

УДК 519.6

Применение метода LU-SGS для решения нестационарных задач газовой динамики с использованием неявных схем

Жалнин Р. В., Казакова И. С.

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва

Аннотация: В статье представлен обзор методов разработки вычислительного алгоритма для решения одномерной системы уравнений Эйлера газовой динамики. В основу алгоритма положена неявная схема типа Годунова, а также решатель LU-SGS и ограничитель наклонов minmod. В работе представлены результаты апробации алгоритма на серии тестовых одномерных задач, а именно – порядок точности реализованной схемы и профили газодинамических параметров. Также была продемонстрирована возможность применения решателя LU-SGS на двумерных задачах путём решения модельных тестов.

Ключевые слова: уравнения Эйлера газовой динамики, неявная схема Годунова, потоки Лакса–Фридрихса, ограничитель наклонов minmod, метод LU-SGS, задача Римана о распаде произвольного разрыва.

1. Математическая модель и разностная схема. Метод LU-SGS

Целью работы является создание устойчивого и экономичного численного алгоритма решения задач CFD.

Одна из основных задач газовой динамики – расчёт течения газа с определёнными параметрами в некоторой области. Для описания подобной задачи используется система уравнений Эйлера, которая в одномерном случае записывается следующим образом [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho E + p)u)}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$p = \rho \varepsilon (\gamma - 1). \quad (4)$$

Здесь ρ – плотность, u – скорость, p – давление, $E = \varepsilon + \frac{u^2}{2}$ – полная энергия, ε – внутренняя энергия, γ – показатель адиабаты. Формула (4) – уравнение состояния идеального газа, которым замыкается система (1)–(3).

Для решения системы (1)–(3) можно применить неявную разностную схему [2]:

$$\frac{U_m^{k+1} - U_m^k}{\Delta t} + \frac{F_{m+1/2}^{k+1} - F_{m-1/2}^{k+1}}{\Delta x} = 0, \quad (5)$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В выражении (6) представлены консервативные переменные вектора решения U и элементы вектора потоков $F(U)$. Дискретные потоки между ячейками могут быть вычислены различными способами. С.К. Годуновым было предложено использовать для вычисления потоков решение задачи о распаде произвольного разрыва [2]. Схемы, использующие подобный метод расчёта дискретных потоков, стали называться схемами Годунова; такой является, в том числе, и схема (5).

Для приближенного вычисления дискретных потоков в настоящей работе используется метод Лакса–Фридрихса:

$$F_{m+1/2}^k = \frac{1}{2}(F_m^k + F_{m+1}^k) + \frac{\lambda_{\max}}{2}(U_m^k - U_{m+1}^k), \quad (7)$$

где

$$\lambda_{\max} = \max \{|u_m| + c_m, |u_{m+1}| + c_{m+1}\}, \quad c_m = \sqrt{\frac{\gamma p_m}{\rho_m}}.$$

Поскольку в явной схеме Годунова имеется существенный недостаток — жёсткая зависимость временного шага от шага по сетке (обусловленная числом Куранта–Фридрихса–Леви), в текущей работе был реализован алгоритм с использованием неявной схемы (5). В этом случае, потоки Лакса–Фридрихса будут рассчитываться согласно соотношению:

$$F_{m+1/2}^{k+1} = F_{m+1/2}^k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial U} - \lambda_{\max} E \right) \Big|_{m+1} (U_{m+1}^{k+1} - U_{m+1}^k) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial U} + \lambda_{\max} E \right) \Big|_m (U_m^{k+1} - U_m^k), \quad (8)$$

E — единичная матрица.

С использованием преобразованного выражения (5) и переобозначений:

$$U_m^{k+1} - U_m^k = \Delta U_m, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial U} - \lambda_{\max} E \right) \Big|_{m+1} = A_{m+1}^-, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial U} + \lambda_{\max} E \right) \Big|_m = A_m^+$$

получим следующую систему сеточных уравнений:

$$-A_{m-1}^+ \Delta U_{m-1} + \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} E + A_m^+ - A_m^- \right) \Delta U_m + A_{m+1}^- \Delta U_{m+1} = F_{m-1/2}^k - F_{m+1/2}^k. \quad (9)$$

Пространственный порядок точности схемы (9) может быть повышен применением кусочно-линейных распределений функций внутри контрольного объёма с некоторыми ограничениями на коэффициенты соответствующих многочленов (рис. 1) [4].

