УДК 519.624

Метод итеративной регуляризации для нахождения обобщённой неподвижной точки нерастягивающего отображения на множестве гильбертова пространства

Рязанцева И. П.

Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева

Аннотация: Для нерастягивающего оператора A вводится понятие обобщённой неподвижной точки на выпуклом замкнутом множестве Ω гильбертова пространства H. Задача нахождения такой точки относится к классу некорректных, поэтому предположим, что рассматриваемая задача разрешима, а оператор A и множество Ω возмущены. Для нахождения её решения строится операторный метод регуляризации с точными данными, в котором используется оператор проектирования на множество Ω. Установлены условия, при которых решение построенной вспомогательной регуляризованной задачи сходится по норме пространства H к нормальной обобщённой неподвижной точке A на Ω. Для поставленной задачи с возмущённым множеством Ω и возмущённым оператором A построен неявный регуляризованный итерационный процесс, и установлены условия, обеспечивающие сильную сходимость в H построенных итерационных приближений к нормальной обобщённой неподвижной точке нерастягивающего оператора. Приведены примеры параметрических функций, обеспечивающих сходимость построенных приближений к нормальной обобщённой неподвижной точке оператора A на множестве Ω.

Ключевые слова: гильбертово пространство, выпуклое замкнутое множество, нерастягивающий оператор, операторный метод регуляризации, регуляризованный итера-ционный процесс, неподвижная точка, оператор проектирования на выпуклое замкнутое множество, возмущённые данные, теорема Штольца, сходимость.

1. Постановка задачи

Пусть H – вещественное гильбертово пространство, (u, v) – скалярное произведение элементов u и v из H, Ω – выпуклое и замкнутое множество из H, $P_\Omega : H \to \Omega$ – оператор проектирования в H на Ω, $A : H \to H$ – нерастягивающий оператор на Ω, т.е.

$$\|Ax - Ay\| \le \|x - y\| \quad \forall x, y \in \Omega. \tag{1}$$

Построим операторы $B = E - P_\Omega$, $C = E - AP_\Omega$, где $E : H \to H$ – единичный оператор в H. Поскольку оператор P_Ω в H является нерастягивающим [1, § 1.3], то с учётом (1) и [1, § 1.3] заключаем, что операторы B и C монотонны на H, обладают свойствами ограниченности и непрерывности, поскольку удовлетворяют условию Липшица.

Отметим, что на множестве Ω оператор $C = E - A$, а B – нулевой оператор.

Определение 1. *Точку $\bar{x} \in \Omega$ назовём обобщённой неподвижной точкой оператора A на множестве $\Omega \subseteq H$, если*

$$(C\bar{x}, \bar{x} - x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega, \;\; \bar{x} \in \Omega. \tag{2}$$

Поскольку $D(C) = H$, то неравенство (2) эквивалентно следующему неравенству [1, Lemma 1.11.4]

$$(Cx, \bar{x} - x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega, \;\; \bar{x} \in \Omega. \tag{3}$$

Свойство (1) оператора A не гарантирует существование у него неподвижной точки на Ω, а также не обеспечивает сильную сходимость итерационного процесса $x_{n+1} = Ax_n$ к неподвижной точке оператора A [2, гл. 2, § 4].

Пусть множество N обобщённых неподвижных точек оператора A на Ω непусто, тогда из (3) следует выпуклость и замкнутость множества N. Ставится задача построения устойчивого метода нахождения некоторой точки из N.

2. Операторный метод регуляризации для задачи с точными данными

Пусть $0 \in \Omega$, и

$$(Cx, x) \geq 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \geq r > 0, \;\; x \in \Omega, \;\; C = E - AP_\Omega. \tag{4}$$

Построим в H операторное уравнение

$$B\tilde{x}_n + \beta_n \left[C\tilde{x}_n + \alpha_n \tilde{x}_n\right] = 0, \quad \alpha_n > 0, \;\; \beta_n > 0, \;\; n \geq 1. \tag{5}$$

Из свойств операторов B и C следует существование единственного решения уравнения (5) при всех $n \geq 1$ [1, Theorem 1.7.5; 3, § 18]. Исследуем поведение $\tilde{x}_n$ при $n \to \infty$.

