

Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
X МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ
МОЛОДЕЖНОЙ ШКОЛЫ-СЕМИНАРА
имени Е. В. Воскресенского



Саранск
2022

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМ. М. В. КЕЛДЫША РАН

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
X МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ
МОЛОДЕЖНОЙ ШКОЛЫ-СЕМИНАРА
имени Е. В. Воскресенского

Саранск
14 — 18 июля 2022 г.

Саранск
2022

УДК 510:004.5

ББК В1

М341

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я:

член-корр. РАН, д.ф.-м.н. профессор В. Ф. Тишкин (отв. редактор):

д.ф.-м.н. профессор И. В. Бойков;

д.ф.-м.н. профессор П. А. Вельмисов;

д.ф.-м.н. профессор В. З. Гринес;

д.ф.-м.н. профессор В. К. Горбунов;

д.ф.-м.н. профессор Е. Б. Кузнецов;

д.ф.-м.н. профессор О. В. Починка.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ М341 [Электронный ресурс]: Сборник материалов X Международной научной молодежной школы-семинар имени Е. В. Воскресенского (Саранск, 14-18 июля 2022 г.) / редкол.: В. Ф. Тишкин (отв. ред.) [и др.]. — Саранск: СВМО, 2022. — 236 с. Режим доступа: <http://conf.svmo.ru/files/2022/ThesesSaransk2022.pdf>

ISBN 978-5-901661-51-2

Настоящее издание содержит материалы докладов участников X Международной научной молодежной школы-семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е. В. Воскресенского, проходившей в Национальном исследовательском Мордовском государственном университете им. Н. П. Огарева с 14 по 18 июля 2022 г.

Представляет интерес для научных работников, студентов и аспирантов.

УДК 510:004.5

ББК В1

Публикуется на основании Устава Межрегиональной общественной организации «Средне-Волжское математическое общество» (п. 2.2) и по решению редакционно-издательского отдела СВМО.

ISBN 978-5-901661-51-2

© Коллектив авторов, 2022

© Оформление. СВМО, 2022

Предисловие

Настоящее издание содержит материалы докладов X Международной научной молодежной школы-семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е. В. Воскресенского, которая была проведена с 14 по 18 июля 2022 г. в г. Саранск (Россия). Организаторами школы-семинара выступили Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН и Средне-Волжское математическое общество.

Первая молодёжная научная школа-семинар по математическому моделированию, численным методам и комплексам программ организована в 2003 году. С тех пор школы-семинары стали регулярно проводится один раз в два года (чередуюсь с научными конференциями). Основателем и идейным вдохновителем научных конференций и школ-семинаров являлся талантливый ученый и организатор д.ф.-м.н. профессор Е. В. Воскресенский. Он руководил этими мероприятиями до 2008 года.

Доклады, представленные на школе-семинаре, посвящены исследованиям математических моделей в физике, химии, биологии, экономике и других областях человеческого знания. Диапазон подходов к исследованию моделей, рассмотренных в докладах, достаточно широк и включает как качественные, так и численные методы. Как правило, при использовании численных методов авторы привлекают современные компьютерные технологии, например, параллельные вычисления. Тематика докладов соответствует семинарам школы:

1. Принципы построения математических моделей.
2. Численная реализация алгоритмов математических моделей.
3. Динамические системы и качественные методы анализа математических моделей.
4. Математические модели физики, химии, биологии, экономики, социологии, экологии и других отраслей науки.

Все доклады, представленные на школе-семинаре, были предварительно прорецензированы Программным комитетом.

Организаторы благодарны всем участникам школы-семинара за интересные доклады и плодотворную дискуссию.

Программный, организационный и редакционный комитеты
X Международной научной молодежной школы-семинара
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ» имени Е. В. Воскресенского
Саранск, 14 — 18 июля 2022 года

Председатель организационного комитета —

ректор Национального исследовательского Мордовского государственного университета Д. Е. Глушко (г. Саранск)

Председатель программного комитета —

член-корреспондент РАН д.ф.-м.н. профессор В. Ф. Тишкин (Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва).