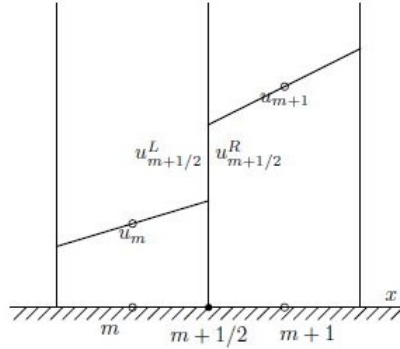


Рис. 1. Кусочно-линейное распределение функции.

В настоящей работе применён используемый ограничитель наклонов minmod , вычисляемый согласно формулам:

$$\begin{aligned}
 u_m &\leq u_m + \frac{1}{2}\alpha_m \leq u_{m+1} - \frac{1}{2}\alpha_{m+1} \leq u_{m+1}, \\
 \alpha_m &= \text{minmod} \left(\frac{u_{m+1} - u_m}{\Delta x}, \frac{u_m - u_{m-1}}{\Delta x} \right), \\
 \text{minmod}(a, b) &= \frac{1}{2} (\text{sign } a + \text{sign } b) \min(|a|, |b|).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Полученные с помощью ограничителя наклонов minmod газодинамические параметры будем использовать для вычисления дискретных потоков на k -м шаге по времени.

При неявной временной дискретизации приходится решать систему разностных уравнений с разреженной матрицей. Прямые методы обращения достаточно больших матриц коэффициентов – вычислительно дорогие, поэтому достаточно широкое применение получил метод приближённой LU-факторизации (Lower-Upper SGS, LU-SGS) [4–6]. Преимущество применения последнего по сравнению с итерационными методами, такими как метод Гаусса-Зейделя (GS) и симметричный метод Гаусса-Зейделя (SGS), заключается в его неитерационном характере.

Более обстоятельного рассмотрения требует метод LU-SGS и особенности его применения [4, 5]. Сам метод приближённой LU-факторизации описывается следующим образом [5]. Систему (9) запишем в виде:

$$(D + L) D^{-1} (D + U) \Delta U = R + (L D^{-1} U) \Delta U. \tag{11}$$

Пренебрегая последним слагаемым правой части формулы (11) и полагая:

$$\frac{\partial F}{\partial U} \Delta U \approx \Delta F = F(U + \Delta U) - F(U), \tag{12}$$

СЛАУ можно решить методом LU-SGS за два шага:

$$\begin{aligned}
 (D + L) \Delta U^* &= R, \quad \Delta U_i^* = D^{-1} \left(R_i - \frac{1}{2} \sum_{j:j \in L(i)} (\Delta F_j^* - \lambda_{ij} \Delta U_j^*) s_{ij} \right), \\
 (D + U) \Delta U &= D \Delta U^*, \quad \Delta U_i = \Delta U_i^* - D^{-1} \frac{1}{2} \sum_{j:j \in U(i)} (\Delta F_j - \lambda_{ij} \Delta U_j) s_{ij}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

2. Одномерные задачи

Для проверки работоспособности алгоритма были выполнены расчёты на семи тестовых задачах из источника [7].

Ниже приведены таблицы с параметрами расчётных областей и начальными данными для тестовых задач (табл. 1–3).

Таблица 1. Названия тестов и параметры расчётных областей

№	Название	Расчётная область	Точка разрыва	Число ячеек
1	Sod problem	$-5 \leq x \leq 5$	$x_0 = 0$	100
2	Lax problem	$-5 \leq x \leq 5$	$x_0 = 0$	100
3	Supersonic shock tube	$0 \leq x \leq 1$	$x_0 = 0.5$	100
4	Mach 3 problem	$0 \leq x \leq 1$	$x_0 = 0.5$	100
5	Einfeldt problem	$0 \leq x \leq 1$	$x_0 = 0.5$	100
6	Shock entropy wave interaction	$-5 \leq x \leq 5$	$x_0 = -4$	200
7	Woodward-Colella blast waves	$0 \leq x \leq 1$		400