Выберем некоторый элемент $x \in N \subset \Omega$. Поскольку $Bx = 0$ при всех $x \in \Omega$, то из (5) получаем равенство

$$\begin{aligned}(B\tilde{x}_n - Bx, \tilde{x}_n - x) + \beta_n[(C\tilde{x}_n - Cx, \tilde{x}_n - x)+ \\ + (Cx, \tilde{x}_n - x) + \alpha_n(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n - x)] = 0, \quad x \in N.\end{aligned} \tag{6}$$

Если $\tilde{x}_n \in \Omega$, то (2) и монотонность отображений B и C приводят к неравенству $(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n - x) \leq 0$, т.е.

$$\|\tilde{x}_n\| \leq \|x\|, \;\; \tilde{x}_n \in \Omega, \;\; x \in N. \tag{7}$$

Пусть теперь $\tilde{x}_n \notin \Omega$. Умножив (5) скалярно на $\tilde{x}_n$, имеем равенство

$$(B\tilde{x}_n, \tilde{x}_n) + \beta_n(C\tilde{x}_n, \tilde{x}_n) + \alpha_n\beta_n\|\tilde{x}_n\|^2 = 0. \tag{8}$$

Поскольку $0 \in \Omega$, и $B(0) = 0$, то первое слагаемое в (8) неотрицательно. Кроме того, $\tilde{x}_n \neq 0$, так как $0 \in \Omega$, а $\tilde{x}_n \notin \Omega$. Предположив существование неограниченной величины $\tilde{x}_n$ при $n \geq 1$, состоящей из точек, не входящих в Ω, и учитывая (4), в (8) приходим к противоречию. Следовательно, приняв во внимание (7), делаем вывод об ограниченности $\tilde{x}_n$ при $n \geq 1$. Значит, $\tilde{x}_n \rightharpoonup \bar{x} \in H$ (для простоты записей обозначения для подсемейства не меняем).

Пусть

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 0. \tag{9}$$

Теперь из (5) в силу ограниченности оператора C имеем сходимость $B\tilde{x}_n \to 0$ при $n \to \infty$. Так как $B : H \to H$ – максимальный монотонный оператор [1, Theorem 1.4.6], то из сходимостей $\tilde{x}_n \rightharpoonup \bar{x}$, $\;B\tilde{x}_n \to 0$ в силу демизамкнутости оператора B вытекает равенство $B\bar{x} = 0$ [1, § 1.4].

Пусть x – произвольный элемент из Ω, тогда из (6) с учётом монотонности отображений B и C получаем неравенство

$$(Cx, \tilde{x}_n - x) + \alpha_n(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n - x) \leq 0, \quad x \in \Omega. \tag{10}$$

Отсюда, устремляя n к бесконечности, и приняв во внимание первое равенство в (9), а также ограниченность $\tilde{x}_n$ при $n \geq 1$, установим неравенство $(Cx, \bar{x} - x) \leq 0,\;\; \bar{x} \in \Omega \quad \forall x \in \Omega$, т.е. $\bar{x} \in N$.

