УДК 517.93

Геометрия фазового пространства комплексного периодическоого уравнения Риккати

Сахаров А. Н.

Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия

Аннотация: В статье рассматриваются некоторые вопросы, связанные с задачей описания топологии траекторий комплексных уравнений Риккати с периодическими коэффициентами. Такое уравнение является результатом проективизации линейной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Ясно, что поведение линейной периодической системы полностью описываются теоремой Флоке-Ляпунова. В двумерном случае, однако, можно определить и полный топологический инвариант потока, порождаемый этой системой. В комплексном случае уточняется ряд известных результатов.

Ключевые слова: уравнение Риккати, линейные расширения потоков, проективные потоки, число вращения, периодические решения, преобразования Мёбиуса.

1. Введение

Комплексное уравнение Риккати с периодическими коэффициентами является результатом проективизации двумерных линейных систем с периодическими коэффициентами. Комплексная линейная система

$$\dot{X} = A(t)x = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & -a(t) \end{pmatrix} X, \quad A(t+2\pi) = A(t), \quad X \in \mathbb{C}^2, \tag{1}$$

определяет непрерывный поток на $S^1 \times \mathbb{C}^2$. Переходя к проективным координатам $z = \dfrac{x_1}{x_2}$, получаем уравнение Риккати с периодическими коэффициентами

$$\dot{z} \;=\; 2a(t)z - c(t)z^2 + b(t). \tag{2}$$

Это уравнение определяет *проективный поток*, индуцированный линейной системой (1). Фазовое пространство проективного потока – произведение $S^1 \times \mathbb{CP}^1$, на котором он действует дробно-линейными преобразованиями (преобразованиями Мёбиуса), которые принимают значения в группе $SL(2, \mathbb{C})$:

$$P^t(z) \;=\; \frac{\alpha(t)z + \beta(t)}{\gamma(t)z + \delta(t)}, \qquad \alpha(t)\delta(t) - \beta(t)\gamma(t) = 1.$$

Будем рассматривать задачу о структуре траекторий проективного потока. Решение этой задачи, в значительной степени, основывается на результатах для вещественного случая [1].

Заметим, что для уравнения (1) чаще всего рассматривалась задача существования (несуществования) 2π-периодически решений [2–4,6]. Возможные типы решений (1) описаны в статье Ж. Кампоса [5]. Топологическая классификация уравнений (1) основанная на свойствах отображения монодромии, являющимся в данном случае преобразованием Мёбиуса, изложена в заметке В. Ю. Тыщенко без доказательств. Оно основано, очевидно, на утверждении о том, что уравнения топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их отображения мнодромии топологически эквивалентны. Условия топологической эквивалентности автоморфизмов пространства $\mathbb{C}^2$ даются теоремами Дж. Роббина [8] и Кёйпера-Роббина [9], которые в данном случае тривиально выполняются. [7]. Компактификицая вещественного уавнения (1) приводит к уравнению на торе. Этот подход использован в работе В. Ш. Ройтенберга [10].

Другим феноменом, связанным с уравнением Рикатти, является появление так называемых *особых периодических решений*, имеющих конечное число разрывов на периоде. Объяснение этого феномена придумал академик Я. Б. Зельдович. Замена $z = \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$ преобразует уравнение (2) в уравнение на торе

$$\dot{\theta} = b(t) - c(t) + (b(t) + c(t))\cos\theta - 2a(t)\sin\theta. \tag{3}$$

Поток, определяемый этим уравнением, имеет полный топологический инвариант – число вращения ρ. Если $\rho = m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то поток на торе имеет два грубых 2π-периодических решения, соответствующие двум периодическим решениям с m разрывами на периоде (рис. 1).

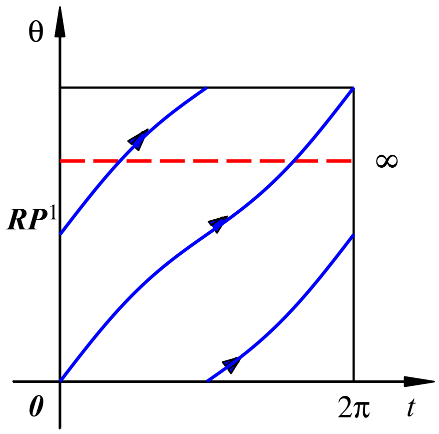

Рис. 1. Периодические решения на торе, соответствующие особым периодическим решениям уравнения Риккати с одним разрывом на периоде.