Таблица 2. Начальные данные для тестов 1–6

№	Параметры слева			Параметры справа			Расчётное время
	ρ	u	p	ρ	u	p	
1	1	0	1	0.125	0	0.1	2.0
2	0.445	0.698	3.528	0.5	0	0.571	1.3
3	1	0	1	0.02	0	0.02	0.15
4	3.857	0.920	10.333	1	3.55	1	0.09
5	1	-2	0.4	1	2	0.4	0.15
6	3.857143	2.629369	10.3333	$1 + 0.2 \sin(5x)$	0	1	1.8

Таблица 3. Начальные данные для теста 7

№ теста	$0 \leq x \leq 0.1$			$0.1 \leq x \leq 0.9$			$0.9 \leq x \leq 1$			Расчётное время
	ρ	u	p	ρ	u	p	ρ	u	p	
7	1	0	10^3	1	0	10^{-2}	1	0	10^2	0.038

На рис. 2–9 представлены профили плотности и внутренней энергии для выбранных тестовых задач. Тонкой сплошной линией на рисунках обозначены распределения газодинамических параметров, принимаемых за точные решения — они бы-

ли получены с помощью явной схемы Годунова на мелкой сетке из 10000 ячеек. Маркерами-точками обозначаем распределения параметров, полученные по неявной схеме Годунова, пунктиром – распределения, полученные неявной схемой с ограничителем $\min\text{mod}$. Распределения, полученные по неявным схемам, на графиках отображаются на сетке из N ячеек, где N взято из табл. 1.

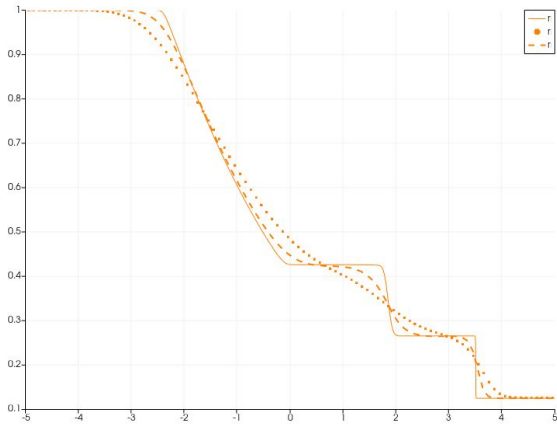


Рис. 2. Профиль плотности в задаче №1.

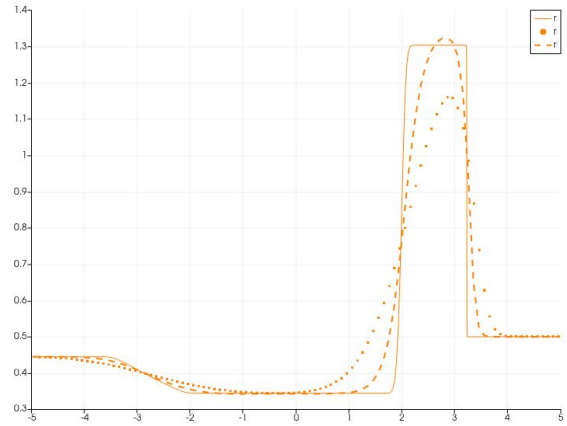


Рис. 3. Профиль плотности в задаче №2.

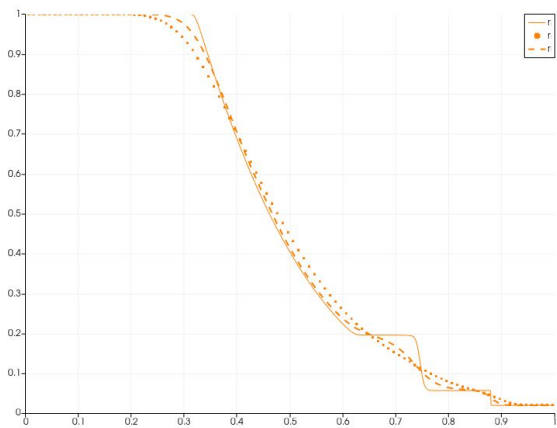


Рис. 4. Профиль плотности в задаче №3.

