УДК 517.9:539.3

Математическое моделирование систем контроля за изменением давления в газожидкостных средах

Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А., Алексанин Н. Д.

Ульяновский государственный технический университет

Аннотация: Рассматривается начально-краевая задача для системы дифференциальных уравнений с частными производными, представляющая собой математическую модель механической системы «трубопровод – датчик давления», в которой сечение трубопровода имеет прямоугольную форму. На основе предложенной модели исследуется совместная динамика чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе. Для описания динамики используются линейные модели механики твердого деформируемого тела и механики жидкости и газа. С помощью введения усредненных характеристик исследование предложенной начально-краевой задачи сведено к изучению одномерной модели, для которой указаны аналитические и численные методы решения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, трубопровод, датчик давления, аэроупругость, динамика, метод Галеркина, метод конечных разностей.

При размещении датчика давления непосредственно на двигателе на него действуют повышенные температуры и вибрации, что приводит к погрешностям измерений и даже к разрушению упругого чувствительного элемента датчика. В связи с этим для измерения давления в рабочей камере двигателя применяются механические системы «трубопровод – датчик давления». В этой системе датчик расположен на некотором расстоянии от двигателя и соединен с ним с помощью трубопровода, что позволяет ослабить воздействие высоких температур и виброускорений. Задача состоит в получении уравнений, связывающих закон изменения давления рабочей среды на выходе из камеры сгорания двигателя (на входе в трубопровод) и деформацию упругого элемента датчика (расположенного на выходе из трубопровода), и предназначенных по величине деформации элемента рассчитать давление в двигателе.

Рассмотрим математическую постановку, соответствующую модели системы «трубопровод – датчик давления», в которой сечение трубопровода D_1 имеет прямоугольную форму

$$\varphi_{tt} = a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}), \quad x \in (0,l), \quad y \in (0,a), \quad z \in (0,b), \tag{1}$$

$$\varphi_y(x,0,z,t) = \varphi_y(x,a,z,t) = 0, \quad x \in (0,l), \quad z \in (0,b), \tag{2}$$

$$\varphi_z(x,y,0,t) = \varphi_z(x,y,b,t) = 0, \quad x \in (0,l), \quad y \in (0,a), \tag{3}$$

$$\varphi_x(l,y,z,t) = w_t(y,z,t), \quad y \in (0,a), \quad z \in (0,b), \tag{4}$$

$$-\rho_0\varphi_t(0,y,z,t) = P(y,z,t), \quad y \in (0,a), \quad z \in (0,b), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} L(w(y,z,t)) \equiv mw_{tt} + D\triangle^2 w + N\triangle w + \beta(\triangle^2 w)_t + f(w_t,w) = \\ = P_0 - \rho_0\varphi_t(l,y,z,t) - P_*, \quad y \in (0,a), \quad z \in (0,b), \end{aligned} \tag{6}$$

где $\triangle w = w_{yy} + w_{zz}$, $\triangle^2 w = w_{yyyy} + 2w_{yyzz} + w_{zzzz}$.

В (1)-(6) $\varphi(x, y, z, t)$ – потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе прямоугольной формы; $w(y, z, t)$ – деформация упругого элемента, расположенного в конце трубопровода $x = l$; $P(y, z, t)$ – заданный закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод $x = 0$; ρ_0, P_0, a_0 – плотность, давление, скорость звука, соответствующие состоянию покоя рабочей среды; P_* - внешнее воздействие на упругий элемент; m и D – погонная масса и изгибная жесткость упругого элемента; N – сжимающее (растягивающее) элемент усилие; β – коэффициент внутреннего демпфирования; $f(w_t, w)$ – некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации и скорости деформации; индексы x, y, z, t снизу обозначают частные производные по координатам x, y, z и времени t.

Уравнение (1) описывает движение идеального газа в трубопроводе с сечением прямоугольной формы; (2)-(4) – условия непротекания стенок трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (5) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (6) описывает динамику упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций $\varphi(x, y, z, t)$, $w(y, z, t)$, которая должна быть дополнена начальными условиями для этих функций, а также граничными условиями для $w(y, z, t)$.