Пусть теперь в (10) x – произвольный элемент из $N \subset \Omega$, $\bar{y}_n = P_\Omega \tilde{x}_n \in \Omega$, $\;n \geq 1$, тогда (10) перепишем в следующей эквивалентной форме

$$(Cx, \bar{y}_n - x) + (Cx, \tilde{x}_n - \bar{y}_n) + \alpha_n(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n - x) \leq 0.$$

В силу определения 1 первое слагаемое в последнем неравенстве неотрицательно. Следовательно, имеет место неравенство

$$\alpha_n(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n - x) \leq \|Cx\| \|\tilde{x}_n - \bar{y}_n\|, \quad x \in N. \tag{11}$$

Используя определение оператора B, равенство (5), ограниченность $\tilde{x}_n$ при $n \geq 1$ и ограниченность оператора C, приходим к соотношениям

$$\|\tilde{x}_n - \bar{y}_n\| = \|\tilde{x}_n - P_\Omega \tilde{x}_n\| = \|B\tilde{x}_n\| \leq \beta_n c_1.$$

Здесь и всюду далее c_k – положительные постоянные, $k = 1, 2, ...$.

Теперь из (11) имеем оценку

$$(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n - x) \leq c_2 \frac{\beta_n}{\alpha_n} \;\; \forall x \in N. \tag{12}$$

или

$$\|\tilde{x}_n - x\|^2 + (x, \tilde{x}_n - x) \leq c_2 \frac{\beta_n}{\alpha_n}, \;\; \forall x \in N.$$

Приняв в последнем неравенстве $x = \bar{x}$, учитывая второе предельное равенство из (9) и слабую сходимость $\tilde{x}_n$ к $\bar{x}$ при $n \to \infty$, установим сходимость $\|\tilde{x}_n - \bar{x}\|$ к нулю при $n \to \infty$. Теперь, переходя к пределу при $n \to \infty$ в (12), получим неравенство $\|\bar{x}\| \leq \|x\|$ при всех $x \in N$. Значит, $\bar{x}$ – обобщённая неподвижная точка оператора A на множестве Ω с минимальной нормой. Далее эту точку обозначаем через x^*, т.е. x^* – единственный элемент из N, определяемый соотношением

$$\|x^*\| = \min\{\|x\| \;\mid\; x \in N\} \tag{13}$$

и называемый нормальной обобщённой неподвижной точкой оператора A на выпуклом замкнутом множестве Ω.

Таким образом, доказано утверждение.

Теорема 1. *Пусть $A : H \to H$ – нерастягивающий на Ω оператор, Ω – выпуклое замкнутое множество из H, $0 \in \Omega$, множество N обобщённых неподвижных точек оператора A на Ω непусто, и имеют место условия (4), (9). Тогда последовательность $\{x_n\}$ решений операторного уравнения (5) при $n \to \infty$ сходится по норме пространства H к единственной нормальной обобщённой неподвижной точке x^* оператора A на множестве Ω.*

3. Итеративный метод нахождения обобщённой неподвижной точки оператора на выпуклом замкнутом множестве

Пусть выполнены условия теоремы 1, и данные задачи, поставленной в п. 1, оператор A и множество Ω возмущены. Предположим, что вместо множества Ω известна последовательность выпуклых замкнутых множеств $\{\Omega_n\},\ n \geq 1, \Omega_n \subseteq H$, причём

$$r(\Omega, \Omega_n) \leq \sigma_n, \tag{14}$$

где $r(\Omega, \Omega_n)$ – хаусдорфово расстояние в H между множествами Ω и Ω_n, $\{\sigma_n\}$ – неубывающая последовательность неотрицательных чисел, $\sigma_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Приближения оператора A задаются семейством отображений

$$\{A_n\},\ \ A_n : H \to H, \quad \Omega_n \subseteq D(A_n) = D(A) = H,\ \ n \geq 1,$$

и справедливы неравенства

$$\|A_n x - Ax\| \leq \delta_n g(\|x\|)\ \ \forall x \in H,\ \ \forall n \geq 1, \tag{15}$$

$$\|A_n x - A_n y\| \leq [1 + h_n]\|x - y\| \quad \forall x,\ \ \forall y \in H, \tag{16}$$

здесь $\{\delta_n\}$ и $\{h_n\}$ – последовательности того же класса, что и $\{\sigma_n\}$, $g(s)(s \geq 0)$ – неотрицательная неубывающая функция.