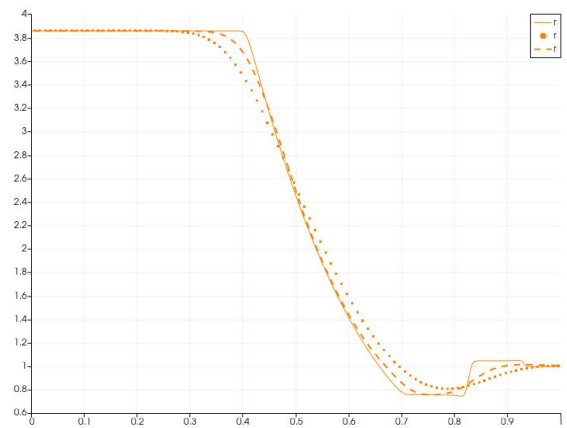


Рис. 5. Профиль плотности в задаче №4.

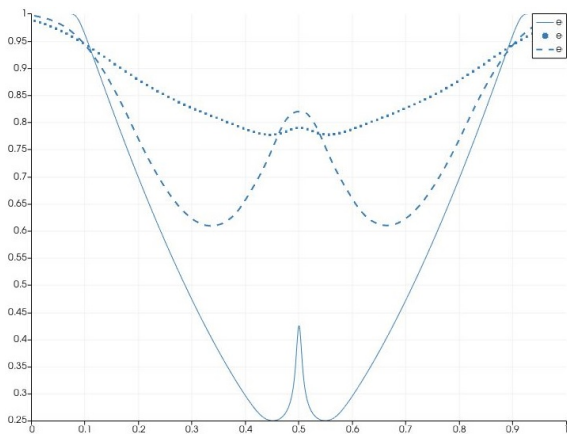


Рис. 6. Профиль внутренней энергии в задаче №5.

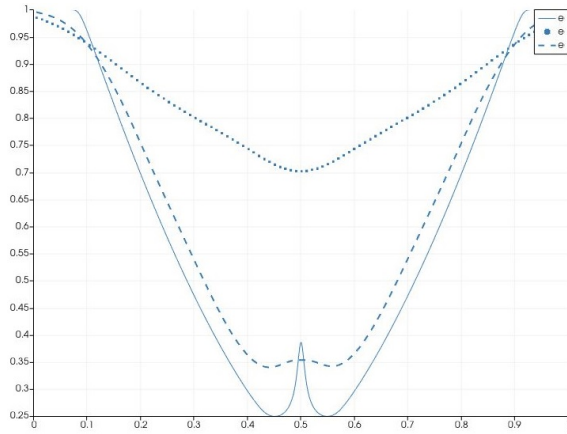


Рис. 7. Профиль внутренней энергии в задаче №5 (с дополнительной ячейкой).

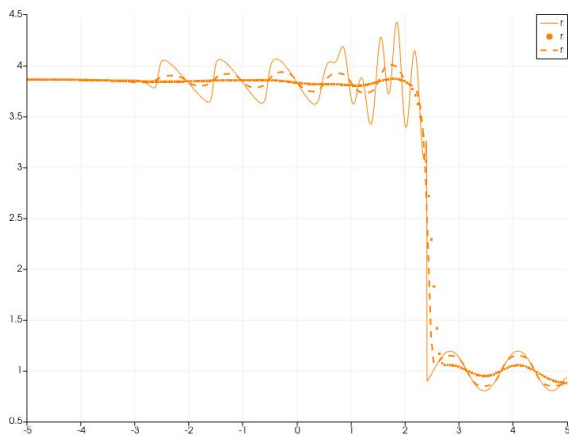


Рис. 8. Профиль плотности в задаче №6.

