УДК 51-74

Ряды Фурье в прикладных исследованиях

Ахмадуллин Р. Н., Якупов З. Я., Галимова Р. К.

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ

Аннотация: В статье рассматриваются преобразования рядов Фурье. Они представлены с использованием тригонометрической функции и комплексных чисел. Представлено применение рядов Фурье в прикладных исследованиях, отмечены преимущества и недостатки их применения.

Ключевые слова: тригонометрический ряд, чётность функции, непериодическая функция, комплексное число.

А знаете ли вы, почему при игре на гитаре медиатором, звук получается громче, чем при игре пальцами? Теория рядов Фурье, непосредственно, ответит на данный вопрос.

Предположим, что задана некая функция. Требуется узнать: можно ли (и если можно, то как) представить эту функцию в виде наложения большого количества синусоид с разными амплитудами, фазами и частотами. Впервые эта задача появилась в начале 18 в. в связи с решением вопроса о форме колебаний струны. Из теории и практики было известно, что струна может колебаться по синусоиде, притом так, что на её длине всегда умещается целое число полуволн, что обусловлено условием закрепления струны на концах. Эти простейшие синусоидальные формы колебаний струны стали называть гармониками. Было также известно, что струна может колебаться не только по синусоиде, но и принимать более сложные формы. Таким образом, ряды Фурье помогают понять, по форме функций, какие гармоники содержатся в функции $f(x,\ t)$ и, сказать, какие частоты слышимы [1, с. 327].

Прежде чем подробно рассмотреть ряды Фурье, необходимо отметить, что существует два подхода к изложению этой темы.

Запишем формулу Эйлера для комплексной экспоненты:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + \sin\varphi. \quad (1)$$

Из этого следует, что все возможные линейные комбинации, т. е. сумма с различными коэффициентами $\{\sin kx, \cos kx\}$, эквивалентны всем возможным линейным комбинациям $\{e^{ikx}, e^{-ikx}\}$. Эта эквивалентность приводит к возникновению двух подходов в описании методики. Первый вариант является более наглядным и более естественным, в нём не возникают комплексные числа, второй – более красивый, компактный.

Рассмотрим первый подход к описанию рядов Фурье.

Разложение в ряд Фурье основывается на предположении, что все имеющие практическое значение функции в интервале $-\pi \leq x \leq \pi$ можно выразить в виде сходящихся тригонометрических рядов. Известно, что ряд считается сходящимся, если сходится последовательность частичных сумм, составленных из его членов.

Стандартная запись осуществляется через сумму sin и cos:

$$f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + ... + b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + ... \quad (2)$$

где a_0, a_1, ..., b_1, b_2 – действительные константы, т. е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где для диапазона от -π до π коэффициенты ряда Фурье рассчитываются по формулам [2, с. 167]:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,\ b_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

Известно, что коэффициенты ряда находятся методом интегрирования по частям или с помощью интегрирования тригонометрических функций.

Формула (2) – это периодический ряд Фурье с периодом 2π. Само разложение в ряд Фурье применяется для начальной функции (2), в частности, она раскладывается на компоненты cos и sin. Это востребовано при описании переменных тока и напряжений, сложных акустических сигналов.

Стоит отметить, что, прежде чем вычислить сходящийся тригонометрический ряд, нужно рассмотреть достаточный признак сходимости ряда Фурье [3, с. 4]. Сумма полученного ряда $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности функции, а в точках её разрыва сумма ряда равна полусумме левостороннего и правостороннего пределов функции, то есть если $x = c$ – точка разрыва, то:

$$S(x)\Big|_{x=c} = \frac{f(c-0)+f(c+0)}{2}. \tag{3}$$

Для разложения функции в ряд Фурье также понадобится понятие чётности функции. Если функция $f(x)$ чётная, то её ряд Фурье будет содержать только коэффициенты a_n и в самом ряде будут содержаться только функции cos. В таком случае функция примет вид:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{4}$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx,\ \ a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx.$$

Если же функция нечётная, то в ряде Фурье будут иметься только sin, а для его нахождения нужны лишь коэффициенты b_n. Нечётная функция ряда Фурье выглядит следующим образом:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{5}$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

Итак, мы выяснили, что периодическая функция описывает некоторые колебания (прибавление к аргументу какого-то числа, называемого периодом, не изменит функции). Но стоит сказать и о непериодической функции Фурье. Например, её можно доопределить как чётную или нечётную [3, с. 8].

Теперь рассмотрим второй подход к разложению в ряд Фурье.

Запись коэффициентов и рядов Фурье можно также упростить с использованием понятия комплексного числа. Каждое слагаемое в ряде Фурье имеет вид:

$$a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t, \tag{6}$$

а функции cos и sin представимы через экспоненту с мнимым показателем.

Запишем основное соотношение теории функции комплексного переменного:

$$e^{ik\omega t} = \cos k\omega t + i \sin k\omega t, \tag{7}$$

где i – мнимая единица.

То же самое соотношение можно записать и для обратного по знаку показателя:

$$e^{-ik\omega t} = \cos k\omega t - i \sin k\omega t, \tag{8}$$

В силу того, что cos – чётная функция, противоположный аргумент не изменит ее значения, sin же, как нечётная функция, изменит знак.