Ученый секретарь —

к.ф.-м.н. Е. Е. Пескова (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет, г. Саранск)

Программный комитет:

к.ф.-м.н., доцент	Р.В. Жалнин,	г. Саранск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	А.С. Андреев,	г. Ульяновск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Д.В. Баландин,	г. Н. Новгород,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	К.А. Баркалов,	г. Н. Новгород,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	И.В. Бойков,	г. Пенза,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	П.А. Вельмисов,	г. Ульяновск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	В.К. Горбунов,	г. Ульяновск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	В.З. Гринес,	г. Н. Новгород,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	И.М. Губайдуллин,	г. Уфа,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Ю.Н. Дерюгин,	г. Саров,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	А.П. Жабко,	г. Санкт-Петербург,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	А.М. Камачкин,	г. Санкт-Петербург,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Н.Д. Кузьмичев,	г. Саранск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Е.Б. Кузнецов,	г. Москва,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	С.И. Мартынов,	г. Сургут,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Н.Д. Морозкин,	г. Уфа,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	О.В. Починка,	г. Н. Новгород,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	И.П. Рязанцева,	г. Н. Новгород,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Н.В. Старостин,	г. Н. Новгород,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	В.А. Титарев,	г. Москва,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Ш.А. Алимов,	г. Ташкент,	Узбекистан.
д.ф.-м.н., профессор	П.П. Матус,	г. Люблин,	Польша.
д.ф.-м.н., профессор	А.А. Глуцюк,	г. Лион,	Франция.
д.ф.-м.н., профессор	А. Асанов,	г. Бишкек,	Кыргызстан.

Организационный комитет:

д.т.н., профессор	П.В. Сенин,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	А.М. Давыдкин,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	И.И. Чучаев,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Л.А. Сухарев,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	П.А. Шаманаев,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Т.Ф. Мамедова,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	С.М. Мурюмин,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Д.К. Егорова,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	А.Н. Тында,	г. Пенза,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Е.В. Десяев,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	А.О. Сыромясов,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., с.н.с.	М.Н. Вишнякова,	г. Саров,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Т.Е. Бадокина,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	О.С. Язовцева,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	В.Ф. Масыгин,	г. Саранск,	Россия.
аспирант, м.н.с.	С.Х. Зинина,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	Ю.В. Напалкова,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	Р.Р. Альбилов,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	Е.С. Капустина,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	А.И. Кулягин,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	Н.Н. Чернышов,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	Т.В. Меньшакова,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	Е.Е. Яшин,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	В.И. Назаров,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	А.Ф. Карчиганов,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	М.М. Халиков,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	Н.В. Пименова,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	О.Н. Терёхина,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	Д.А. Шишканов,	г. Саранск,	Россия.

Содержание

Абдуллов Т. С., Мухаметов А. Н., Якупов З. Я. Формальная постановка задачи роботизированного захвата и классификация существующих методов решения	12
Афиногентова Е. В. Метод линеаризации при исследовании одной математической модели дискретного динамического процесса	15
Ахмадуллин Р. Н., Якупов З. Я., Галимова Р. К. Ряды Фурье в прикладных исследованиях	19
Балабина Т. Ю., Дерюгин Ю. Н., Кудряшов Е. А. Некоторые результаты расчетов турбулентных течений в криволинейных каналах с использованием вихреразрешающего подхода	24
Барабоскин Д. А., Бакаева О. А. Разработка комбинированного алгоритма шифрования мультимедийных данных в процессе их передачи	27
Баркалов К. А., Усова М. А. Разделение параметров в задачах глобальной оптимизации с помощью методов машинного обучения	32
Бугров В. О., Рассадин А. Э. Модель распространения пандемии с двумя устойчивыми состояниями	40
Булатов М. В., Ботороева М. Н. О существовании и единственности непрерывного решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования	49
Буткина А. А., Гущина О. А., Кузнецова О. А., Шамаев А. В. Программная реализация иммунного алгоритма, применяемого для поиска проектных решений в электронном архиве проектной документации	55
Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А., Алексанин Н. Д. Математическое моделирование систем контроля за изменением давления в газожидкостных средах	68
Веселова Е. А., Дерюгин Ю. Н., Зеленский Д. К., Ктиторов В. М. Численное моделирование взрывов в воздухе с выделением ударной волны	73
Губайдуллин И. М. Опыт междисциплинарной и межрегиональной работы при моделировании процессов в химической технологии	76
Жалнин Р. В., Игайкин И. В. Применение методов математического моделирования в технологии VR/AR	83
Жалнин Р. В., Казакова И. С. Применение метода LU-SGS для решения нестационарных задач газовой динамики с использованием неявных схем	89
Зинина С. Х. Классификация надстроек над декартовыми произведениями меняю-	