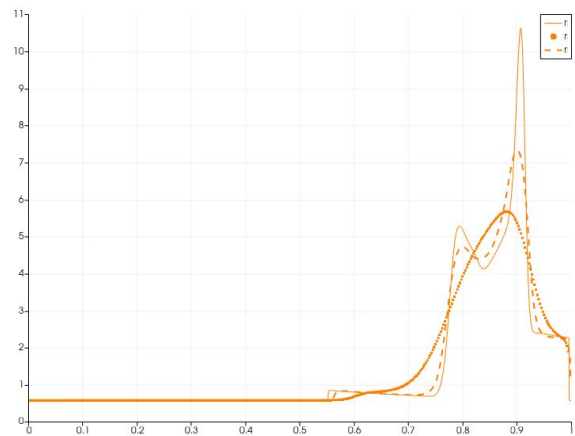


Рис. 9. Профиль плотности в задаче №7.

В табл. 4-5 приведены порядки точности метода без применения ограничителя minmod и с его применением соответственно.

Таблица 4. Порядки точности метода без применения minmod для задач №1—7

Норма	N	№ теста								
		1	2	3	4	5	5 (с доп. ячейкой)	6	7	
$\ \cdot\ _\infty$		0.65	1.9	0.28	0.29	0.24	0.38		0.91	0.55
$\ \cdot\ _{L_1}$	100									
	200	0.65	0.67	0.53	0.66	0.59	0.62		0.39	-0.3
	400	0.73	0.65	0.6	0.67	0.61	0.66		-1.25	-0.003

Таблица 5. Порядки точности метода с применением minmod для задач №1—7

Норма	N	№ теста								
		1	2	3	4	5	5 (с доп. ячейкой)	6	7	
$\ \cdot\ _\infty$		0.17	2.23	0.29	0.72	0.35	0.44		0.64	1.6
$\ \cdot\ _{L_1}$	100									
	200	1.06	1.02	0.88	0.88	0.74	0.82		0.65	-1.7
	400	1.3	1	1.06	0.74	0.81	0.88		-2.29	-0.09

Дополнительных разъяснений требует момент введения дополнительной ячейки в пятой тестовой задаче (рис. 7). При проведении расчётов на заявленном в таблице 1 количестве ячеек наблюдался нефизический всплеск внутренней энергии. Поэтому в сетку была добавлена дополнительная ячейка, и в центральной ячейке скорость была аппроксимирована нулём [7]. Видно, что нефизический всплеск энергии в середине расчётной области значительно уменьшился (особенно при применении ограничителя

наклонов $\min\text{mod}$).

Шестой тест предназначен для того, чтобы продемонстрировать сложность отображения мелкомасштабного плавного течения и ударных волн. Как видно из рис. 8, реализованный алгоритм достаточно хорошо показал себя на грубой сетке из 200 ячеек, однако, в силу сложной структуры течения, порядок точности в некоторых ситуациях для этой задачи получился отрицательным.

Особенность седьмой задачи (рис. 9) состоит в том, что решение сложно получить на эйлеровой сетке из-за сильных ударных волн и многочисленных взаимодействий с волнами разрежения и контактными разрывами [8]. Таким образом, даже использование мелкой сетки из 10000 ячеек для точного решения не помогло получить картину точного распределения параметров [7], что могло привести к отрицательному порядку точности метода при расчёте последней задачи.

Подводя промежуточные итоги, заметим, что в большинстве тестов порядки точности в норме $\|\cdot\|_{L_1}$ выше, чем в норме $\|\cdot\|_{\infty}$. Применение ограничителя $\min\text{mod}$ во всех тестах увеличивает порядок точности используемой неявной схемы и улучшает качество решения, но при этом не приводит к существенному увеличению времени работы алгоритма.

3. Двумерные задачи

Неявную схему Годунова с решателем LU-SGS можно распространить на двумерные задачи газовой динамики. В рамках данной работы были решены три тестовые задачи из источника [9] с использованием модифицированного программного кода [10]. Начальные данные приведены в табл. 6.