Отметим, что в наших предположениях оператор $A_n : H \to H$ может и не иметь обобщённой неподвижной точки на Ω_n.

Пусть $x \in H$, тогда при условии (14) верно неравенство

$$\|P_\Omega x - P_{\Omega_n} x\| \leq c\sqrt{\sigma_n}, \tag{17}$$

где c – абсолютная положительная постоянная для всех x, принадлежащих ограниченному множеству в H [4, § 3.4].

Задав некоторый произвольный элемент $y_0 \in H$, построим последовательность $\{y_n\}$, где y_n – элемент из H, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{t_n} + [B_n y_n + \beta_n(C_n y_n + \alpha_n y_n)] = 0, \quad n \geq 1. \tag{18}$$

Здесь $B_n = E - P_{\Omega_n}$, $C_n = E - A_n P_{\Omega_n}$, $\{t_n\}$ – ограниченная последовательность положительных чисел.

Уравнение (18) можно переписать в следующем виде

$$y_n + t_n\,[B_n y_n + \beta_n(C_n y_n + \alpha_n y_n)] = y_{n-1}. \tag{19}$$

Поскольку операторы B_n и C_n монотонны, то оператор $\Lambda_n = E + t_n[B_n + \beta_n(C_n + \alpha_n E)]$ в наших условиях сильно монотонный и непрерывный. Следовательно, уравнение (19), а значит, и (18) однозначно разрешимы в H.

Установим условия, при которых последовательность $\{y_n\}$ сходится по норме H к нормальной обобщённой неподвижной точке оператора A на множестве Ω.

Пусть хотя бы при достаточно больших n справедливо неравенство

$$(B_n y_n + \beta_n(C_n y_n + \alpha_n y_n), y_n) \geq 0. \tag{20}$$

Умножив (18) скалярно на y_n, имеем равенство

$$(y_n - y_{n-1}, y_n) + t_n(B_n y_n + \beta_n(C_n y_n + \alpha_n y_n), y_n) = 0.$$

Отсюда с учётом предположения (20) хотя бы при достаточно больших n приходим к неравенству

$$(y_n - y_{n-1}, y_n) \le 0, \quad n \ge K \ge 1.$$

Отсюда заключаем, что верно неравенство $\|y_n\| \le \|y_{n-1}\|$ при $n > K \ge 1$. Таким образом, установлена ограниченность последовательности $\{y_n\}$, где y_n определяется из (18), т.е.

$$\|y_n\| \le \bar{C} \quad \forall n \ge 1, \quad \bar{C} > 0. \tag{21}$$

Запишем равенство (5) при $n = m$

$$B\tilde{x}_m + \beta_m \left[C\tilde{x}_m + \alpha_m \tilde{x}_m\right] = 0, \quad m \ge 1. \tag{22}$$

Теперь вычтем (22) из (18), результат умножим скалярно на $y_n - \tilde{x}_m$ и придём к следующему равенству

$$\begin{aligned}\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{t_n}, y_n - \tilde{x}_m\right) &+ (B_n y_n - B\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) + (\beta_n C_n y_n - \beta_m C\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) + \\ &+ (\beta_n \alpha_n y_n - \beta_m \alpha_m \tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Введём величину

$$\rho_{n,m} = \frac{\|y_n - \tilde{x}_m\|^2}{2}$$

и найдём оценки слагаемых, входящих в (23).

