терпящим разрыв вдоль гладкой кривой.

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольтерра I рода, разрывные ядра, обратная задача, арифметическая сложность.

1. Введение

Работа посвящена численному исследованию интегральных динамических моделей, в основе которых лежат интегральные уравнения Вольтерра I рода с ядрами, терпящими разрывы на множестве гладких кривых. Речь идет об уравнениях вида

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = g(t),\ \ 0 \le s \le t \le T,\ g(0) = 0, \tag{1}$$

где ядро $K(t,s)$ представимо в форме

$$K(t,s) = \begin{cases} K_1(t,s),\ t,s \in m_1, \\ \dots\ \dots\dots\dots \\ K_n(t,s),\ t,s \in m_n, \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $m_i = \{t,s \mid \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t)\}$, $\alpha_0(t) = 0$, $\alpha_n(t) = t$, $i = \overline{1,n}$, $\alpha_i(t)$, $g(t) \in \mathcal{C}^1_{[0,T]}$, функции $K_i(t,s)$ имеют непрерывные производные по переменной t при $(t,s) \in cl(m_i)$, $K_n(t,t) \neq 0$, $\alpha_i(0) = 0$, $0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < t$, функции $\alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ монотонно возрастают и $0 < \alpha_1'(0) \le \dots \le \alpha_{n-1}'(0) < 1$, а $cl(m_i)$ — замыкание множества m_i.

Такие слабо регулярные уравнения Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами были впервые классифицированы Д. Н. Сидоровым [1] и А. Лоренци [2] и активно изучались многими авторами в течение последнего десятилетия. Здесь читатели могут обратиться к [3] и источникам в этой монографии. Операторным уравнениям Вольтерра первого рода с разрывнами ядрами посвящены работы Н. А. Сидорова и Д. Н. Сидорова [4]. Такие модели Вольтерра находят применение при моделировании различных динамических процессов, включая системы накопителей энергии [5, 6].

2. Обратная задача

Классическая постановка задачи для модели (1)-(2) заключается в определении $x(t)$ при известных остальных компонентах. Однако ряд естественных приложений модели (1)-(2) на практике приводит обратной задаче, заключающейся в определении линий разрыва $\alpha_i(t)$. При такой постановке уравнение (1) трактуется уже как нелинейное интегральное уравнение с неизвестными пределами интегрирования, численное исследование которого представляет математически более сложную задачу. Сложность дискретизации в первую очередь связана с аппроксимацией интегралов при неизвестных длинах отрезков интегрирования.

Модели, описываемые интегральными уравнениями с неизвестными пределами интегрирования, берут свое начало в работах В. М. Глушкова [7], их экономические приложения исследуются в работах N. Hritonenko и Yu. Yatsenko [8], ряд прямых и итерационных численных методов предложен А. Н. Тындой в [9,10].

В настоящей работе для обратной задачи (1)-(2) в случае $n = 2$ предлагается прямой метод дискретизации первого порядка точности с апостериорной верификацией вычислений.

3. Численный метод

Рассмотрим задачу (1)-(2) при $n = 2$, состоящую в определении одной неизвестной функции разрыва $\alpha_1(t) = \alpha(t)$:

$$\int_0^{\alpha(t)} K_1(t,s)x(s)ds + \int_{\alpha(t)}^{t} K_2(t,s)x(s)ds = f(t),\ t \in [0,T]. \tag{3}$$

Для построения приближенного решения введем на отрезке $[0,T]$ сетку узлов $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$. Решение будем искать в виде кусочно-линейной функции $\alpha_N(t)$, построенной по точкам (t_k, α_k), $\alpha_k = \alpha(t_k),\ k = 0,1,2,\ldots,N$.

Приступим к определению неизвестных значений $\alpha_k,\ k = 0,1,2,\ldots,N$. Для проведения дискретизации уравнения (3) введем также вспомогательную целочисленную функцию

$$v(k) = v_k \text{ если } t_{v_k-1} < \alpha_k \leqslant t_{v_k},\ k = 1,2,\ldots,N.$$

Другими словами, $v(k)$ обозначает номер сегмента сетки, на который попадает неизвестное значение α_k. Поскольку $\alpha(t)$ — монотонно возрастающая функция и $\alpha(t) < t$, имеем

$$v_k \leqslant k \text{ и } v_p \leqslant v_m \text{ при } p < m.$$

Потребуем чтобы в узлах сетки $t = t_k,\ k = 1,2,\ldots,N$ уравнение (3) обращалось в равенства:

$$\int_0^{\alpha_k} K_1(t_k,s)x(s)ds + \int_{\alpha_k}^{t} K_2(t_k,s)x(s)ds = f(t_k),\ k = 1,2,\ldots,N. \tag{4}$$