Таблица 6. Начальные данные для двумерных тестов

Тест №		Лево				Право				T
		p	ρ	u	v	p	ρ	u	v	
6	Верх	1.0	2.0	0.75	0.5	1.0	1.0	0.75	-0.5	0.3
	Низ	1.0	1.0	-0.75	0.5	1.0	3.0	-0.75	-0.5	
15	Верх	0.4	0.5197	-0.6259	-0.3	1.0	1.0	0.1	-0.3	0.2
	Низ	0.4	0.8	0.1	-0.3	0.4	0.5313	0.1	0.4276	
17	Верх	1.0	2.0	0.0	-0.3	1.0	1.0	0.0	-0.4	0.3
	Низ	0.4	1.0625	0.0	0.2145	0.4	0.5197	0.0	-1.1259	

В табл. 6 приняты следующие обозначения: p — давление, ρ — плотность, u и v — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости, соответственно, T — расчётное время. Область, на которой были решены тесты, представляет собой квадрат $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ с разными начальными условиями в каждом квадранте.

Начальные данные выбраны таким образом, чтобы решение одномерной задачи Римана между квадрантами содержало только одну волну: ударную волну, волну разрежения или контактный разрыв. Следуя предложенной в источнике [9] нотации,

ударную волну обозначим как S , волну разрежения — R , контактный разрыв — J . Если начать с нижнего левого квадранта и двигаться по часовой стрелке, то конфигурация трёх задач может быть описана следующим образом: Case 6: J, J, J, J ; Case 15: J, R, S, J ; Case 17: S, J, R, J .

Код из [10] был модифицирован под указанные задачи, также была добавлена реализация метода LU-SGS. На рисунках ниже приведены профили давления для всех трёх тестов.

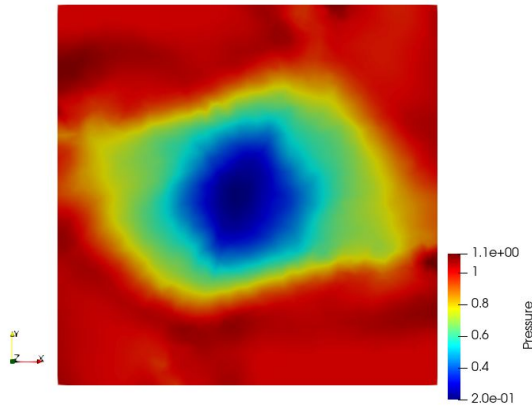


Рис. 10. Профиль давления в Case 6.

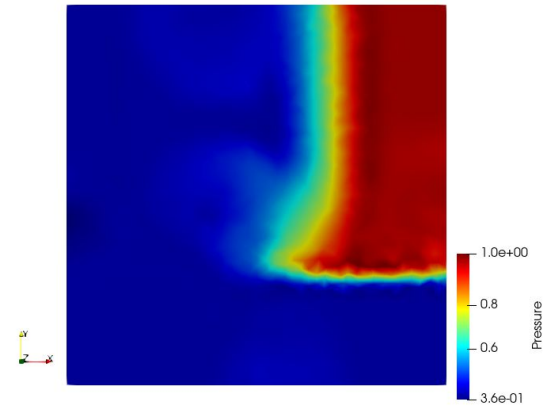


Рис. 11. Профиль давления в Case 15.

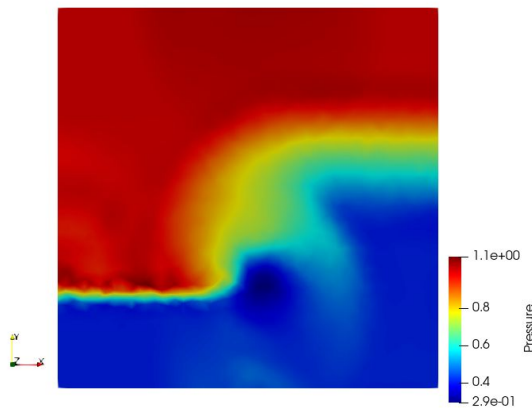


Рис. 12. Профиль давления в Case 17.

Как мы видим, решатель LU-SGS продемонстрировал на неявной схеме Годунова полную работоспособность, результаты вычислений хорошо соотносятся с оригинальными [9].

4. Заключение

Таким образом, в работе реализован численный алгоритм решения системы уравнений Эйлера газовой динамики на основе неявной схемы Годунова с решателем LU-SGS, выполнены одномерные тестовые расчёты и получены численные оценки точности метода. Также продемонстрирована возможность расширения области применения алгоритма на двумерные задачи. В целом, алгоритм показал свою пригодность для решения реальных задач гидро- и газодинамики.