Таким образом, появление особых периодических решений легко объясняется при изменении топологической структуры фазового пространства. Я. Б. Зельдович использовал особые периодических решений уравнения Риккати для моделирования взрывов (в астрофизике) и, сведя задачу к уравнению на торе, фактически переоткрыл теорию А. Пуанкаре. Он не успел опубликовать свои результаты. Не зная ничего об исследованиях Я. Б. Зельдовича, А. Н. Сахаров и Е. А. Сидоров описали подобный прием в работе [11].

Заметим также, что отображение Пуанкаре для потока на торе, е будет его полным топологическим инвариантом. Числа вращения потока и отображения Пуанкаре одинаковы, но замкнутой траектории, делающей m оборотов по меридиану тора соответствует просто неподвижная точка отображения, т. е. оно «забывает» гомотопический тип периодического решения. Это обстоятельство требует уточнения классификации комплексных уравнений Риккати.

2. Описание динамики

Очевидно, что компактификация фазового пространства уравнения (3) приводит к системе дифференциальных уравнений на многообразии $S^1 \times S^2$. Один из вариантов такой систы будет представлен ниже. Здесь же мы используем отображения Пуанкаре $P(z) = P^{2\pi}(z)$, которое является отображением Мёбиуса сферы Римана.

Лемма 1. *Для любого отображения Мёбиуса P существует предел*

$$\lambda = \delta + i\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln P^n(z)}{n},$$

который не зависит от z.

Доказательство следует из известной теоремы анализа, которая утверждает, что любое преобразование Мёбиуса сферы $\mathbb{CP}^1$ линейным преобразованием может быть приведено к виду

1. $w = e^{\delta + i\rho} z, \quad \delta \neq 0, \quad \rho \neq$ (локсодромический случай);
2. $w = e^{\delta} z, \quad \delta \neq 0$ (гиперболический случай);
3. $w = e^{i\rho} z, \quad \rho \neq$ (эллиптический случай);
4. $w = z + 1$ (параболический случай).

Число λ – это показатель Ляпунова линейной системы (1). Число ρ можно рассматривать как число вращения, определенное с точностью до целого. Как и случае вещественного уравнения Риккати отображение Пуанкаре здесь забывает гомотопический тип решения. Поэтому теорема о топологическом типе решений комплексного уравнения Риккати формулируется с точностью до гомотопии.

Теорема 1. *Для уравнения на $S^1 \times S^2$ выполняется одна из следующих альтернатив:*

1) *существуют два грубых 2π-периодических решения;*
2) *существует континуум периодических решений;*
3) *существует континуум квазипериодических решений;*
4) *существует одно негрубое 2π-периодическое решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В первом случае $z = 0$ и $z = \infty$ – неподвижные точки и они асимптотически устойчивы в положительную или отрицательную сторону. Различие между локсодромическим и гиперболическим случаем аналогично различию между фокусом и узлом в теории непрерывных динамических систем. Следовательно, эти два случая топологически сопряжены.

Второй случай соответствует рациональному значению числа ρ, в то время как третий – иррациональному.

Четвертый случай соответствует ситуации, когда два грубых периодических решения сливаются в одно.

Замечания. Преобразование Мёбиуса, как и всякое дробно-линейное преобразование комплексной плоскости, обладает круговым свойством. Вещественное уравнение Риккати в комплексной области имеет инвариантный цилиндр, что позволяет его компатифицировать стандартным образом и определить число вращения (а также показатели Ляпунова).

По аналогии с этим можно определять число вращения; если соответствующее преобразование Мёбиуса имеет семейство инвариантных окружностей, то имеется инвариантная прямая, которая переводится линейным преобразование в действительную ось.