Используя определение v_k и обозначив $f_k = f(t_k)$, можем представить (4) в следующем виде

$$\sum_{m=1}^{v_k-1} \int_{t_{m-1}}^{t_m} K_1(t_k, s)x(s)ds + \int_{t_{v_k-1}}^{\alpha_k} K_1(t_k, s)x(s)ds+$$
$$+ \int_{\alpha_k}^{t_{v_k}} K_2(t_k, s)x(s)ds + \sum_{p=v_k}^{k-1} \int_{t_p}^{t_{p+1}} K_2(t_k, s)x(s)ds = f_k. \quad (5)$$

Допуская, что значения $v_k,\ k = 1, 2, \ldots, N$ каким-то образом получены, аппроксимируем интегралы в (5) следующим образом

$$\sum_{m=1}^{v_k-1} K_1\left(t_k, \frac{t_{m-1}+t_m}{2}\right) x\left(\frac{t_{m-1}+t_m}{2}\right)(t_m - t_{m-1}) + (\alpha_k - t_{v_k-1})K_1(t_k, t_{v_k-1})x(t_{v_k-1}) +$$
$$+ (t_{v_k} - \alpha_k)K_2(t_k, t_{v_k})x(t_{v_k}) + \sum_{p=v_k}^{k-1} K_2\left(t_k, \frac{t_p+t_{p+1}}{2}\right) x\left(\frac{t_p+t_{p+1}}{2}\right)(t_{p+1} - t_p) = f_k. \quad (6)$$

Здесь для аппроксимации интегралов в первом и четвертом слагаемых (5) применена квадратурная формула средних прямоугольников, для второго слагаемого — левых, а для третьего — правых прямоугольников.

Из (6) имеем

$$\alpha_k = \frac{f_k - S_1 - S_2 + t_{v_k-1}K_1(t_k, t_{v_k-1})x(t_{v_k-1}) - t_{v_k}K_2(t_k, t_{v_k})x(t_{v_k})}{K_1(t_k, t_{v_k-1})x(t_{v_k-1}) - K_2(t_k, t_{v_k})x(t_{v_k})}, \quad (7)$$

где

$$S_1 = \sum_{m=1}^{v_k-1} K_1\left(t_k, \frac{t_{m-1}+t_m}{2}\right) x\left(\frac{t_{m-1}+t_m}{2}\right)(t_m - t_{m-1}),$$
$$S_2 = \sum_{p=v_k}^{k-1} K_2\left(t_k, \frac{t_p+t_{p+1}}{2}\right) x\left(\frac{t_p+t_{p+1}}{2}\right)(t_{p+1} - t_p).$$

Таким образом, при знании номеров $v_k,\ k = \overline{1, N}$, приближенные значения α_k искомой функций в точках сетки могут быть найдены по явной формуле (7).

Идея определения номеров v_k состоит в последовательном для каждого номера узла $k = 1, 2, \ldots, N$, переборе возможных значений v_k :

$$v_1 = 1;$$
$$v_2 = v_1 \text{ или } v_2 = 2;$$
$$v_3 = v_2 \text{ или } v_3 = v_2 + 1 \text{ или } v_3 = 3;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_k = v_{k-1},\ v_k = v_{k-1} + 1, v_k = v_{k-1} + 2,\ \ldots,\ v_k = k,$$

и нахождении соответствующих значений α_k по формуле (7). Перебор для каждого значения k прекращается в случае выполнения условия $\alpha_k \in (t_{v_k-1}, t_{v_k}]$, подтверждающего предположение о принадлежности α_k указанному интервалу.

Нетрудно видеть, что оценка точности приближенного решения задачи (3) по предложенной вычислительной схеме имеет вид

$$\max_{t\in[0,T]} |\alpha_N(t) - \alpha(t)| = O\left(\frac{1}{N^2}\right). \tag{8}$$

4. Арифметическая сложность

Обратимся к вопросу затратности предложенного метода с точки зрения арифметической сложности вычислений. Будем считать количество требуемых арифметических операций, вычислений значений входящих в уравнение функций, а также операций сравнения двух чисел.

1. Вычисление значений функций $f(t), K_1(t,s), K_2(t,s), x(t)$ в узлах сетки и в средних точках:
$$4N + N^2;$$
2. Вычисление значений $\alpha_k,\ k = 1, 2, \dots, N$:
$$12\cdot \overbrace{3\cdot\sum_{k=1}^{N} 2\cdot\frac{1+k-1}{2}(k-1)}^{\text{Вычисление сумм } S_1, S_2} = 36\sum_{k=1}^{N} k(k-1) =$$
$$= 36\left(\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{1+N}{2}N\right) = 12N(N^2-1);$$
3. Оценка количества арифметических операций P_N^1 на перебор возможных значений α_k:
$$P_N^1 \leqslant \sum_{k=1}^{N}(1+2+\dots+k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} k(k+1) = \frac{N(N+1)(N+2)}{6};$$
4. Оценка количества операций сравнения P_N^2 при переборе возможных значений α_k:
$$P_N^2 \leqslant 2P_N^1 = \frac{N(N+1)(N+2)}{3}.$$

Таким образом, получаем общую оценку $P(N)$ арифметической сложности метода:

$$P(N) = 4N + N^2 + P_N^1 + P_N^2 \leqslant 4N + N^2 + 12N(N^2-1) + \frac{N(N+1)(N+2)}{6} +$$
$$+ \frac{N(N+1)(N+2)}{3} = \frac{N(25N^2+5N-14)}{2} = O(N^3). \tag{9}$$

Литература

1. Sidorov D.N. On parametric families of solutions of Volterra integral equations of the first kind with piecewise smooth kernel // Diff. Equat. 2013. 49. P. 210–216.

