УДК 517.962.2

Метод линеаризации при исследовании одной математической модели дискретного динамического процесса

Афиногентова Е. В.

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева

Аннотация: В статье в зависимости от параметров проведено исследование динамики математической модели численности биологической популяции. Получены ограничения на параметры, позволяющие применить метод линеаризации для решения задачи оптимизация критерия качества.

Ключевые слова: дискретная система, метод линеаризации, оценка решения.

1. Математическая модель динамики биологической популяции

Пусть динамика численности биологической популяции описывается дискретной системой

$$\begin{gathered} x(k+1) = F(x(k), \gamma, D(k))x(k), \\ k = 0, 1, 2, ..., \ x(0) = x_0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $x(k)$ — численность популяции в момент времени Tk, где $T = const$, $\gamma \in \mathbb{R}^s$ — многомерный параметр, $D(k) : \mathbb{N} \bigcup \{0\} \to \mathbb{R}$ — управляющее воздействие. Предположим, что популяция состоит из особей двух видов: потерявшие способность к размножению и сохранившие способность к размножению с постоянной η. Доля второго типа особей по отношению к общей численности популяции определяется соотношением

$$\frac{x_2(k)}{x(k)} = \exp\left(-\beta x(k)\right), \beta = const \tag{2}$$

($x_2(k)$ — численность особей второго типа в момент времени Tk).

Уравнения выживаемости для первого и второго вида имеют вид

$$S_i(D) = \exp(-\gamma_i D), \ \gamma_i = const, \ i = 1, 2.$$

Тогда правая часть системы (1) представима в виде

$$\exp(-\beta x(k) - \gamma_1 D(k) + \eta T) + (1 - \exp(-\beta x(k))) \exp(-\gamma_2 D(k)).$$

2. Минимизация критерия качества

Далее рассмотрим задачу минимизации критерия качества

$$J = ax(m) + \sum_{i=0}^{m-1} D^2(i). \tag{3}$$

Задача (1)-(3) может возникать, например, при лучевой терапии злокачественных новообразований [1]. В случае однородности популяции ($\beta = 0$) управляющее воздействие $D(k) = D$ при всех $k \in \mathbb{N} \in \{0\}$ и является корнем уравнения

$$\gamma_1 a x(0) \exp(m(\eta T - \gamma_1 D)) = 2D. \tag{4}$$

Нелинейный случай затрудняет получение точного аналитического решения. Далее, следуя [2], найдем ограничения на параметры модели, при которых задачу можно решить по линейному приближению

$$y(k+1) = \exp(\eta T - \gamma_1 D) y(k), y(0) = x(0), \\ k = 0, 1, 2, ..., m-1, \tag{5}$$

где D — корень уравнения (4).

Введем обозначение

$$C(D) = \exp(\eta T - \gamma_1 D) - \exp(-\gamma_2 D).$$

В силу того, что D решает задачу оптимизации функционала (3) на решениях уравнения (5),

$$0 < \exp(\eta T - \gamma_1 D) < 1 \text{ и } \ 0 < \alpha < 1, \tag{6}$$

где $\alpha = 1 - \exp(\eta T - \gamma_1 D)$. В зависимости от того, насколько отличаются друг от друга параметры γ_1 и γ_2, возможны два случая:

1) если разность между γ_1 и γ_2 достаточно мала, то

$$\eta T > (\gamma_1 - \gamma_2) D, \text{ т. е. } C(D) > 0; \tag{7}$$

2) иначе

$$\eta T < (\gamma_1 - \gamma_2) D, \text{ т. е. } C(D) < 0. \tag{8}$$

Разберем случай 1).

Так как $x(k) \geq 0$, то справедливо неравенство

$$x(k+1) \leq \exp(\eta T - \gamma_1 D) x(k).$$

Получим, что

$$x(k) \leq y(k), k = 0, 1, 2, ..., m-1. \tag{9}$$

Из (9) следует, что для нелинейного случая значение функционала не превысит оптимального значения, полученного по линейной модели.

Пусть имеет место случай 2).