Фазовое пространство $S^1 \times S^2$ расслаивается на инвариантные торы, которые пересекаются по двум 2π-периодическим траекториям в гиперболическом случае. В эллиптическом случае это объединение инвариантных торов, причем два из них вырождаются в замкнутые кривые. Параболический случай – слоение инвариантных торов касающихся по единственной замкнутой траектории.

3. Заключительные замечания

В качестве заключения этой работы построим вариант дифференциальных уравнений на компактификации линейного потока на $S^1 \times \mathbb{C}$. Процедура триангуляции системы (1) эквивалентна компактификации соответствующего уравнения Риккати (2) в вещественном случае [12]. По аналогии, в комплексном случае естественно использовать для триангуляции матрицу из группы специальных унимодулярных матриц $SU(2)$:

$$Q = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}, \qquad \det Q = 1, \qquad Q^* = Q^{-1}.$$

Если считать, что u и v зависят от времени, то замена $X = QY$ преобразует систему (1) в систему

$$\dot{Y} = T(t)Y = (Q^*(t)A(t)Q(t) - Q^*(t)\dot{Q}(t))Y,$$

которая будет треугольной, если u и v удовлетворяют уравнению

$$2u\bar{v}a(t) + u^2c(t) - \bar{v}^2b(t) = \dot{u}\bar{v} - u\dot{\bar{v}}. \tag{4}$$

Произвольная матрица из группы $SU(2)$ параметризуется углами Эйлера:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{\varphi-\psi}{2}} & i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{\varphi+\psi}{2}} \\ i\sin\frac{\theta}{2}e^{-\frac{\varphi+\psi}{2}} & \cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{\varphi-\psi}{2}} \end{pmatrix},$$

где эти параметры принадлежат области

$$0 \le \varphi < 2\pi, \qquad 0 < \theta < \pi, \qquad -2\pi \le \psi < 2\pi.$$

Из этого следует, что уравнение (4) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}\sin\theta + i\dot{\theta}e^{i\psi} = -ia(t)e^{i\psi}\sin\theta + c(t)e^{i(\varphi+\psi)}\cos\frac{\theta}{2} + b(t)e^{-i(\varphi-\psi)}\sin\frac{\theta}{2}. \tag{5}$$

Производная параметра ψ по t не входит в уравнение (5), поэтому можно рассматривать его постоянным, например, равным нулю. В итоге получаем систему дифференциальных уравнений для угловых переменных θ, φ:

$$\dot{\theta} = -\alpha(t)\sin\theta + \cos^2\frac{\theta}{2}(\gamma(t)\sin\varphi + \eta(t)\cos\varphi) + \sin^2\frac{\theta}{2}(\xi(t)\cos\varphi - \beta(t)\sin\theta),$$

$$\sin\theta\dot{\varphi} = \delta(t)\sin\theta + \cos^2\frac{\theta}{2}(\gamma(t)\cos\varphi - \eta(t)\sin\varphi) + \sin^2\frac{\theta}{2}(\beta(t)\cos\varphi + \xi(t)\sin\theta).$$

В этих формулах

$$a(t) = \alpha(t) + i\delta(t), \quad b(t) = \beta(t) + i\xi(t), \quad c(t) = \gamma(t) + i\eta(t).$$

Еще одно интересное приложение, которое связано с комплексным уравнением Риккати – это теория конечнозонных потенциалов дифференциального оператора

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + V(t)u = \lambda u, \quad V(t+2\pi) = V(t),$$

определенного на пространстве ограниченных на всей оси функций. Конечнозонный потенциал по определению имеет только конечное число интервалов постоянства числа вращения. С точки зрения теории динамических систем задача еще рассматривалась.

Литература

1. Мамаева Н.А., Сахаров А.Н. Геометрия областей устойчивости линейных канонических систем периодических дифференциальных уравнений // Сборник материалов IX международной научной молодежной школы–семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского.Саранск. 2020. С. 225–235.

2. Lloyd N.G. On a class of differential equations of Riccati type // J. London Math. Soc. 1975. V. 10, n. 2. P. 1–10.

3. Campos J., Ortega R. Nonexistens of periodic solutions of a complex Riccati tquation // Differential and Integral Equations. 1996. V. 9, n. 2. P. 247–249.