2. Lorenzi A. Operator equations of the first kind and integro-differential equations of degenerate type in Banach spaces and applications of integro-differential PDE's .// Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2013. Volume 1, Issue 2. P. 50–75.

3. Sidorov D. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals And Control, In:L. O. Chua, ed. World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A: Vol. 87, Singapore: World Scientific Press, 2015 .

4. Sidorov N.A., Sidorov D.N. On the solvability of a class of Volterra operator equations of the first kind with piecewise continuous kernels // Math. Notes. 2014. 96. P. 811–826.

5. Sidorov D., Panasetsky D., Tomin N., Karamov D., Zhukov A., Muftahov I., Dreglea A., Liu F., Li Y. Toward Zero-Emission Hybrid AC/DC Power Systems with Renewable Energy Sources and Storages: A Case Study from Lake Baikal Region // Energies. 2020. 1. 1226.

6. Sidorov D., Tynda A., Muftahov I., Dreglea A., Liu F. Nonlinear Systems of Volterra Equations with Piecewise Smooth Kernels: Numerical Solution and Application for Power Systems Operation // Mathematics. 2020. 8, 1257

7. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. Москва: Наука, 1983. 352 с.

8. Yatsenko Yu. Volterra integral equations with unknown delay time // Methods and Applications of Analysis. 1995. 2 (4). P. 408-419.

9. Tynda A.N. Iterative numerical method for integral models of a nonlinear dynamical system with unknown delay // PAMM. 2009. Volume 9, Issue 1. P. 591—592.

10. Tynda A.N. On the direct numerical methods for systems of integral equations with nonlinear delays // PAMM. 2008. Volume 8, Issue 1. P. 10857–10858.

MSC 65R20, 45G10

Numerical solution of the inverse problem for integral dynamic models with discontinuous kernels

A. N. Tynda[1], D. N. Sidorov[2,3]

Penza State University[1], Melentiev Energy Systems Institute
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences[2],
Irkutsk National Research University[3]

Abstract: The paper presents a numerical method for solving the inverse problem for a mathematical model described by a weakly regular Volterra integral equation of the first kind with kernel having a discontinuity along a smooth curve.

Keywords: Volterra integral equation of the first kind, discontinuous kernels, inverse problem, arithmetic complexity.

References

1. D.N. Sidorov, On parametric families of solutions of Volterra integral equations of the first kind with piecewise smooth kernel, *Diff. Equat.*, 2013, 49, P. 210–216.

2. A. Lorenzi, Operator equations of the first kind and integro-differential equations of degenerate type in Banach spaces and applications of integro-differential PDE's, *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*, 2013, Volume 1, Issue 2, 50–75.

3. D. Sidorov, Integral Dynamical Models: Singularities, Signals And Control, In:L. O. Chua, ed. World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A: Vol. 87, Singapore: World Scientific Press, 2015 .

4. N.A. Sidorov, D.N. Sidorov, On the solvability of a class of Volterra operator equations of the first kind with piecewise continuous kernels, *Math. Notes*, 2014, 96, 811–826.

5. D. Sidorov, D. Panasetsky, N. Tomin, D. Karamov, A. Zhukov, I. Muftahov, A. Dreglea, F. Liu, Y. Li, Toward Zero-Emission Hybrid AC/DC Power Systems with Renewable Energy Sources and Storages: A Case Study from Lake Baikal Region, *Energies*, 2020, 13, 1226.

6. D. Sidorov, A. Tynda, I. Muftahov, A. Dreglea, F. Liu, Nonlinear Systems of Volterra Equations with Piecewise Smooth Kernels: Numerical Solution and Application for Power Systems Operation, *Mathematics*, 2020, 8, 1257.

7. V.M. Glushkov, V.V. Ivanov, V.M. Yanenko, Modelirovanie razvivayushchikhsya sistem, Moskva, Nauka, 1983, 352p.

8. Yu. Yatsenko, Volterra integral equations with unknown delay time, *Methods and Applications of Analysis*, 1995, 2 (4), P. 408-419.

9. A.N. Tynda, Iterative numerical method for integral models of a nonlinear dynamical system with unknown delay, *PAMM*, 2009, Volume 9, Issue 1, P.591–592.

10. A.N. Tynda, On the direct numerical methods for systems of integral equations with nonlinear delays, *PAMM*, 2008, Volume 8, Issue 1, P. 10857–10858.