УДК 512.64

Об алгебро-геометрических свойствах циклических подпространств линейных операторов

Никонов В. И.

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва

Аннотация: В работе исследуются алгебраические и геометрические свойства циклических подпространств относительно линейных операторов, возникающих при исследовании линейных систем управления. Полученные свойства выражены в терминах минимальных аннулирующих многочленов суммы и пересечения соответствующих циклических подпространств. Использование полученных результатов позволяет выбрать искомое управляющее воздействие для решения задач частичной устойчивости.

Ключевые слова: линейный оператор, циклическое подпространство, минимальный аннулирующий многочлен.

В работе представлены результаты исследований, начатых в [1, 2]. Опираясь на [3, 4], исследованы взаимосвязи базисов двух циклических подпространств с минимальными аннулирующими многочленами этих подпространств относительно заданного линейного оператора.

При исследовании различных характеристик линейных систем управления возникает задача выбора управляющего воздействия таким образом, чтобы параметры системы удовлетворяли требуемым характеристикам. Изучение свойств системы управления позволяют выбрать управляющее воздействие так, чтобы динамика системы определялась заданными характеристиками.

Однако, при решении задач частичной устойчивости, управляемости, стабилизации возникают определенные трудности. Так, например, при решении задач частичной устойчивости, если система уже является устойчивой относительно каких-то переменных и в предположении, что система не является вполне управляемой, то нет необходимости воздействовать на все компоненты фазового вектора системы. Возникает задача определения тех компонент фазового вектора, воздействие на которые позволяет все же добиться устойчивости данной системы.

Рассмотрим линейный оператор

$$\mathcal{D} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}.$$

где $\mathcal{L}-$ конечномерное линейное пространство.

Пусть $x \neq 0-$ произвольный элемент линейного пространства $\mathcal{L}$. Тогда в силу конечномерности пространства $\mathcal{L}$ найдется такое число $s \in N$, такое что векторы $x, \mathcal{D}x, \ldots, \mathcal{D}^{s-1}x-$ линейно независимы, а вектор $\mathcal{D}^s x$ является линейной комбинацией предыдущих векторов: $\mathcal{D}^s x = -\gamma_s \mathcal{D}^{s-1}x - \cdots - \gamma_2 \mathcal{D}x - \gamma_1 x$. Таким образом,

$$\sigma(\lambda) = \lambda^s + \gamma_s \lambda^{s-1} + \cdots + \gamma_2 \lambda + \gamma_1,$$

где $0 \leq s \leq \dim \mathcal{L}$, является минимальным аннулирующим многочленом вектора x относительно линейного оператора $\mathcal{D}$.

Тогда справедливо соотношение

$$\sigma(\mathcal{D})x = 0.$$

Пусть a и b заданные ненулевые элементы линейного пространства $\mathcal{L}$.

Рассмотрим циклические подпространства U_a и U_b оператора $\mathcal{D}$, порождаемые элементами a и b:

$$U_a = \left\langle a, \mathcal{D}a, \ldots, \mathcal{D}^{m-1}a \right\rangle, \dim U_a = m,$$

$$U_b = \left\langle b, \mathcal{D}b, \ldots, \mathcal{D}^{n-1}b \right\rangle, \dim U_b = p.$$

Таким образом, минимальные аннулирующие многочлены элементов a и b имеют, соответственно, вид

$$\sigma_a(\lambda) = \lambda^m + \alpha_m\lambda^{m-1} + \cdots + \alpha_2\lambda + \alpha_1,$$

$$\sigma_b(\lambda) = \lambda^p + \beta_p\lambda^{p-1} + \cdots + \beta_2\lambda + \beta_1.$$

Рассмотрим подпространства $U_a + U_b$ и $U_a \cap U_b$.

Предложение 1. *Если* $\dim(U_a \cap U_b) = k > 0$, *то в подпространстве* $U_a + U_b$ *подпространство*

$$U_a \cap U_b = \left\langle \mathcal{D}^{m-k}a, \mathcal{D}^{m-k+1}a, \ldots, \mathcal{D}^{m-1}a \right\rangle = \left\langle \mathcal{D}^{p-k}b, \mathcal{D}^{p-k+1}b, \ldots, \mathcal{D}^{p-1}b \right\rangle,$$

является инвариантным подпространством линейного оператора $\mathcal{D}$.