Для решения задачи (1)-(6) введем усредненные характеристики основных величин динамической системы

$$\begin{gathered} \Phi(x,t) = \iint\limits_{D_1} \varphi(x,y,z,t)dS, \quad \xi(t) = \iint\limits_{D_1} w(y,z,t)dS, \\ G(t) = \iint\limits_{D_1} P(y,z,t)dS, \quad Q(w) = \iint\limits_{D_1} L(w(y,z,t))dS, \end{gathered} \tag{7}$$

где область интегрирования $D_1 = \{(y, z) : 0 \le y \le a; 0 \le z \le b\}$, $dS = dydz$. Интегрируя (1)- (6) по квадрату D_1, получим

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0, \tag{8}$$

$$\Phi_x(l,t) = \dot{\xi}(t), \tag{9}$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0,t) = G(t), \tag{10}$$

$$(P_0 - P_*)S - \rho_0 \Phi_t(l,t) = Q(w), \tag{11}$$

где $S = ab$ - площадь сечения D_1.

Пусть $w(y, z, t) = \theta(t)g(y, z)$, $w_0 = \iint\limits_{D_1} g(y, z)dS$ и $g(y, z)$ удовлетворяет граничным условиям, соответствующим типу закрепления упругого элемента. Тогда $\xi(t) = w_0\theta(t)$.

Пусть в (6) $L(w(y, z, t)) = mw_{tt} + D \triangle^2 w + N \triangle w + \beta(\triangle^2 w)_t + \alpha w_t + \gamma w$, где α, γ – коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи. Тогда

$$Q(w) = m_0\ddot{\theta}(t) + \alpha_0\dot{\theta}(t) + \gamma_0\theta(t), \tag{12}$$

где $m_0 = m \iint\limits_{D_1} g(y,z)dS$, $\alpha_0 = \alpha \iint\limits_{D_1} g(y,z)dS + \beta \iint\limits_{D_1} \triangle^2 g(y,z)dS$, $\gamma_0 = D \iint\limits_{D_1} \triangle^2 g(y,z)dS + N \iint\limits_{D_1} \triangle g(y,z)dS + \gamma \iint\limits_{D_1} g(y,z)dS$. Таким образом, решение задачи (1)-(6) сведено к исследованию одномерной системы (8)-(11) для функций $\Phi(x,t)$, $\theta(t)$, в которой $Q(w)$ имеет вид (12), а $\dot{\xi}(t) = w_0\dot{\theta}(t)$.

Предложены несколько способов исследования одномерной системы (8)-(11).

1. При аналитическом исследовании решение задачи сводится к исследованию уравнения с отклоняющимся аргументом. Подставляя в (9)-(11) общее решение уравнения (8) $\Phi(x,t) = A\left(t - \dfrac{x}{a_0}\right) + B\left(t + \dfrac{x}{a_0}\right)$ и проводя ряд несложных математических действий, получим уравнение с отклоняющимся аргументом, связывающее величину отклонения $\theta(t)$ чувствительного элемента датчика с законом изменения давления $G(t)$ рабочей среды в двигателе

$$m_0\left[\ddot{\theta}\left(t-\frac{l}{a_0}\right)+\ddot{\theta}\left(t+\frac{l}{a_0}\right)\right]+\alpha_0\left[\dot{\theta}\left(t-\frac{l}{a_0}\right)+\dot{\theta}\left(t+\frac{l}{a_0}\right)\right]+\gamma_0\left[\theta\left(t-\frac{l}{a_0}\right)+\right.$$
$$\left.+\,\theta\left(t+\frac{l}{a_0}\right)\right]-\rho_0 a_0 w_0\left[\dot{\theta}\left(t-\frac{l}{a_0}\right)-\dot{\theta}\left(t+\frac{l}{a_0}\right)\right]=2[G(t)+(P_0-P_*)S]. \quad (13)$$

Если $\dfrac{l}{a_0} = \varepsilon$ - малый параметр (например, для воздуха $a_0 \approx 330$ м/сек), то, проводя в (13) разложение по степеням ε и отбрасывая старшие по порядку члены, можно получить приближенное уравнение (без отклонения аргумента t), связывающее $\theta(t)$ и $G(t)$

$$(m_0+\rho_0 w_0 l)\ddot{\theta}(t)+\alpha_0\dot{\theta}(t)+\gamma_0\theta(t)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\left[\left(m_0+\frac{1}{3}\rho_0 w_0 l\right)\theta^{(4)}(t)+\alpha_0\,\dddot{\theta}(t)+\right.$$
$$\left.+\,\gamma_0\ddot{\theta}(t)\right]+O(\varepsilon^4)=G(t)+(P_0-P_*)S. \quad (14)$$

Решение линейного дифференциального уравнения (14) с постоянными коэффициентами можно искать классическими методами, а можно исследовать численно.

