

УДК 519.62

Модель распространения пандемии с двумя устойчивыми состояниями

Бугров В. О.¹, Рассадин А. Э.²

Приволжская оперативная таможня¹, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»²

Аннотация: В статье представлены результаты исследования распределённой модели распространения гипотетического инфекционного заболевания, динамика инфицирования которым определяется обобщением закона Гомперца. Это исследование было проведено для различных зависимостей скорости распространения заболевания от времени. Также в работе получены автомодельные решения для случая постоянной скорости распространения заболевания.

Ключевые слова: метод характеристик, лагранжева координата, эйлерова координата, бегущая волна, одностороннее распределение, двугорбое распределение.

1. Введение

Появление таких пандемий, как COVID-19 и оспа обезьян, является большой угрозой для прогрессивного человечества, поэтому в настоящее время во всём мире самое пристальное внимание уделяется развитию математической теории эпидемий [1–3]. В частности, вопросом первостепенной важности является оценка эффективности карантинных мер для защиты населения разных стран от проникновения пандемий через границы государств.

Для того, чтобы прояснить особенности этого явления, будем рассматривать следующую модель пространственно-временной эволюции некоторого гипотетического заболевания:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(t) \frac{\partial u}{\partial x} = f(u), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $c(t)$ – зависящая от времени скорость распространения заболевания, $u(x, t)$ – это безразмерная линейная плотность заражённых этой болезнью людей, $u_0(x)$ – их начальная плотность, а функция $f(u) = u \ln u (1 - \ln^2 u)$ определяет динамику инфицирования.

Эта функция является модификацией известного закона Гомперца [4]. Поскольку согласно эпидемиологическому смыслу её аргумент – функция $u(x, t)$ – всегда должна быть неотрицательна: $u(x, t) \geq 0$, то функцию $f(u)$ необходимо доопределить следующим образом: $f(0) = 0$. Это доопределение даёт нам возможность корректно рассматривать эволюцию интервалов на оси x , на которых в начальный момент времени заражённых нет.

График функции $f(u)$ приведён на рис. 1. Из рис. 1 видно, что уравнение (1) кроме однородного решения $u = 0$ имеет ещё три однородных решения: $u = e^{-1}$, $u = 1$ и $u = e$. Это в два раза больше, чем в модели Гомперца [4], т. е. рассматриваемая нами модель сложнее. Безусловно, модели заболеваний вида (1) гораздо проще, чем мультиагентные модели [5], однако, как показала практика, простые модели заболеваний обладают по крайней мере не меньшей прогностической силой, чем сложные [6].

Если в уравнении (1) положить $c(t) \equiv 0$, то получим обыкновенное дифференциальное уравнение. Тогда из графика его правой части на рис. 1 можно предположить, что однородные решения системы $u = e^{-1}$ и $u = e$ – устойчивы, а $u = 0$ и $u = 1$ – неустойчивы.