щих ориентацию диффеоморфизмов окружности	100
Исмагилова А. С., Лушников Н. Д. Особенности разработанной системы защиты информации с применением биометрических технологий	104
Карпенко С. Н., Лебедев И. Г., Надумин Д. В. Использование нейросетевой аппроксимации целевой функции при решении задач глобальной оптимизации	111
Константинова А. А., Якупов З. Я., Галимова Р. К. Математическое моделирование процесса обработки металлических изделий	120
Кузьмичев Н. Д., Шушпанов А. А., Васютин М. А. Математическое моделирование равновесной намагниченности в осесимметричных жестких сверхпроводниках ..	125
Куряев Р. В., Фирсова С. А. Применение временных рядов для анализа результатов соревнований спортсменов-биатлонистов	129
Лазарев А. А., Дерюгин Ю. Н. Методика расчета задач радиационной газовой динамики методом частиц	133
Мартынов С. И. Динамика коагуляции частиц в жидкости	135
Мухаметов А. Н., Абдуллов Т. С., Якупов З. Я. Моделирование дымовой трубы с высоким числом Рейнольдса при помощи методов вычислительной гидродинамики ..	138
Никонов В. И. Об алгебро-геометрических свойствах циклических подпространств линейных операторов	145
Новикова К. Н., Новикова С. В. Разработка модели распознавания разнородных объектов на основе вложенных методов машинного обучения	149
Пивкин А. А., Сухарев Л. А. Реализация алгоритма поиска базисов Гребнера идеалов колец многочленов от нескольких переменных на языке C++	160
Рязанцева И. П. Метод итеративной регуляризации для нахождения обобщённой неподвижной точки нерастягивающего отображения на множестве гильбертова пространства	168
Сахаров А. Н. Геометрия фазового пространства комплексного периодического уравнения Риккати	178
Сыромясов А. О., Мальков В. Е. Имитационная SI-модель распространения эпидемии в замкнутой популяции	185
Тында А. Н., Сидоров Д. Н. Численное решение обратной задачи для интегральных динамических моделей с разрывными ядрами	193
Усманова А. А., Коледина К. Ф. Математическое моделирование многостадийной ге-	

терогенной реакции с учетом кинетики на поверхности цеолитного катализатора 200

Цапко Е. Д., Леонов С. С., Кузнецов Е. Б. Абсолютная устойчивость явной схемы метода Эйлера для задач, преобразованных к наилучшему аргументу и его модификации 210

Черенкова К. В., Быков А. Н., Вишнякова М. Н., Дерюгин Ю. Н., Емельянов А. Б., Лазарев А. А., Полищук С. Н. Численное моделирование селективного лазерного плавления методом SPH 214

Шалаева А. А., Мамедова Т. Ф., Лапшина А. А. Исследование взаимодействия компаний в сфере EdTech услуг в России 216

Шаманаев П. А. О биортогонализации полных обобщенных жордановых наборов линейного оператора и ему сопряженного в банаховом пространстве 221