Из формул (7) и (8) можно выразить cos и sin. Для этого нужно, соответственно, сложить и вычесть данные формулы. Получим:

$$\begin{cases} e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t} = 2\cos k\omega t, \\ e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t} = 2\sin k\omega t. \end{cases} \tag{9}$$

Подставим полученное выражение для sin и cos (9) в исходное выражение (6). После элементарного преобразования мы получим:

$$\left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i}\right) e^{ik\omega t} + \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i}\right) e^{-ik\omega t}. \tag{10}$$

Теперь для единообразия представления сделаем предположение, что ряд суммируется по k не от $(0; +\infty)$, а от $(-\infty; +\infty)$. Тогда второе слагаемое выражения (10) будет соответствовать отрицательной, а первое слагаемое – положительной части этого ряда. Коэффициент, стоящий перед мнимой экспонентой $\left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i}\right)$, мы обозначим через c_k – комплексное число, зависящее от k и от того, к какой части ряда (положительной или отрицательной) оно относится.

С учетом $\frac{1}{i} = -i$ получим:

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \text{ при } k > 0 \tag{11}$$

и

$$c_k = \frac{a_k + ib_k}{2} \text{ при } k < 0. \tag{12}$$

Пользуясь введёнными обозначениями (11) и (12), сумму ряда мы можем записать в виде:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}. \tag{13}$$

Преимущества такой формы представления заключаются в следующем. Во-первых, эта запись компактна, единообразна и эстетична. Во-вторых, именно с помощью этой записи можно осуществить предельный переход в случае бесконечного периода и получить непрерывное преобразование Фурье для непериодических сигналов [4].

Метод Фурье зарекомендовал себя как эффективное средство исследования физических процессов: он позволяет в подчас весьма зашумлённом сигнале увидеть то, что невооружённым взглядом увидеть невозможно, выделить те колебания, которые имеют особый смысл в рамках решаемой задачи. Тем не менее, у этого метода есть и ограничения. Главный недостаток заключается в том, что он пригоден только для стационарных процессов (под стационарностью понимается не постоянство сигнала во времени, а постоянство его спектральных характеристик). Если амплитуда какой-то гармоники изменилась, метод Фурье не выявит, в какой момент времени это произошло.

Благодаря широкому применению метода Фурье и сходных с ним аналитических методов мы и сегодня можем повторить с полным основанием то, что лорд Кельвин сказал в 1867 году: «Теорема Фурье не только является одним из самых изящных результатов современного анализа, но и даёт нам незаменимый инструмент в исследовании самых трудных вопросов современной физики» [5].

Литература

1. Лосев Г.В. Исследование колебательных процессов с помощью рядов Фурье // Материалы LXIII студенческой научной конференции. Под редакцией Н.С. Сергеева. Челябинск: ИАИ ЮУрГАУ, 2012. 342 с.

2. Ерин С.В., Николаев Ю.Л. Автоматизация инженерных расчетов с использованием пакета Scilab: практическое пособие. Москва: Русайнс, 2020. 183 с.

3. Романова Л.Д., Шаркунова Т.А., Елисеева Т.В. Интегральные преобразования: учебное пособие. Пенза: Изд-во ПГУ, 2015. 76 с.

4. Ганин В.Д. Выделение полезного сигнала из белого шума // Современные тенденции развития науки и образования: теория и практика. Сборник материалов 3-й Международной научно-практической конференции. Москва: ВИПО, 2019. С. 113-118.

5. Брейсуэлл Р.Н. Преобразование Фурье. www.ai-library.ru/ainfo/ailenta_594.html?ysclid=l5b3j3evz2927607579 (дата обращения 07.07.2022).

MSC 42B05

Fourier series in applied research

R. N. Ahmadullin, Z. Ya. Yakupov, R. K. Galimova

Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev

Abstract: The article discusses the Fourier series transformations. They are represented using a trigonometric function and complex numbers. The application of Fourier series in applied research is presented, the advantages and disadvantages of their application are noted.

Keywords: trigonometric series, parity of a function, non-periodic function, complex number.

References

1. G.V. Losev, Investigation of oscillatory processes using Fourier series, *Materials of the LXIII Student Scientific Conference: conference materials*, Chelyabinsk, IAI Yurgau, 2012. 342 p.
2. S.V. Erin, Yu.L. Nikolaev, Automation of engineering calculations using the Scilab package: a practical guide, Moscow, Rusains, 2020, 183 p.
3. L. D. Romanova, T. A. Sharkunova, T. V. Eliseeva, Integral transformations: textbook, Penza, Publishing House of PSU, 2015. 76 p.
4. V.D. Ganin, Isolation of a useful signal from white noise, *Modern trends in the development of science and education: theory and practice. Collection of Materials of the 3rd International Scientific and Practical Conference*, Moscow, VIPO, 2019. P. 113-118.
5. R.N. Bracewell. Fourier Transform. `www.ai-library.ru/ainfo/ailenta_594.html?ysclid=l5b3j3evz2927607579` (date of access 07.07.2022).