Так как $\exp(-\beta x) > 1 - \beta x$ при $x > 0$, то

$$x(k+1) - x(k) \leq -\alpha x(k) - C(D) \beta x^2(k) \equiv \varphi(x(k))$$

Тогда

$$x(k) \leq u(k),$$

где $u(k)$ решение уравнения

$$u(k+1) - u(k) = \varphi(u(k)), u(0) = x(0), k = 0, 1, 2, ..., m-1.$$

Уравнение $\varphi(u) = 0$ в области $u \geq 0$ имеет два решения

$$u^{(1)} = 0 \ \text{ и } u^{(2)} = -\alpha/(C(D)\beta)$$

Учитывая, что

$$\varphi(u(k)) > 0 \ \text{ при } u(k) > u^{(2)},$$
$$\varphi(u(k)) < 0 \ \text{ при } 0 < u(k) < u^{(2)},$$

приходим к выводу, что последовательность $\{u(k)\}_{k=0}^{m}$ возрастает при $u(0) > u^{(2)}$ и, строго убывая, стремится к нулю при $0 < u(0) < u^{(2)}$. Таким образом, если $0 < u(0) < u^{(2)}$, то $u(k) \leq u(0)$, $k = 0, 1, 2, ..., m$. А это дает $x(0) < u^{(2)}$ и

$$x(k) \leq x(0), k = 0, 1, 2, ..., m. \tag{10}$$

Тогда

$$\frac{x(k+1)}{x(k)} = 1 - \alpha - C(D)(1 - \exp(-\beta x(k))) \leq$$
$$\leq 1 - \alpha - C(D)(1 - \exp(-\beta x(0))) \equiv \delta$$

Отсюда $x(k) \leq r(k)$, где $r(k)$ — решение уравнения

$$r(k+1) = \delta r(k), r(0) = x(0), k = 0, 1, 2, ..., m.$$

Следовательно, для $x(m)$ выполняется оценка

$$x(m) \leq \delta^m r(0). \tag{11}$$

Неравенство (11) позволяет оценить погрешность линеаризации

$$x(m) - y(m) \leq (\delta^m - (1-\alpha)^m) x(0). \tag{12}$$

Если $C(D) > 0$, т.е. если особи первого и второго вида близки по чувствительности к управляющему воздействию, то равномерное во времени распределение $D(k)$ близко к оптимальному. В случае $C(D) < 0$ и $\beta \neq 0$ оценка (12) определяет допустимость метода линеаризации при решении задачи (1)-(3).

Литература

1. Иванов В.К. Оптимизация лучевой терапии в модели гетерогенной популяции опухолевых клеток // Автомат. и телемех. 1986. № 5. С. 102-107. URL: http://mi.mathnet.ru/at6272

2. Афиногентова Е.В., Щенников В. Н. Исследование корректности применения линейной математической модели раковой опухоли при лучевой терапии. Морд. гос. ун-т. Саранск. 2001. 8 с. Рус. Деп. в ВИНИТИ. № 773-В2001 от 28.03.2001.

MSC 34G10 58D25

The linearization method for the study of a certain discrete dynamic process mathematical model

E. V. Afinogentova

National Research Ogarev Mordovia State University

Abstract: In the article depending on the parameters a study of the dynamics of a mathematical model for the number of biological populations is carried out. Restrictions on parameters are obtained that allow applying the linearization method to solve the problem of optimizing the quality criterion.

Keywords: discrete system, linearization method, solution estimation

References

1. V.K. Ivanov, Optimizaciya luchevoj terapii v modeli geterogennoj populyacii opuholevyh kletok *Avtomat. i telemekh*, 1986, Vol. 5, pp. 102-107. (In Russian). URL: http://mi.mathnet.ru/at6272

2. E.V. Afinogentova , V.N. Shhennikov, Issledovanie korrektnosti primeneniya linejnoj matematicheskoj modeli rakovoj opuxoli pri luchevoj terapii, Mord. gos. un-t, Saransk, 2001, 8 p. Rus. Dep. v VINITI. № 773-V2001, 28.03.2001.