Учитывая монотонность оператора B_n и оценку (17), имеем

$$\begin{aligned}(B_n y_n - B\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) &= (B_n y_n - B_n\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) + (B_n\tilde{x}_m - B\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) \ge \\ &\ge -c\sqrt{\sigma_n}\|y_n - \tilde{x}_m\|. \end{aligned} \tag{24}$$

Далее запишем очевидное равенство

$$\begin{aligned}(\beta_n C_n y_n - \beta_m C\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) &= \beta_n (C_n y_n - C_n\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) - \beta_n (C\tilde{x}_m - C_n\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) - \\ &- [\beta_m - \beta_n](C\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m). \end{aligned} \tag{25}$$

Построим оценки для слагаемых из правой части (25). Нерастяжимость оператора P_{Ω_n}, условие (16) и определение оператора C_n обеспечивают справедливость следующих соотношений

$$\begin{aligned}(C_n y_n &- C_n\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) = \|y_n - \tilde{x}_m\|^2 - (A_n P_{\Omega_n} y_n - A_n P_{\Omega_n}\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) \ge \\ &\ge \|y_n - \tilde{x}_m\|^2 - (1 + h_n)\|P_{\Omega_n} y_n - P_{\Omega_n}\tilde{x}_m\|\|y_n - \tilde{x}_m\| \ge -2h_n \rho(y_n, \tilde{x}_m). \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь $\rho(y_n, \tilde{x}_m) = \|y_n - \tilde{x}_m\|^2/2$.

Свойство нерастяжимости оператора проектирования на множество Ω и включение $0 \in \Omega$ приводят к неравенству

$$\|P_\Omega z\| \le \|z\| \quad \forall z \in H.$$

Далее, используя последнее неравенство, (15) – (17), запишем цепочку соотношений

$$\begin{aligned}\|C_n\tilde{x}_m - C\tilde{x}_m\| &= \|A_n P_{\Omega_n}\tilde{x}_m - AP_\Omega\tilde{x}_m\| \le \|A_n P_{\Omega_n}\tilde{x}_m - A_n P_\Omega\tilde{x}_m\| + \\ &+ \|A_n P_\Omega\tilde{x}_m - AP_\Omega\tilde{x}_m\| \le (1 + h_n)\|\|P_{\Omega_n}\tilde{x}_m - P_\Omega\tilde{x}_m\| + \\ &+ \delta_n g(\|P_\Omega\tilde{x}_m\|) \le c_3\left[(1 + h_n)\sqrt{\sigma_n} + \delta_n\right] \le c_4\left(\delta_n + \sqrt{\sigma_n}\right). \end{aligned} \tag{27}$$

Предположим, что последовательность $\{(\beta_{n-1}-\beta_n)/t_n\}$ убывает, тогда при $n \le m$ справедливо неравенство (формула (68) в [5])

$$\beta_n - \beta_m \le \frac{\beta_{n+1}-\beta_n}{t_{n+1}}(T_n - T_m), \quad T_k = \sum_{i=1}^{k} t_i, \quad \tau_i > 0, \;\; i \ge 1. \tag{28}$$

Теперь ограниченность оператора C, ограниченность последовательностей $\{y_n\}$, $\{\tilde{x}_m\}$ и оценка (17) позволяют сделать вывод о справедливости неравенства

$$[\beta_n - \beta_m](C\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) \ge -c_5\frac{\beta_{n+1}-\beta_n}{\tau_{n+1}}(T_n - T_m), \quad n \le m. \tag{29}$$

Оценим последнее слагаемое в (23):

$$\begin{aligned}(\beta_n\alpha_n y_n \;\; &- \;\; \beta_m\alpha_m\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) = \beta_n\alpha_n\|y_n - \tilde{x}_m\|^2 + (\beta_n\alpha_n - \beta_m\alpha_m)(\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) \ge \\ &\ge \;\; 2\beta_n\alpha_n\rho(y_n, \tilde{x}_m) - c_6\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{\tau_{n+1}}(T_n - T_m), \quad n \le m,\end{aligned} \tag{30}$$

где $\lambda_k = \beta_k\alpha_k$, т.е. при оценке второго слагаемого мы использовали неравенство (28) для последовательности $\{\lambda_n\}$, которая в наших условиях является убывающей.