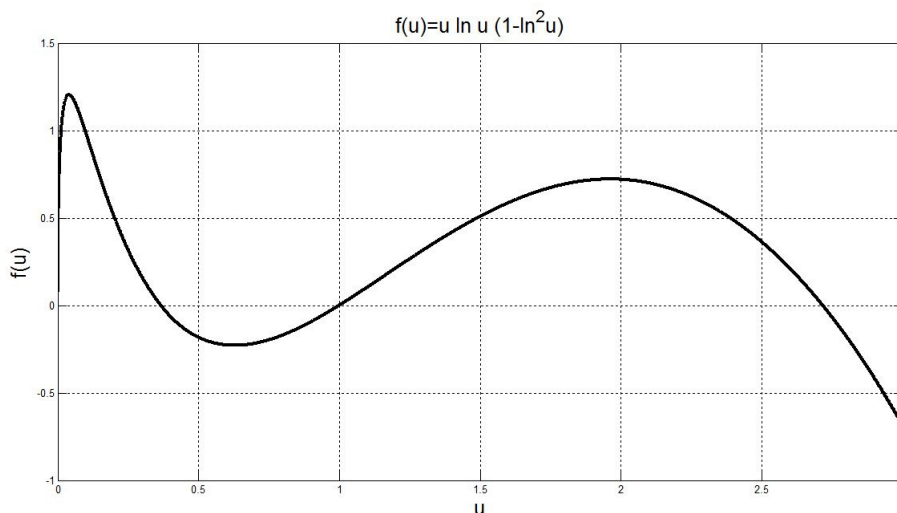


Рис. 1. График зависимости скорости инфицирования от числа заражённых

Статья имеет следующую структуру: в разделе 2 с помощью метода характеристик [7] найдено общее решение задачи Коши (1) для произвольных функций $c(t)$ и $u_0(x)$. В разделе 3 графики этих решений построены для конкретных функций $c(t)$ и $u_0(x)$, отвечающих различным эпидемиологическим ситуациям. Автомодельные решения уравнения (1) при постоянной по времени скорости распространения заболевания обсуждены в разделе 4. В заключении суммированы полученные результаты и обсуждены перспективы дальнейших исследований.

2. Точное решение задачи Коши для уравнения распространения пандемии

Введём новую неизвестную функцию $v(x, t) = \ln u(x, t)$, тогда можно переписать задачу Коши (1) следующим образом:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c(t) \frac{\partial v}{\partial x} = v(1 - v^2), \quad v(x, 0) \equiv v_0(x) = \ln u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Задача Коши (2) может быть решена точно с помощью метода характеристик [7], а именно, уравнения характеристик имеют вид:

$$\frac{dx}{dt} = c(t), \quad x|_{t=0} = y, \quad (3)$$

и

$$\frac{dv}{dt} = v(1 - v^2), \quad v|_{t=0} = v_0(y), \quad (4)$$

где y – это лагранжева координата.

Очевидно, что задача Коши (3) для эйлеровой координаты x имеет следующее точное решение:

$$x = y + \xi(t), \quad (5)$$

где

$$\xi(t) = \int_0^t c(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Точное решение задачи Коши (4) легко находится методом разделения переменных:

$$v = \frac{v_0(y)}{\sqrt{v_0^2(y) + [1 - v_0^2(y)] \exp(-2t)}}. \quad (7)$$

В результате комбинирования выражений (5) и (7) получается точное решение вспомогательной задачи Коши (2) в эйлеровой координате в виде:

$$v(x, t) = \frac{v_0(x - \xi(t))}{\sqrt{v_0^2(x - \xi(t)) + [1 - v_0^2(x - \xi(t))] \exp(-2t)}}. \quad (8)$$

Возвращаясь от вспомогательной функции (8) к первоначальной неизвестной функции $u(x, t)$, выпишем точное решение исходной задачи Коши (1):

$$u(x, t) = \exp \left[\frac{\ln u_0(x - \xi(t))}{\sqrt{\ln^2 u_0(x - \xi(t)) + [1 - \ln^2 u_0(x - \xi(t))] \exp(-2t)}} \right]. \quad (9)$$

Из формулы (9) видно, что на больших временах плотность инфицированных стремится к некоторой универсальной функции:

$$u(x, t) \approx \exp(\text{sign}(\ln [u_0(x - \xi(t))])), \quad (10)$$

где $\text{sign}(\zeta)$ – функция знака числа ζ .

Далее ограничимся рассмотрением спадающих на бесконечности начальных распределений инфицированных, т. е. будем предполагать, что $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_0(x) = 0$. Такие распределения обладают наиболее прозрачным эпидемиологическим смыслом.

В этом случае, если начальная плотность инфицированных на всей оси x удовлетворяет неравенству $0 < u_0(x) < 1$, то согласно формуле (10) происходит гомогенизация решения, то есть выход плотности инфицированных на однородное решение $u = e^{-1}$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = e^{-1}$.

Если же на оси x есть участки, на которых $u_0(x) > 1$, то из формулы (10) следует, что при $t \rightarrow +\infty$ функция $u(x, t)$ трансформируется в «скелетное» решение $u_s(x, t)$, которое определяется не только структурой начального распределения, но и видом функции (6).

3. Динамика выхода на «скелетные» решения

Для иллюстрации теоретических результатов, полученных в предыдущем разделе, будем использовать скорости распространения заболевания и соответствующие им функции (6), приведённые в таблице 1.

Эти функции изображают следующие типичные режимы распространения заболевания: равномерное распространение (N 1), периодическое распространение (N 2), останавливающееся распространение (N 3) и ускоряющееся распространение (N 4).