Следствие 1. *Исходя из условий леммы 1 следует, что*

$$U_a + U_b = \left\langle \underbrace{a, \mathcal{D}a, \ldots, \mathcal{D}^{m-k-1}a}_{m-k}, \underbrace{\mathcal{D}^{m-k}a, \mathcal{D}^{m-k+1}a, \ldots, \mathcal{D}^{m-1}a}_{k}, \underbrace{b, \mathcal{D}b, \ldots, \mathcal{D}^{p-k-1}b}_{p-k} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \underbrace{a, \mathcal{D}a, \ldots, \mathcal{D}^{m-k-1}a}_{m-k}, \underbrace{\mathcal{D}^{p-k}b, \mathcal{D}^{p-k+1}b, \ldots, \mathcal{D}^{p-1}b}_{k}, \underbrace{b, \mathcal{D}b, \ldots, \mathcal{D}^{p-k-1}b}_{p-k} \right\rangle,$$

$$\dim(U_a + U_b) = m - k + k + p - k = m + p - k.$$

Очевидно, что подпространство

$$U_a \cap U_b = \left\langle \mathcal{D}^{m-k}a, \mathcal{D}^{m-k+1}a, \ldots, \mathcal{D}^{m-1}a \right\rangle$$

является инвариантным циклическим подпространством относительно оператора $\mathcal{D}$ порождаемым элементом $c = \mathcal{D}^{m-k}a$. При этом

$$U_a \cap U_b = \left\langle c, \mathcal{D}c, \ldots, \mathcal{D}^{k-1}c \right\rangle.$$

Тогда минимальный аннулирующий многочлен этого циклического подпространства имеет вид:

$$\sigma_c(\lambda) = \lambda^k + \delta_k\lambda^{k-1} + \cdots + \delta_2\lambda + \delta_1.$$

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{B}$ сужение линейного оператора $\mathcal{D}$ на подпространство $U_a + U_b$, т.е. $\mathcal{B}x = \mathcal{D}x, x \in U_a + U_b$. Тогда в базисе

$$e_1 = \mathcal{D}^{m-k}a, \ldots, e_k = \mathcal{D}^{m-1}a, e_{k+1} = a, e_{k+2} = \mathcal{D}a, \ldots, e_m = \mathcal{D}^{m-k-1}a,$$

$$e_{m+1} = b, e_{m+2} = \mathcal{D}b, \ldots, e_{m+p-k} = \mathcal{D}^{p-k-1}b,$$

матрица линейного оператора $\mathcal{B}$ имеет вид:

$$B_e = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\delta_1 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & -\kappa_1 \\ 1 & \cdots & 0 & -\delta_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -\kappa_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\delta_k & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -\kappa_k \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом, характеристический многочлен оператора $\mathcal{B}$ имеет вид:

$$\chi_{\mathcal{B}}(\lambda) = \lambda^{m+p-2k}\sigma_c(\lambda) = \lambda^{m+p-k} + \delta_k\lambda^{m+p-k-1} + \cdots + \delta_2\lambda^{m+p-2k+1} + \delta_1\lambda^{m+p-2k}.$$

Следствие 2. *Если $U_a \cap U_b = 0$, то $U_a + U_b = U_a \oplus U_b$. При этом матрица оператора $\mathcal{B}$ в базисе*

$$e_1 = a, \mathcal{D}a, \ldots, e_m = \mathcal{D}^{m-1}a, e_{m+1} = b, e_{m+2} = \mathcal{D}b, \ldots, e_{m+p} = \mathcal{D}^{p-1}b,$$

имеет вид:

$$B_e = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\alpha_m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\beta_2 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\beta_p \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен оператора $\mathcal{B}$ представим в виде:

$$\chi_{\mathcal{B}}(\lambda) = \sigma_a(\lambda)\sigma_b(\lambda).$$

Литература

1. Никонов В.И. К частичной устойчивости линейных систем относительно заданной компоненты фазового вектора // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 23, № 1. С. 43–57.

2. Никонов В.И. Геометрический аспект устойчивости линейных систем относительно части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 2. С. 95–99.

3. Воротников В. И., Румянцев В. В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. Научный мир, 2001. 320 с.

4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц М.: Наука, 1967. 576 с.

MSC 47A15

On algebro-geometric properties of cyclic subspaces of linear operators

V. I. Nikonov

National Research Ogarev Mordovia State University

Abstract: The algebraic and geometric properties of cyclic subspaces with respect to linear operators, which arise in the study of linear control systems, are investigated. The resulting properties are expressed in terms of the minimal annihilating polynomials of the sum and intersection of the corresponding cyclic subspaces. The use of the obtained results allows one to choose the desired control action for solving problems of partial stability.

Keywords: linear operator, cyclic subspace, minimal annihilating polynomial.

References

1. V.I. Nikonov, On the partial stability of linear systems with respect to a given component of the phase vector, *Journal of the Middle Volga Mathematical Society*, 2017, 23, 1, P. 43-57.

2. V.I. Nikonov, Geometric aspect of stability of linear systems with respect to part of the variables, *Journal of the Middle Volga Mathematical Society*, 2011, 13, 2, P. 95-99.

3. V.I. Vorotnikov, V.V. Rumyantsev, Stability and control with respect to the coordinates of the phase vector of dynamical systems: theory, methods and applications, Scientific world, M, 2001, 320 p.

4. F.R. Gantmakher, The theory of matrice, Nauka, M, 1967, 576 p.