УДК 517.968, 519.863

О существовании и единственности непрерывного решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования *

Булатов М. В., Ботороева М. Н.

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН

Аннотация: В докладе сформулированы условия существования единственного непрерывного решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования. Поставленная задача является системой взаимосвязанных алгебраических и интегральных уравнений Вольтерра как первого, так и второго рода, оба предела интегрирования в которых являются переменными. В таком виде может быть представлена интегральная модель развивающихся систем. Такое представление позволяет привлечь аппарат матричных пучков для ее исследования.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра, переменные пределы интегрирования, интегральная модель, развивающиеся системы, матричный пучок.

1. Постановка задачи

В работе рассматриваются интегро-алгебраические уравнения (ИАУ) с переменными пределами интегрирования вида

$$A(t)x(t) + \int\limits_{t-c}^{t} K(t,s)x(s)ds = f(t),\ 0 \le t \le T, \tag{1}$$

где $A(t)$ — ненулевая квадратная матрица порядка n, удовлетворяющая условию

$$\det A(t) = 0. \tag{2}$$

Заданы $(n \times n)$ матрица $K(t,s)$, n-мерная вектор-функция $f(t)$ и положительная постоянная величина c, а $x(t)$ — искомая n-мерная вектор-функция с известными стартовыми значениями:

$$x(t) = x^0(t), \quad t \in [-c, 0). \tag{3}$$

Предполагается, что входные данные $A(t)$, $f(t)$ определены и обладают необходимой степенью гладкости на отрезке $[0,T]$, а элементы ядра $K(t,s)$ − на заштрихованной области $\Delta = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t-c \le s \le t,\ 0 \le t \le T\}$ (рис. 1). Под решением поставленной задачи будем понимать непрерывную n-мерную вектор-функцию $x(t)$, которая при подстановке в уравнение (1) обращает его в верное тождество и удовлетворяет условию

$$\lim_{t \to -0} x^0(t) = x(0).$$

Рассмотрим вопрос существования единственного непрерывного решения поставленной задачи.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00173, https://rscf.ru/project/22-11-00173/

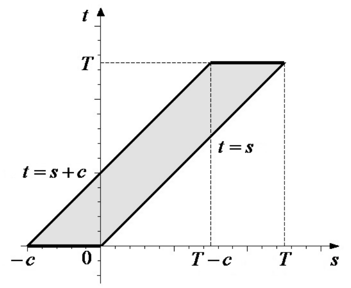

Рис. 1. Область определения ядра $K(t,s)$ уравнения (1) заштрихована

2. Условия существования единственного непрерывного решения

Приведем некоторые необходимые для дальнейшего изложения определения.

Определение 1. [3]. *Пучком матриц назовем сумму* $\lambda B + C$, *где* λ *– скалярный параметр,* B *и* C *– матрицы размера* $(m \times n)$.

Определение 2. [4]. *Пучок квадратных матриц* $\lambda B(t) + C(t)$ *удовлетворяет критерию «ранг-степень» на отрезке* $[0,T]$ *(имеет индекс один, имеет простую структуру), если*

$$\forall\ t\ \in\ [0,T]\ \ rank B(t) = deg(det(\lambda B(t) + C(t))) = r = const,$$

где λ *– скалярный параметр, символ* $deg(\cdot)$ *означает показатель степени многочлена* $(\cdot)$, *а операция* $deg(0)$ *не определена.*

Определение 3. [5]. *Матрица размерности* $(n \times m)$, *обозначаемая в дальнейшем как* $A^{-}(t)$, *называется полуобратной к* $(m \times n)$*-матрице* $A(t)$, *если для всех* t *из области определения она удовлетворяет уравнению*

$$A(t)A^{-}(t)A(t) = A(t).$$

В терминах матричных пучков сформулируем условия существования единственного непрерывного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования.

Теорема 1. *Задача* (1), (2), (3) *имеет единственное непрерывное решение, если выполнены условия:*
1) $A(t) \in C^1_{[0,T]}, f(t) \in C^1_{[0,T]}, K(t,s) \in C^1_{\Delta}, \Delta = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t - c \le s \le t,\ 0 \le t \le T\}$;
2) пучок $\lambda A(t) + K(t,t)$ *удовлетворяет критерию «ранг-степень» на отрезке* $[0,T]$;
3) $W(0)f'(0) = W(0)\left[K(0,0)x^0(-0) - K(0,-c)x^0(-c) + A'(0)x^0(-0)\right] + W(0)\int\limits_{-c}^{0} K'_t(0,s)x^0(s)ds$,
где $W(0) = E - A(0)A^{-}(0)$;
4) $A(0)x^0(-0) = f(0) - \displaystyle\int\limits_{-c}^{0} K(0,s)x^0(s)ds$.

