УДК 517.938.5

Классификация надстроек над декартовыми произведениями меняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности*

Зинина С. Х.

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва

Аннотация: В работе вводится класс декартовых произведений меняющих ориентацию грубых преобразований окружности, изучается их динамика. Подробно описывается структура множества периодических точек, приводится теорема о топологической сопряженности диффеоморфизмов рассматриваемого класса. В теории гладких динамических систем весьма полезной является конструкция, позволяющая по данному диффеоморфизму f многообразия построить поток на многообразии с размерностью, на единицу большей, этот поток носит название надстройки над f. Вводится понятие надстройки над диффеоморфизмами рассматриваемого класса, описываются всевозможные виды и число орбит надстройки; доказывается теорема о топологии многообразия, на котором задана надстройка. Для топологической эквивалентности надстроек над диффеоморфизмами нашего класса необходима и достаточна топологическая сопряженность диффеоморфизмов, над которыми берутся надстройки.

Ключевые слова: диффеоморфизмы окружности, меняющие ориентацию диффеоморфизмы окружности, декартово произведение меняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности, надстройка над диффеоморфизмом, топологическая классификация диффеоморфизмов

В 1937 г. А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин в работе [1] ввели понятие грубой системы дифференциальных уравнений на плоскости, которая имеет конечное число состояний равновесия и предельных циклов, причем все они являются гиперболическими и не существует траекторий, идущих из седла в седло. В 1939 г. А. Г. Майером [2] было введено понятие грубости для динамических систем с дискретным временем на окружности, в рамках доказательства грубости и типичности диффеоморфизмов Морса-Смейла на окружности были изучены грубые преобразования окружности, описана их динамика и получена топологическая классификация. В частности, им были рассмотрены меняющие ориентацию преобразования окружности и доказано, что они имеют четное число периодических точек, половина из которых является стоковыми, половина – источниковыми, при этом в точности две точки являются неподвижными, а все остальные имеют период 2. Класс топологической сопряженности такого диффеоморфизма полностью определяется числом периодических точек и типом неподвижных точек.

Из работы [3] известно, что декартовы произведения меняющих ориентацию грубых преобразований окружностей топологически сопряжены тогда и только тогда, когда сопряжены диффеоморфизмы на каждой компоненте декартового произведения. В работе [4] получена полная топологическая классификация n-мерных декарто-

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90069 и фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» проект № 19-7-1-15-1.

вых произведений грубых преобразований окружности. Все отображения такого типа заданы на n-мерном торе. Установлено, что необходимым и достаточным условием сопряженности таких гомеоморфизмов является покомпонентная сопряженность. Заметим, что этот результат принципиально отличается от результата, полученного в работе [7], где рассматривались декартовы произведения рациональных поворотов, для которых необходимым и достаточным условием топологической сопряженности является период периодических орбит.

В теории гладких динамических систем полезной является конструкция, позволяющая по данному диффеоморфизму f многообразия построить поток на многообразии с размерностью на единицу большей, этот поток носит название надстройки над f. В работе [5] рассмотрены надстройки над диффеоморфизмами Морса-Смейла с тремя периодическими орбитами, которые, в свою очередь, являются потоками Морса-Смейла без неподвижных точек с тремя периодическими траекториями.

Несложно показать, что надстройки над топологически сопряженными диффеоморфизмами являются топологически эквивалентными потоками. Обратное в общем случае неверно. Из работы [6] следует, что существуют эквивалентные потоки, являющиеся надстройками над топологически несопряженными грубыми сохраняющими ориентацию диффеоморфизмами. В то же время, надстройки над меняющими ориентацию диффеоморфизмами окружностей эквивалентны тогда и только тогда, когда топологически сопряжены диффеоморфизмы окружностей.

Рассмотрим класс диффеоморфизмов двумерного тора следующего вида:

$$f_{q_1,\nu_1,q_2,\nu_2} = f_{q_1,\nu_1} \times f_{q_2,\nu_2} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2.$$

Предложение 1. *Для любого диффеоморфизма f_{q_1,ν_1,q_2,ν_2} множество $Per(f_{q_1,\nu_1,q_2,\nu_2})$ состоит из $4q_1q_2$ периодических точек, из которых $2q_1q_2$ седловых, q_1q_2 стоковых и q_1q_2 источниковых. Четыре точки из $4q_1q_2$ являются неподвижными, а остальные $4q_1q_2 - 4$ точки имеют период 2. При этом:*

1) если $\nu_1 + \nu_2 = -2$, то все 4 неподвижные точки являются источниковыми;

2) если $\nu_1 + \nu_2 = -1$, то две неподвижные точки являются источниковыми, две – седловыми;

3) если $\nu_1 = \nu_2 = 0$, то одна неподвижная точка является источниковой, одна – стоковой и две – седловыми;

4) если $\nu_1\nu_2 = -1$, то все неподвижные точки являются седловыми;

5) если $\nu_1 + \nu_2 = 1$, то две неподвижные точки являются стоковыми, две – седловыми;

6) если $\nu_1 + \nu_2 = 2$, то все 4 неподвижные точки являются стоковыми.

Верно следующее предложение.