Таким образом, используя (24) – (27), (29) и (30), а также неравенство

$$\|y_n - \tilde{x}_m\|^2 \le \|y_{n-1} - \tilde{x}_m\|^2 + 2(y_n - \tilde{x}_m, y_n - y_{n-1})$$

от (23) приходим к следующему неравенству

$$\|y_n - \tilde{x}_m\|^2 - \|y_{n-1} - \tilde{x}_m\|^2 \le -2\lambda_n\|y_{n-1} - \tilde{x}_m\|^2 + \mu_n^m, \tag{31}$$

где

$$\mu_n^m = c_7\left[\sqrt{\sigma_n} + h_n + \delta_n + \left(\frac{\beta_n - \beta_{n-1}}{\tau_n} + \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\tau_n}\right)(T_n - T_m)\right], \;\; n \ge 1, \;\; n \le m. \tag{32}$$

Здесь элемент $y_0 \in H$ задаётся.

Теперь, применив к неравенству (31) лемму 1 из [5], приходим к следующей оценке

$$\|y_n - \tilde{x}_m\|^2 \le \|y_0 - \tilde{x}_m\|^2 \exp(-F_n) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i^m \tau_i \exp(F_i - F_n), \;\; n \ge 1, \;\; n \le m, \tag{33}$$

где

$$F_j = \sum_{i=1}^{j} e_i, \quad e_i = \frac{2\lambda_i\tau_i}{2\lambda_i\tau_i + 1}. \tag{34}$$

Положив в неравенстве (33) $n = m$, получаем оценку

$$\|y_m - \tilde{x}_m\|^2 \le \|y_0 - \tilde{x}_m\|^2 \exp(-F_m) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^m \tau_i \exp(F_i - F_m), \; n \ge 1, \;\; n \le m. \tag{35}$$

Предположим, что

$$\lim_{m\to\infty} F_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} e_i = \infty, \tag{36}$$

где величина e_i определена в (34).

Значит, первое слагаемое в правой части (35) есть бесконечно малая при $m \to \infty$. Установим условия, при которых и второе слагаемое в правой части неравенства (35) при $m \to \infty$ стремится к нулю. Для этого используем теорему Штольца:

$$\begin{aligned}
\Lambda^m &= \sum_{i=1}^{m} \mu_i^m \tau_i \exp(F_i - F_m) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \mu_i^m \tau_i \exp(F_i)}{\exp(F_m)} \sim \\
&\sim \frac{\sum_{i=1}^{m} \mu_i^m \tau_i \exp(F_i) - \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i^{m-1} \tau_i \exp(F_i)}{\exp(F_m) - \exp(F_{m-1})} = \\
&= \frac{\mu_m^m \tau_m \exp(F_m)}{\exp(F_m) - \exp(F_{m-1})} + \frac{\sum_{i=1}^{m-1} [\mu_i^m - \mu_i^{m-1}] \tau_i \exp(F_i)}{\exp(F_m) - \exp(F_{m-1})}. \qquad (37)
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{\mu_m^m \tau_m \exp(F_m)}{\exp(F_m) - \exp(F_{m-1})} \sim \frac{\mu_m^m \tau_m}{F_m - F_{m-1}} = -\frac{\sqrt{\sigma_n} + h_m + \delta_m}{2\alpha_m \beta_m} (2\lambda_m \tau_m + 1),$$

то предпоследнее слагаемое в (37) является бесконечно малой при $n \to \infty$, если

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\sqrt{\sigma_n} + h_m + \delta_m}{\alpha_m \beta_m} = 0. \qquad (38)$$