Таблица 1. Функции $c(t)$ и $\xi(t)$

N	1	2	3	4
$c(t)$	1, 5	$2, 4 \cos(1, 2t)$	$6(1 + 9t^2)^{-1}$	t
$\xi(t)$	$1, 5t$	$2 \sin(1, 2t)$	$2 \arctan(3t)$	$0, 5t^2$

Кроме того, мы будем рассматривать две различных начальных плотности заражённых – одногорбую:

$$u_0(x) = 1, 5 \exp(-0, 5 x^2) \tag{11}$$

и двугорбую:

$$u_0(x) = \exp(6 x^2 - 3 x^4 - 1, 2). \tag{12}$$

Графики функций (11) и (12) представлены на рис. 2. Горизонтальные линии на рис. 2 представляют собой однородные решения: $u = 0, e^{-1}, 1, e$.

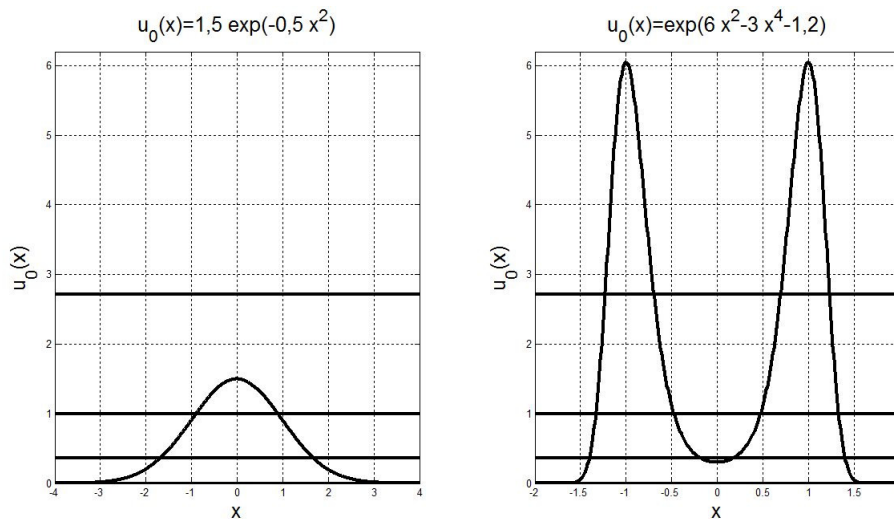


Рис. 2. График начальных распределений инфицированных: одногорбое (слева) и двугорбое (справа)

Из рис. 2 видно, что и функция (11), и функция (12) имеют на оси x участки, на которых они принимают значения, большие единицы, то есть к решениям задач Коши (1) применима формула (10) для «скелетных» решений.

Графики выхода решений задач Коши (1) с начальным условием (11) и функциями $c(t)$ из таблицы 1 по формуле (9) на «скелетные» решения (10) приведены на рис. 3-6.

Эти графики показывают, что при $t \rightarrow +\infty$ из начального распределения (11) формируется «скелет» $u_s(x, t)$ по правилу: если $x \in \mathbb{R}$ таково, что $u_0(x) > 1$, то $u_s(x, t) = e$, если же $x \in \mathbb{R}$ таково, что $0 < u_0(x) < 1$, то $u_s(x, t) = e^{-1}$.

Временная эволюция границы «скелета» на полуплоскости (x, t) определяются уравнением:

$$x = x_s + \xi(t), \tag{13}$$

где x_s – это решение уравнения $u_0(x_s) = 1$, а функции $\xi(t)$ берутся из таблицы 1.

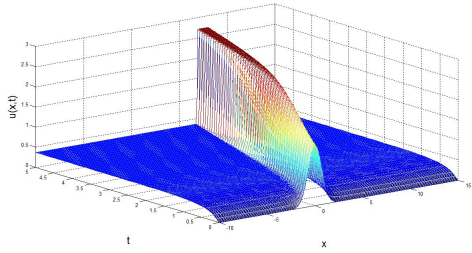


Рис. 3. Волна пандемии для одногорбого начального распределения инфицированных и $c(t) = 1,5$