2. При численно-аналитическом исследовании на основе метода Галеркина потенциал скорости $\Phi(x,t)$ представляется в виде отрезков рядов по полным на интервале $(0,l)$ системам функций $\{z_m(x)\}$, которые удовлетворяют однородным граничным условиям, соответствующим условиям (9)-(10) или (10)-(11). В результате исследование сведено к решению задачи Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является основой для проведения численного эксперимента.

3. Численное исследование проводилось с помощью конечно – разностного метода. При этом использовалась явная схема, на основе которой проведен численный эксперимент.

Разработан программный комплекс для математического моделирования механической системы «трубопровод – датчик давления» [1]. Он предназначен для исследования совместной динамики чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе, соединяющем камеру сгорания двигателя с датчиком, и позволяет получать графики функции отклонения подвижного элемента датчика при различном задании механических параметров системы, в том числе при задании закона изменения давления рабочей среды в двигателе. Программный комплекс состоит из трех программ: программа численного исследования на основе метода конечных разностей, разработанная в пакете Microsoft Visual Studio C++, программа решения уравнения (14) и программа численного исследования на основе метода Галеркина, разработанные в пакете Mathematica 12.

Аналогичным образом с помощью введения усредненных характеристик к решению одномерной задачи сводятся начально-краевые задачи, соответствующие моделям механической системы «трубопровод-датчик давления» для других различных форм сечений трубопровода $[1, 3, 5]$.

Литература

1. Тамарова Ю.А., Вельмисов П.А., Анкилов А.В. Программный комплекс для математического моделирования механической системы «трубопровод – датчик давления». Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2022615319, 30.03.2022. Заявка № 2022615014 от 28.03.2022.

2. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А., Покладова Ю.В. Математическое моделирование в задачах динамики и устойчивости деформируемых элементов одного класса аэроупругих систем //Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: материалы XV Междунар. науч.-техн. конф. Пенза: Изд-во ПГУ. 2020. С. 122–127.

3. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал Средневолжского математического общества. 2020. Т. 22, № 3. С. 352–367.

4. Тамарова Ю.А., Вельмисов П.А., Алексанин Н.Д., Нуруллин Н.И. Исследование динамических процессов в системах измерения давления газожидкостных сред // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 4. С. 461–471.

MSC 35Q35 35Q74

Mathematical modeling of control systems for pressure changes in gas-liquid media

P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova, N. D. Aleksanin
Ulyanovsk State Technical University

Abstract: An initial-boundary value problem for a system of differential equations with partial derivatives is considered, which is a mathematical model of the mechanical system "pipeline - pressure sensor in which the pipeline section has a rectangular shape. Based on the proposed model, the joint dynamics of the sensitive element of the pressure sensor and the working medium in the pipeline is investigated. To describe the dynamics, linear models of the mechanics of a solid deformable body and the mechanics of liquid and gas are used. With the help of the introduction of averaged characteristics, the study of the proposed initial-boundary value problem is reduced to the study of a one-dimensional model, for which analytical and numerical methods of solution are indicated.

Keywords: differential equations, pipeline, pressure sensor, aeroelasticity, dynamics, Galerkin method, finite difference method.

References

1. Yu.A. Tamarova, P.A. Velmisov, A.V. Ankilov, The software package for mathematical modeling of the mechanical system «pipeline - pressure sensor», Certificate of registration of the computer program 2022615319, 30.03.2022. Application No. 2022615014 dated 03/28/2022.
2. P.A. Velmisov, Yu.A. Tamarova, Yu.V. Pokladova, Mathematical modeling in problems of dynamics and stability of deformable elements of one class of aeroelastic systems, *Analiticheskiye i chislennyye metody modelirovaniya yestestvenno-nauchnykh i sotsial'nykh problem: materialy XV Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. Penza: Izd-vo PGU*, 2020, P. 122–127.
3. P.A. Velmisov, Yu.A. Tamarova, Matematicheskoye modelirovaniye sistem izmereniya davleniya v gazozhidkostnykh sredakh, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 2020, 22, 3, P. 352–367.
4. Yu.A. Tamarova, P.A. Velmisov, N.D. Aleksanin, N.I. Nurullin, Issledovaniye dinamicheskikh protsessov v sistemakh izmereniya davleniya gazozhidkostnykh sred, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 2021, 23, 4, P. 461–471.