Теперь установим условия сходимости к нулю при $\to \infty$, последнего слагаемого в (37). В силу (34) имеем

$$G^m = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} [\mu_i^m - \mu_i^{m-1}] \tau_i \exp(F_i)}{\exp(F_m)(F_m - F_{m-1})} \leq c_8 \frac{\sum_{i=1}^{m-1} [\mu_i^m - \mu_i^{m-1}] \tau_i \exp(F_i)}{\exp(F_m) \lambda_m \tau_m} =$$

$$= -c_8 \frac{\sum_{i=1}^{m-1} [(\beta_i - \beta_{i-1})/\tau_i + (\lambda_i - \lambda_{i-1})/\tau_i] \exp(F_i)}{\exp(F_m) \lambda_m} \sim$$

$$\sim -c_8 \frac{[(\beta_m - \beta_{m-1})/\tau_m + (\lambda_m - \lambda_{m-1})/\tau_m] \exp(F_{m-1})}{\exp(F_m) \lambda_m - \exp(F_{m-1}) \lambda_{m-1}} =$$

$$= -c_8 \frac{(\beta_m - \beta_{m-1})/\tau_m + (\lambda_m - \lambda_{m-1})/\tau_m}{\exp(F_m - F_{m-1}) \lambda_m - \lambda_{m-1}} \sim -c_8 \frac{(\beta_m - \beta_{m-1})/\tau_m + (\lambda_m - \lambda_{m-1})/\tau_m}{\lambda_m - \lambda_{m-1} - 2\lambda_m^2 \tau_m / (1 + 2\lambda_m \tau_m)}.$$

Следовательно, приходим к следующему условию

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(\beta_m - \beta_{m-1})/\tau_m + (\lambda_m - \lambda_{m-1})/\tau_m}{\lambda_{m-1} - \lambda_m + 2\lambda_m^2 \tau_m / (1 + 2\lambda_m \tau_m)} = 0. \qquad (39)$$

Таким образом, с учётом теоремы 1 доказано утверждение.

Теорема 2. *Пусть H – гильбертово пространство, $A : H \to H$ – нерастягивающий на выпуклом замкнутом множестве $\Omega \subseteq H$ оператор, $0 \in \Omega$, множество N обобщённых неподвижных точек оператора A на Ω непусто, и имеет место условие (4). Предположим, что вместо множества Ω и оператора A известны последовательности $\{\Omega_n\}$ и $\{A_n\}$, где Ω_n – выпуклое замкнутое множество в H, $A_n : H \to H$, причём справедливы условия (14) - (16). Построим последовательность $\{y_n\}$, где $y_n \in H$ и удовлетворяет уравнению (18) при $B_n = E - P_{\Omega_n}$, $C_n = E - A_n P_{\Omega_n}$, $P_{\Omega_n} : H \to \Omega_n$ – оператор проектирования в H на выпуклое замкнутое* *множество Ω_n, $\{t_n\}$ – ограниченная последовательность положительных чисел, причём хотя бы при достаточно больших n имеет место неравенство (20), последовательность $\{(\beta_{n-1}-\beta_n)/\tau_n\}$ убывает, и выполнены предельные равенства (38), (39). Тогда последовательность $\{y_n\}$ при $n\to\infty$ сильно сходится в H к единственной нормальной обобщённой неподвижной точке оператора A на множестве Ω.*

Итерационные процессы для нахождения неподвижных точек нерастягивающих отображений изучались, например, в [6-9].

Класс параметрических последовательностей, удовлетворяющих условиям теоремы 2 непуст. Укажем, например, следующие последовательности:

$$\alpha_n=\frac{1}{n^{\alpha}},\quad \beta_n=\frac{1}{n^{\beta}},\quad h_n=\frac{1}{n^{h}},\quad \delta_n=\frac{1}{n^{\delta}}$$

где $\alpha,\beta,h,\delta,\sigma$ – положительные постоянные. Условия (9) будут выполнены при $\alpha<\beta$, предположение (38) имеет место, если $\alpha+\beta<\min\{\sigma/2,h,\delta\}$.

Итерационные процессы для нахождения неподвижных точек нерастягивающих отображений изучались, например, в [6-9].