Литература

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992. 424 с.
2. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47, № 3. С. 271–306.
3. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. Berlin: Springer, 2009. 748 p.
4. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Козелков А.С., Тетерина И.В. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2015. 416 с.
5. Sharov D., Luo H., Baum J.D., Löhner R. Implementation of unstructured grid GMRES+LU-SGS method on shared-memory, cache-based parallel computers // AIAA Paper. 2000. No. 2000-0927. 17 p.
6. Борисов В.Е., Луцкий А.Е. Моделирование перехода между регулярным и маховским отражением ударных волн с помощью неявной схемы на основе методов LU-SGS и BiCGStab // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 68. 36 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-68>.
7. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Использование усреднений для сглаживания решений в разрывном методе Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 89. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-89>.
8. The Department of Astrophysical Sciences of Princeton University [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://web.astro.princeton.edu>.
9. Chikitkin A.V., Rogov B.V., Utyuzhnikov S.V. High-order accurate monotone compact running scheme for multidimensional hyperbolic equations // Applied Numerical Mathematics. 2014. Vol. 93. P. 150–163.
10. Жалнин Р.В. Современные вычислительные методы прикладной математики. Саранск: Изд-во СВМО, 2017. 48 с.

MSC 76M12

Application of the LU-SGS method for solving unsteady gas dynamics problems using implicit schemes

R. V. Zhalnin, I. S. Kazakova

National Research Ogarev Mordovia State University

Abstract: The article presents an overview of methods for developing the computational algorithm for solving one-dimensional Euler system of gas dynamics equations. Bases of the algorithm are implicit Godunov scheme, LU-SGS solver and minmod limiter. The article presents results of approbation of the algorithm on serie of one-dimensional problems, namely order of accuracy of the realized scheme and profiles of gas dynamics parameters. It was also demonstrated probability of application of the LU-SGS solver on two-dimensional problems by solving model tests.

Keywords: Euler equations of gas dynamics, implicit Godunov scheme, Lax-Friedrichs fluxes, minmod limiter, LU-SGS method, Riemann problem

References

1. A.A. Samarskiy, Yu.P. Popov, Difference methods for solving problems of gas dynamics, M, Nauka, 1992, 424 p. (In Russian).
2. S.K. Godunov, A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics, *Matematicheskii Sbornik*, 1959, Vol. 47, No. 3, P. 271–306. (In Russian).
3. E.F. Toro, Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction, Berlin, Springer, 2009, 748 p.
4. K.N. Volkov, Yu.N. Deryugin, V.N. Emel'yanov, A.S. Kozelkov, I.V. Teterina, Difference schemes in problems of gas dynamics on unstructured grids, M., Fizmatlit, 2015, 416 p. (In Russian).
5. D. Sharov, H. Luo, J.D. Baum, R. Löhner, Implementation of unstructured grid GMRES+LU-SGS method on shared-memory, cache-based parallel computers, *AIAA Paper*, 2000, No. 2000-0927, 17 p.
6. V.E. Borisov, A.E. Lusky, Simulation of transition between regular and Mach shock waves reflections by an implicit scheme based on the LU-SGS and BiCGStab methods, *KIAM Preprint*, 2016, No. 68, 36 p. (In Russian). URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-68>.
7. M.E. Ladonkina, O.A. Neklyudova, V.F. Tishkin, Application of averaging to smooth the solution in DG method, *KIAM Preprint*, 2017, No. 89, 32 p. (In Russian). URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-89>.
8. The Department of Astrophysical Sciences of Princeton University [Electronic resource]. URL: <https://web.astro.princeton.edu>.

9. A.V. Chikitkin, B.V. Rogov, S.V. Utyuzhnikov, High-order accurate monotone compact running scheme for multidimensional hyperbolic equations, *Applied Numerical Mathematics*, 2014, Vol. 93, P. 150–163.
10. R.V. Zhalnin, Modern numerical methods of applied mathematics, Saransk, Izd-vo SVMO, 2017, 48 p. (In Russian).