Продемонстрируем возможность практического применения представленной теоремы на примере исследования модели развивающихся систем.

3. Модель развивающихся систем

Рассмотрим базовую двухсекторную модель развивающейся системы (РС) В. М. Глушкова [1,2]. Она описывает систему, состоящую из двух подсистем: $\mathcal{A}$ — подсистема самосовершенствования и $\mathcal{B}$ — подсистема создания внешнего продукта. Новые продукты создаются внутри системы, не поступая извне. Введем следующие количественные характеристики:

$m(t)$ — общее количество новых элементов, создаваемых в единицу времени в момент t;

$\alpha(t,s)$ — количество новых элементов, производимых в единицу времени в момент t одним элементом, созданным в момент s и функционирующим в $\mathcal{A}$;

$y(t)$ — относительная доля созданных в момент t элементов, остающаяся в подсистеме $\mathcal{A}$;

$a_1(t), a_2(t)$ — временные границы сворачивания устаревших элементов в подсистемах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно;

$\beta(t,s)$ — выпуск внешнего продукта в единицу времени в момента t одним элементом, созданным в момент s и функционирующим в $\mathcal{B}$;

$p(t)$ — объем производства внешнего продукта в единицу времени в момент t (желаемый объем потребления);

$n(t)$ — количество элементов, функционирующих в моделируемой системе в момент t.

Будем считать, что созданные ранее момента $a_1(t)$ или $a_2(t)$ элементы в момент t не используются в системе, а созданные после используются на 100%, и временные границы $a_1(t)$ и $a_2(t)$ являются неубывающими функциями, т. е. $a_1'(t) \geq 0,\ a_1'(t) \geq 0,\ t \in [t_0, T]$. Остановимся на случае, когда $a_1(t) = a_2(t) = t - c$. Это означает, что сроки жизни элементов в подсистемах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ совпадают и известны (c — срок службы элемента) и система зародилась до момента $t_0 = 0$ начала моделирования, а значит исследователь данной РС может обладать информацией о ее работе на предыстории $[-c, 0)$.

Остановимся на примере двухсекторной модели РС [2] , которая может быть записана в виде системы уравнений:

$$\begin{gathered}
m(t) = \int\limits_{t-c}^{t} \alpha(t,s) y(s) m(s) ds, \\
p(t) = \int\limits_{t-c}^{t} \beta(t,s)(1 - y(s)) m(s) ds, \\
n(t) = \int\limits_{t-c}^{t} m(s) ds, \\
0 \leq y(t) \leq 1,\ t \in [0, T],
\end{gathered} \tag{4}$$

с начальными условиями $y(t) \equiv y^0(t),\ m(t) = m^0(t),\ t \in [-c, 0)$.

Модель (4) состоит из уравнения воссоздания элементов системы, обеспечивающих ее внутреннюю функцию (рост фондов), уравнения производства внешнего продукта, обеспечивающего ее внешнюю функцию, и балансового уравнения. Такая постановка задачи позволяет определить необходимую скорость ввода элементов системы (новое оборудование, ресурсы, рабочие места) в подсистемы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и общее количество функционирующих в моделируемой системе элементов в каждый момент времени $t \in [0, T]$ для достижения желаемого объема производства внешнего продукта с учетом известных значений уже указанных характеристик на предыстории $t \in [-c, 0)$, производительности труда и сроков сворачивания устаревших элементов.

Исследовать вопрос существования единственного непрерывного решения поставленной задачи в трудах [1,2] предлагается по отдельности для каждого уравнения с дальнейшим согласованием полученных условий, поскольку иного аппарата не было. Представим модель (4) в виде (1).