Литература

1. Рязанцева И.П. Непрерывные методы регуляризации первого порядка для обобщённых вариационных неравенств // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2010. Т. 50, № 4. С. 636–650.

2. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. Москва: Наука, 1972. 416 с.

3. Alber Ya., Ryazantseva I. Nonlinear ill-posed problems of monotone type. Dordrecht, Springer, 2006. 410 с.

4. Рязанцева И.П. Избранные главы теории операторов монотонного типа. Нижний Новгород, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, 2008. 272 с.

5. Рязанцева И.П. Итеративная регуляризация третьего порядка для монотонных уравнений в гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 3. С. 406–416.

6. Halperin B. Convergence of approximantes to fixed point of non-expansive nonlinear maps in Banach spaces // Arch. Ration Mech. Anal. 1967. T. 24,. № 1. С. 82–90

7. Browder F.E. Fixed points of nonexpansive maps // Arch. Ration Mech. Anal. 1967. T. 24, № 1. С. 82–90.

8. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург, Уральская издательская фирма "Наука 1993. 262 с.

MSC 34G10 58D25

Iterative regularization method for finding the generalized fixed point of non-stretching operator on the set of Hilbert space

I. P. Ryazantseva

Nizhny Novgorod state technical University n. a. R. E. Alekseeva

Abstract: For the non-stretching operator A, the concept of a generalized fixed point on a convex closed set Ω of the Hilbert space H is introduced. The problem of finding such a point belongs to the class of incorrect ones, so let's assume that the problem in question is solvable, and the operator A and the set Ω are perturbed. To find its solution, an operator regularization method with exact data is constructed, in which the projection operator is used on the set Ω. Conditions are established under which the solution of the constructed auxiliary regularized problem converges according to the norm of the space H to the normal generalized fixed point A on Ω. Next, for the problem with the perturbed set Ω and the perturbed operator A, an implicit regularized iterative process is constructed, and conditions are established that ensure strong convergence in H of the constructed iterative approximations to the normal generalized fixed point of the non-stretching operator. Examples of parametric functions that pecivaing the convergence of the constructed approximations to normal generalized fixed point of the operator A on the set Ω.

Keywords: Hilbert space, a convex closed set, narastayushey operator, operator regularization method, regularized iterational process, fixed point design operator on a convex closed set, the perturbed data, convergence.

References

1. I.P. Ryazantseva, Neprerivnii method pervogo poryadka dlya obobschennih variacionnih neravenstv, *Journal vichislit. matem. i matem. fiziki*, 2010, vol. 50, iss. 4, P. 606-619.

2. M.M. Vainberg, Variacionniy metod i metod monotonnih operatorov v teorii nelineynih uravneniy, Moskow, Nauka Publ., 1972, 416 p.

3. Ya. Alber, I. Ryazantseva, Nonlinear ill-posed problems of monotone type. Dordrecht, Springer Publ., 2006, 410 p.

4. I.P. Ryazantseva, Izbrannye glavy teorii operatorov monotonnogo tipa, Nizhni Novgorod, Nizhny Novgorod State Tehnical University named after R.E. Alekseev Publ., 2008, 272 p.

5. I.P. Ryazantseva, First-order continuous regularization methods for generalized variational inequalities, *Differetial equations*, 2020, vol. 56, iss. 3, P. 406-616.

6. B. Halperin, Convergence of approximantes to fixed point of non-expansive nonlinear maps in Banach spaces, *Arch. Ration Mech. Anal.*, 1967, vol. 24, iss. 1, P. 82–90.

7. F.E. Browder, Fixed points of nonexpansive maps, *Arch. Ration Mech. Anal.*, 1967, vol. 24, iss. 1, P. 82–90.

8. V.V. Vasin, A.L. Ageev, Nekorrektnie zadachi s apriopnoi informaciei, Ekaterinburg, Ural'skaya izdatel'skaya firma "Nauka 1993, 262 p.