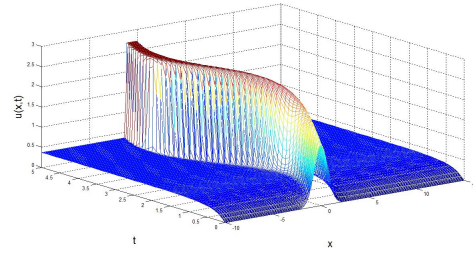


Рис. 4. Волна пандемии для одногорбого начального распределения инфицированных и $c(t) = 2,4 \cos(1, 2t)$

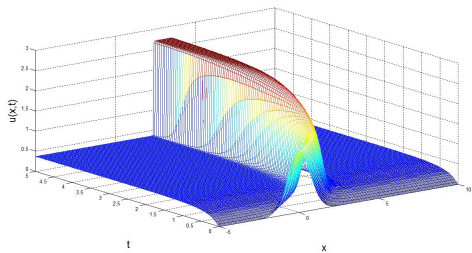


Рис. 5. Волна пандемии для одногорбого начального распределения инфицированных и $c(t) = 6(1 + 9t^2)^{-1}$

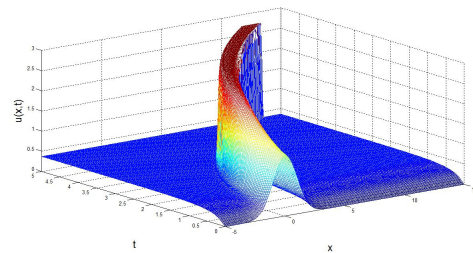


Рис. 6. Волна пандемии для одногорбого начального распределения инфицированных и $c(t) = t$

Сравнивая формулу (13) с формулой (5), легко видеть, что x_s является лагранжевой координатой «кости скелета».

Графики выхода решений задач Коши (1) с начальным условием (12) и функциями $c(t)$ из таблицы 1 по формуле (9) на «скелетные» решения (10) приведены на рис. 7-10.

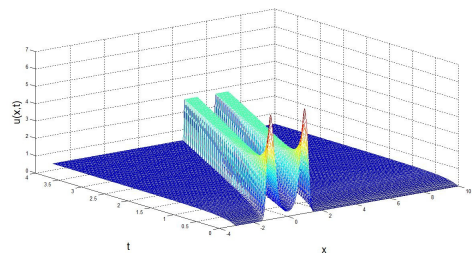


Рис. 7. Волна пандемии для двугорбого начального распределения инфицированных и $c(t) = 1,5$

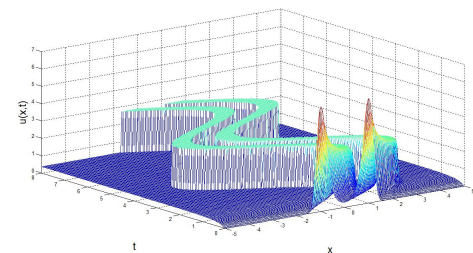


Рис. 8. Волна пандемии для двугорбого начального распределения инфицированных и $c(t) = 2,4 \cos(1, 2t)$

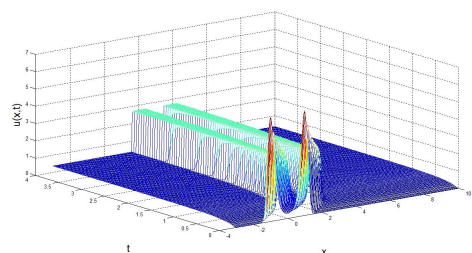


Рис. 9. Волна пандемии для двугорбого начального распределения инфицированных и $c(t) = 6(1 + 9t^2)^{-1}$

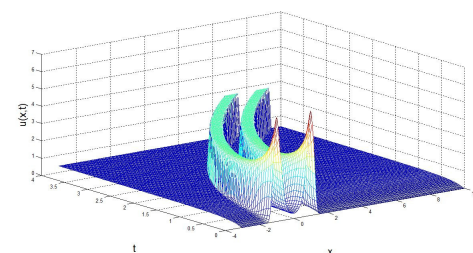


Рис. 10. Волна пандемии для двугорбого начального распределения инфицированных и $c(t) = t$

Из этих графиков видно, что в этом случае алгоритм формирования «скелетного» решения $u_s(x, t)$ тот же самый, только в силу двугорбости начального распределения инфицированных (12) структура «скелета» сложнее – по сравнению с предыдущим случаем в нём больше «костей» (см. рис. 2).