4. Габдрахманов С.Р., Филиппов В.В. Об отсутствии периодических решений уравнения $z'(t) = z^2 + h(t)$ // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 6. С. 737–740.

5. Campos J. Möbius transformations and htriodic solutions of complex Riccati equations // Bull. London Math. Soc. 1997. V. 29. P. 205–215.

6. Ortega R. The complex periodic problem for a Riccati equation // Ann. Univ. Buchar., Math. Ser. 2012. 3 (61), № 2. P. 219–226.

7. Тыщенко В.Ю. Эквивалентность уравнений Риккати с периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 4. С. 565–567.

8. Robbin J.W. Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. V. 78, n. 6. P. 923–952.

9. Kuiper N., Robbin J. Topological classification of linear endomorphisms // Invent. Math. 1973. V. 19. P. 83–106.

10. Ройтенберг В.Ш. О грубости и бифуркациях уравнений Риккати с периодическими коэффициентами // Труды XI международных Колмогоровских чтений: сборник статей. Ярославль. 2013. С. 103–108.

11. Сахаров А.Н., Сидоров Е.А. О бифуркациях периодических решений комплексных полиномиальных дифференциальных уравнений // Вестник ННГУ. 2004. Вып.1(2). С. 159–170.

12. Сахаров А.Н. Об одном уравнении на цилиндре // Вестник ННГУ. 2003. Вып.1. С. 83–90.

MSC 34C20

Geometry of the phase space of the complex periodic Riccati equation

A. N. Sakharov

Nizhny Novgorod State Agricultural Academy

Abstract: Some questions related to the problem of describing topologies of trajectories of complex Riccati equations with periodic coefficients are considering. Such an equation is the result of prektivization of a linear system of differential equations with periodic coefficients. It is clear that the behavior of a linear periodic system is completely described by the theorem Floquet-Lyapunov. In a two-dimensional case, however, one can define and the complete topological invariant of the flow generated by this system. In the complex case, a number of well-known results are refined.

Keywords: Rikkati equation, extensions of linear flows, projective flows, rotation number, periodic solutions, Möbius transformation.

References

1. N.A. Mamaeva, A.N. Sakharov, Geometry of stability regions of linear canonical systems of periodic differential equations, *Collection of materials of the IX International Scientific Youth School–seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named by E.V. Voskresensky*, Saransk, 2020, P. 225–235.

2. N.G. Lloyd, On a class of differential equations of Riccati type, *J. London Math. Soc.*, 1975, V. 10, n. 2, P. 1–10.

3. J. Campos, R. Ortega, Nonexistens of periodic solutions of a complex Riccati tquation, *Differential and Integral Equations*, 1996, V. 9, n. 2, P. 247–249.

4. S.R. Gabdrakhmanov, V.V. Philippov, On the absence of periodic solutions to the equation $z'(t) = z^2 + h(t)$, *Differential Equations*, 1997, T. 33, № 6, P. 737–740.

5. J. Campos, Möbius transformations and htriodic solutions of complex Riccati equations, *Bull. London Math. Soc*, 1997, V. 29, P. 205–215.

6. R. Ortega, The complex periodic problem for a Riccati equation, *Ann. Univ. Buchar., Math. Ser.*, 2012, 3 (61), № 2, P. 219–226.

7. V.U. Tyshchenko, Equivalence of the Riccati equations with periodic coefficients, *Differential Equations*, 2003, T. 39, № 4, P. 565–567.

8. J.W. Robbin, Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc*, 1972, V. 78, n. 6, P. 923–952.

9. N. Kuiper, J. Robbin, Topological classification of linear endomorphisms, *Invent. Math.*, 1973, V. 19, P. 83–106.

10. V.Sh. Roitenberg, On the roughness and bifurcations of the Riccati equations with periodic coefficients, *Proceedings of the XI International Kolmogorov Readings: a collection of articles*, Yaroslavl, 2013, P. 103–108.

11. A.N. Sakharov, E.A. Sidorov, On bifurcations of periodic solutions of complex polynomial differential equations, *Bulletin of UNN*, 2004, issue 1(2), P. 159–170.

12. A.N. Sakharov, On one equation on a cylinder, *Bulletin of the UNN*, 2003, issue 1, P. 83–90.