Введем замену переменных:

$$v(t) = y(t)m(t),\ w(t) = (1 - y(t))m(t),$$

где $v(t), w(t)$ — количество новых элементов системы, созданых в единицу времени в момент t для функционирования в подсистемах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. При этом важно учесть, что

$$v(t) + w(t) = m(t).$$

Не изменяя задачи моделирования представим задачу (4) в виде системы линейных относительно неизвестных функций $v(t), w(t), m(t), n(t)$ интегральных уравнений как первого, так и второго рода с переменными пределами интегрирования и алгебраического уравнения, а именно

$$\begin{gathered}
v(t) + w(t) = \int\limits_{t-c}^{t} \alpha(t,s)v(s)ds, \\
p(t) = \int\limits_{t-c}^{t} \beta(t,s)w(s)ds, \\
n(t) = \int\limits_{t-c}^{t} m(s)ds, \\
v(t) + w(t) = m(t),\ t \in [t_0, T].
\end{gathered} \tag{5}$$

На предыстории задаются значения неизвестных функций:

$$\begin{gathered}
v(t) = v^0(t),\ w(t) = w^0(t),\ n(t) = n^0(t), \\
m(t) = v^0(t) + w^0(t),\ t \in [-c, 0).
\end{gathered} \tag{6}$$

Матричный вид системы (5) полностью совпадает с ИАУ (1) при

$$\begin{gathered}
A(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ p(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
K(t,s) = \begin{pmatrix} \alpha(t,s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta(t,s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ x(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \\ m(t) \\ n(t) \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{7}$$

Представление модели РС в виде ИАУ с переменными пределами интегрирования позволяет использовать условия теоремы 1 для исследования вопроса существования единственного прогноза распределения элементов РС по ее подсистемам для достижения заданного уровня роста производства внешнего продукта. Кроме непрерывной дифференцируемости всех входных данных и справедливости условия 4) теоремы 1 следует требовать выполнение следующих условий:

$$p'(0) = \int_{-c}^{0} \beta_t'(0,s)v^0(s)ds + \beta(0,0)v^0(-0) - \beta(0,-c)v^0(-c); \tag{8}$$

$$\beta(t,t) \neq 0. \tag{9}$$

Равенство (8) напрямую следует из условия 3) теоремы 1 и требует согласованности значений предыстории с производительностью системы в момент начала моделирования ($t = 0$). Условие (9) ограничивает ввод в эксплуатацию неисправного оборудования и при его выполнении справедлив критерий «ранг-степень» (условие 2) теоремы 1), поскольку ранг матрицы $A(t)$ равен трем и совпадает со степенью определителя пучка матриц

$$\det(\lambda A(t) + K(t,t)) = \lambda^3\beta(t,t) - \lambda^2\beta(t,t)\alpha(t,t).$$

Следует отметить, что все полученные условия согласуются с теоремой существования единственного непрерывного решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода с переменными пределами интегрирования [6].

Таким образом исследование ИАУ с переменными пределами интегрирования позволяет получить достаточно удобный аппарат для изучения развивающихся систем в различных областях экологии, экономики, энергетики и пр.

Литература

1. Глушков В.М. Об одном классе динамических макроэкономических моделей // Управляющие системы и машины. 1977. № 2. С. 3–6.
2. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. М.: Наука, 1983. 350 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1986. 576 с.
4. Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996. 280 с.
5. Ваарман О. Обобщенные обратные отображения. Таллин: Валгус, 1988. 120 с.
6. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999. 193 с.

MSC 45N05, 91B66

The existence and uniqueness of a continuous solution of integral algebraic equations with variable limits of integration

M. V. Bulatov, M. N. Botoroeva

Motrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences

Abstract: The report presents conditions for the existence of a unique continuous solution of integro-algebraic equations with variable limits of integration. The problem posed is a system of algebraic and Volterra integral equations of the first and the second kind, both integration limits in which are variables. Integral model of developing systems can be writen In this form. This representation makes it possible to use the apparatus of matrix beams for its study.

Keywords: Volterra integral equations, variable limits of integration, integral model, developing systems, matrix beam.

References

1. V.M. Glushkov, Ob odnom klasse dinamicheskikh makroekonomicheskikh modeley, *Upravlyayushchiye sistemy i mashiny*, 1977, № 2, P. 3–6.
2. V.M. Glushkov, V.V. Ivanov, V.M. Yanenko, Modelirovaniye razvivayushchikhsya sistem, M., Nauka, 1983, 350 p.
3. F.R. Gantmakher, Teoriya matrits, M., Nauka, 1986, 576 p.
4. V.F. Chistyakov, Algebro-differentsialnyye operatory s konechnomernym yadrom, Novosibirsk, Nauka, 1996, 280 p.
5. O. Vaarman, Obobshchennyye obratnyye otobrazheniya, Tallin, Valgus, 1988, 120 p.
6. A.S. Apartsin, Neklassicheskiye uravneniya Volterra I roda: teoriya i chislennyye metody, Novosibirsk, Nauka, 1999, 193 p.