4. Бегущие волны пандемии

Пусть скорость распространения заболевания не зависит от времени и равна некоторой константе $c_0 \in \mathbb{R}$, тогда уравнение (1) сведётся к:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} = u \ln u (1 - \ln^2 u). \quad (14)$$

Далее, если отказаться от требования убывания до нуля начального распределения заражённых $u_0(x)$ на пространственной бесконечности, то уравнение (14) имеет точные решения, отличные от описанных ранее «скелетных» и гомогенизирующихся решений, а именно, будем искать решение уравнения (14) в виде бегущей волны: $u(x, t) = U(\eta)$, где $\eta = x - Vt$, и скорость волны $V \in \mathbb{R}$, тогда для функции $U(\eta)$ получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$(c_0 - V) \frac{dU}{d\eta} = U \ln U (1 - \ln^2 U). \quad (15)$$

Точное решение уравнения (15) задаётся параметром $U_0 = U(0)$ и имеет вид:

$$U(\eta) = \exp \left[\frac{\ln U_0}{\sqrt{\ln^2 U_0 + [1 - \ln^2 U_0] \exp\left(-\frac{2\eta}{c_0 - V}\right)}} \right]. \quad (16)$$

Графики функций (16) приведены на рис. 11. Пунктиром на этом рисунке обозначены однородные решения $u = 0, e^{-1}, 1, e$ уравнения (14).

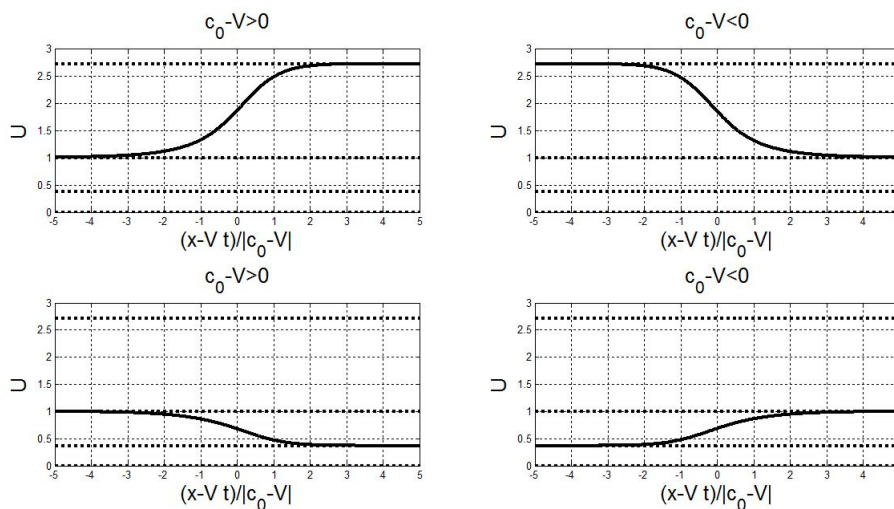


Рис. 11. Профили бегущих волн пандемии

По эпидемиологическому смыслу функция (16) должна быть ограничена на всей оси x , значит, это требование даёт следующие условия на допустимые значения параметра U_0 : $e^{-1} < U_0 < 1$ (нижние графики на рис. 11) и $1 < U_0 < e$ (верхние графики на рис. 11). Другим важным параметром, классифицирующим функции (16) при фиксированном значении параметра U_0 , является относительная скорость $c_0 - V$ распространения пандемии в системе отсчёта, движущейся со скоростью V , а именно, случаю $c_0 - V > 0$ соответствуют левые графики на рис. 11, а случаю $c_0 - V < 0$ – правые графики на нём. Таким образом, уравнение (14) допускает четыре различных типа бегущих волн (рис. 11).

5. Заключение

В данной работе методом характеристик получено общее решение задачи Коши (1) для плотности инфицированных гипотетической пандемией. На основании анализа этого общего решения для спадающих до нуля на пространственной бесконечности начальных распределений заражённых выявлено два типа формирования асимптотического профиля инфицированных на больших временах – гомогенный профиль и «скелетный» профиль. В частности, выведена формула (10), с помощью которой удобно анализировать прохождение «скелетных» профилей заболевания через границы государств. Наконец, для уравнения (14) найдены четыре различных типа автомодельных решений в виде бегущих волн.