Предложение 2 (теорема 1.1 из [3]). *Два диффеоморфизма f_{q_1,ν_1,q_2,ν_2} и $f_{q_1',\nu_1',q_2',\nu_2'}$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда либо $q_1 = q_1'$, $q_2 = q_2'$, $\nu_1 = \nu_1'$, $\nu_2 = \nu_2'$, либо $q_1 = q_2'$, $q_2 = q_1'$, $\nu_1 = \nu_2'$, $\nu_2 = \nu_1'$.*

Пусть дан диффеоморфизм $\phi : M^n \to M^n$ и ξ^t — поток на многообразии $M^n \times \mathbb{R}$, порожденный векторным полем, состоящим из единичных векторов, параллельных $\mathbb{R}$ и направленных в $+\infty$ такой, что $\xi^t(x,r) = (x, r+t)$. Определим диффеоморфизм $g : M^n \times \mathbb{R} \to M^n \times \mathbb{R}$ формулой $g(x,r) = (\phi(x), r-1)$. Положим $G = \{g^k \ , k \in \mathbb{Z}\}$ и $M_\phi = (M^n \times \mathbb{R})/G$. Обозначим через $p_\phi : M^n \times \mathbb{R} \to M_\phi$ естественную проекцию и через ϕ^t поток на многообразии M_ϕ, заданный формулой $\phi^t(x) = p_\phi(\xi^t(p_\phi^{-1}(x)))$. Поток ϕ^t называется *надстройкой над диффеоморфизмом ϕ*.

Пусть $\phi = f_{q_1,\nu_1,q_2,\nu_2} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ и $\phi' = f_{q'_1,\nu'_1,q'_2,\nu'_2} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ диффеоморфизмы торов и $\phi^t : M_\phi \to M_\phi$, $\phi'^t : M_{\phi'} \to M_{\phi'}$ – надстройки над данными диффеоморфизмами.

Для потоков ϕ^t и ϕ'^t верна следующая теорема.

Теорема 1. *Надстройки ϕ^t и ϕ'^t топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда топологически сопряжены диффеоморфизмы ϕ и ϕ'.*

Другими словами, надстройки над декартовыми произведениями меняющих ориентацию грубых преобразований окружностей топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда сопряжены соответствующие диффеоморфизмы торов.

Кроме того, несущее многообразие рассматриваемых потоков гомеоморфно замкнутому 3-многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0,1]/\varphi$, где $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ – алгебраический автоморфизм тора, заданный матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $(x,1) \sim (\varphi(x), 0)$.

Литература

1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // Доклады АН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247–250.

2. Майер А.Г. Грубое преобразование окружности в окружность // Ученые записки Горьк. гос. ун-та. 1939. Т. 12. С. 215–229.

3. Гуревич Е.Я., Зинина С.Х. О топологической классификации градиентно-подобных систем на поверхностях, являющихся локальными прямыми произведениями // Журнал Средневолжского математического общества. 2015. Т. 17, № 1. С. 37–47.

4. Голикова И.В., Зинина С.Х. Топологическая сопряженность n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности // Известия Высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 6. С. 851–862. DOI: https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-6-851-862

5. Шубин Д.Д. Топология несущих многообразий несингулярных потоков с тремя нескрученными орбитами // Известия Высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, вып. 6. С. 863–868. DOI: https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-6-863-868

6. Голикова И.В., Починка О.В. Надстройки над грубыми преобразованиями окружности // Огарёв-Online. 2020. № 13. С. 1–11.

7. Куренков Е.Д., Рязанова К.А. On periodic translations on torus // Динамические системы. 2017. Т. 7(35), № 2. С. 113-118.

MSC 37D05, 37D15

Classification of suspensions over Cartesian products of orientation-changing diffeomorphisms of the circle

S. Kh. Zinina

National Research Mordovia State University

Abstract: The paper introduces a class of Cartesian products of orientation-changing rough transformations of a circle, and studies their dynamics. The structure of the set of periodic points is described in detail, and a theorem on the topological conjugacy of diffeomorphisms of the class under consideration is given. In the theory of smooth dynamical systems, a construction is very useful that allows, according to a given diffeomorphism of a f manifold, to construct a flow on a manifold with a dimension one greater, this flow is called a superstructure over f. The concept of a superstructure over diffeomorphisms of the class under consideration is introduced, various types and the number of orbits of the superstructure are described; a theorem on the topology of the manifold on which the superstructure is given is proved. For the topological equivalence of the superstructures over the diffeomorphisms of our class, the topological conjugacy of the diffeomorphisms over which the superstructures are taken is necessary and sufficient.

Keywords: diffeomorphisms of a circle, orientation-changing diffeomorphisms of a circle, Cartesian product of orientation-changing diffeomorphisms of a circle, superstructure over a diffeomorphism, topological classification of diffeomorphisms

References

1. A.A. Andronov, L.S. Pontryagin, Rough systems, *Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1937, Vol. 14, No. 5, P. 247–250.
2. A.G. Mayer, Rough transformation of a circle into a circle, *Scientific notes of Gorky State University*, 1939, Vol. 12, P. 215–229.
3. E.Ya. Gurevich, S.Kh. Zinina, On the topological classification of gradient-like systems on surfaces that are local direct products, *Middle Volga Mathematical Society Journal*, 2015, Vol. 17, no. 1, P. 37–47.
4. I.V. Golikova, S.Kh. Zinina, Topological conjugacy of n-multiple Cartesian products of rough circle transformations, *News of Higher educational institutions. Applied nonlinear dynamics*, 2021, Vol. 29, No. 6, P. 851–862. DOI: https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-6-851-862
5. D.D. Shubin, Topology of bearing manifolds of nonsingular flows with three non-twisted orbits, *Izvestia of Higher Educational Institutions. Applied nonlinear dynamics*, 2021, Vol. 29, no. 6, P. 863–868. DOI: https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-6-863-868
6. I.V. Golikova, O.V. Pochinka, Superstructures over rough circle transformations, *Ogarev-Online*, 2020, No. 13, P. 1–11.
7. E.D. Kurenkov, K.A. Ryazanova, On periodic translations on torus, *Dynamical systems*, 2017, Vol. 7(35), No. 2, P. 113-118.