Перспективами развития данной работы являются исследование устойчивости полученных бегущих волн относительно малых возмущений, проведение полной качественной классификации поведения решений задачи Коши (1) на больших временах без предположения об обращении начального распределения инфицированных в нуль на пространственной бесконечности, а также распространение полученных результатов на пространственно-двумерный случай.

Литература

1. Мамедова Т.Ф., Титков М.Д. Математическая модель распространения инфекционных заболеваний [Электронный ресурс] // Огарёв-online. 2020. № 13. Режим доступа: <http://journal.mrsu.ru/arts/matematicheskaya-model-gasprostraneniya-infekcionnyx-zabolevanij>
2. Кокоулина М.В., Епифанова А.С., Пелиновский Е.Н., Куркина О.Е., Куркин А.А. Анализ динамики распространения коронавируса с помощью обобщённой логистической модели // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2020. № 3. С. 28-41.
3. Рассадин А. Э. Об оценках решений эволюционных уравнений моделей распространения пандемии COVID-19 // В сборнике: Актуальные проблемы математики и информационных технологий. Материалы II Всероссийской конференции, приуроченной к 90-летию Дагестанского государственного университета. 2021. С. 138-141.
4. Gompertz B. On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1825. 115. P. 513-585.

5. Криворотько О.И., Андорная Д.В., Кабанихин С.И. Анализ чувствительности и практическая идентифицируемость математических моделей биологии // Сибирский журнал индустриальной математики. 2020. Т. 23. № 1. С. 107-125.
6. Carletti T., Fanelli D., Piazza F. COVID-19: The unreasonable effectiveness of simple models // Chaos, Solitons and Fractals. 2020. 140. P. 110241-1-13.
7. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М., Наука, 1986. 272 с.

MSC 35F25

The model of the spread of a pandemic with two stable states

V. O. Bugrov ¹, A. E. Rassadin ²

Volga Operational Customs ¹, Higher School of Economics ²

Abstract: The article presents the results of a study of a distributed model of the spread of a hypothetical infectious disease, the dynamics of infection of which is determined by the generalization of the Gompertz's law. This study was conducted for various time dependencies for the rate of spread of the disease. Self-similar solutions for the case of a constant rate of spread of the disease are also obtained in the work.

Keywords: method of characteristics, Lagrangian coordinate, Eulerian coordinate, traveling wave, one-hump distribution, two-hump distribution.

References

1. T.F. Mamedova, M.D. Titkov, *Mathematicheskaya model rasprostraneniya infecionnikh zabolevanij*, *Ogaryov-online*, 2020, 13.
<http://journal.mrsu.ru/arts/matematicheskaya-model-rasprostraneniya-infekcionnyx-zabolevanij>
2. M.V. Kokoulina, A.S. Epifanova, E.N. Pelinovsky, O.E. Kurkina, A.A. Kurkin, *Analiz dinamiki rasprostraneniya koronavirusa s pomoshyu obobshyonnoi logisticheskoi modeli*, *Trudi NGTU im. R.E. Alekseeva*, 2020, 140, P. 110241-1-13.
3. A.E. Rassadin, *Ob otzenkah reshanii evolyutsionnih uravnenii modelei rasprostraneniya pandemii COVID-19*, *V sbornike: Aktualnie problemi matematiki i informatsionnih tehnologii. Materiali II Vserossiiskoi konferentsii, priurochennoi k 90-letiyu Dagestanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2021, P. 138-141.
4. B. Gompertz, *On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies*, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1825, 115, P. 513-585.
5. O.I. Krivorot'ko, D.V. Andornaya, S.I. Kabanikhin, *Analiz chuvstvitelnosti i prakticheskaya identifikatsiya matematicheskikh modelei biologii*, *Sibirskii zhurnal industrialnoi matematiki*, 2020, 23, 1, P. 107-125.

6. T. Carletti, D. Fanelli, F. Piazza, COVID-19: The unreasonable effectiveness of simple models, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2020, 140, P. 110241-1-13.
7. А.Р. Kartashev, В.Л. Rozhdestvenskii, *Obiknovennie differentsialnie uravneniya i osnovy variatsionnogo ischisleniya*, М., Nauka, 1986, 272 p.