Язовцева О. С., Губайдуллин И. М., Кокулов А. Ф., Макарова А. А., Пескова Е. Е. Моделирование окислительной регенерации сплошного цилиндрического зерна катализатора 225

V. L. Litvinov, K. V. Litvinova. Stochastic longitudinal oscillations viscoelastic rope with moving boundaries, taking into account damping forces. 231

Contents

T. S. Abdullov, A. N. Mukhametov, Z. Ya. Yakupov. Formal statement of the robotic grasping problem and classification of existing solution methods	12
E. V. Afinogentova. The linearization method for the study of a certain discrete dynamic process mathematical model	15
R. N. Ahmadullin, Z. Ya. Yakupov, R. K. Galimova. Fourier series in applied research	19
T. Y. Balabina, Y. N. Deryugin, E. A. Kudryashov. Some results of turbulent flows calculations in curved channels using a vortex-resolving approach	24
D. A. Baraboshkin, O. A. Bakaeva. The development of a combined algorithm for encrypting multimedia data during transmission	27
K. A. Barkalov, M. A. Usova. Separation of parameters using machine learning methods in global optimization problems	32
V. O. Bugrov, A. E. Rassadin. The model of the spread of a pandemic with two stable states	40
M. V. Bulatov, M. N. Botoroeva. The existence and uniqueness of a continuous solution of integral algebraic equations with variable limits of integration	49
A. A. Butkina, O. A. Gushina, O. A. Kuznetsova, A. V. Shamaev. Software implementation of the immune algorithm used to search for design solutions in the electronic archive of design documentation	55
P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova, N. D. Aleksanin. Mathematical modeling of control systems for pressure changes in gas-liquid media	68
E. A. Veselova, Yu. N. Deryugin, D. K. Zelensky, V. M. Ktitorov. Numerical simulation of explosions in the air with the release of a shock wave	73
I. M. Gubaydullin. Experience of interdisciplinary and interregional work in modeling processes in chemical technology	76
R. V. Zhalnin, I. V. Igajkin. Application of mathematical modeling methods in VR/AR technology	83
R. V. Zhalnin, I. S. Kazakova. Application of the LU-SGS method for solving unsteady gas dynamics problems using implicit schemes	89
S. Kh. Zinina. Classification of suspensions over Cartesian products of orientation-changing diffeomorphisms of the circle	100
A. S. Ismagilova, N. D. Lushnikov. Learning neural network for multi-factor authentication	

using biometric technologies	104
S. N. Karpenko, I. G. Lebedev, D. V. Nadumin. Using neural network approximation of the objective function in global optimization problems	111
A. A. Konstantinova, Z. Ya. Yakupov, R. K. Galimova. Mathematical modeling of the processing of metal products	120
N. D. Kuzmichev, A. A. Shushpanov, M. A. Vasyutin. Mathematical modeling of surface layer magnetization in axisymmetric hard superconductors	125
R. V. Kuryaev, S. A. Firsova. The use of time series to analyze the results of biathlon athletes' competitions	129
A. A. Lazarev, Yu. N. Deryugin. The method of calculating of the radiation gas dynamics problems by the particle method	133
S. I. Martynov. Dynamics of coagulation of particles in a fluid	135
A. N. Mukhametov, T. S. Abdullof, Z. Ya. Yakupov. Modeling a high Reynolds number chimney using Computational Fluid Dynamics	138
V. I. Nikonov. On algebro-geometric properties of cyclic subspaces of linear operators	145
K. N. Novikova, S. V. Novikova. Development of a heterogeneous object recognition model based on nested machine learning methods	149
A. A. Pivkin , L. A. Sukharev. Implementation of the algorithm for finding Groebner bases of polynomial rings ideals from several variables in C++.	160
I. P. Ryazantseva. Iterative regularization method for finding the generalized fixed point of non-stretching operator on the set of Hilbert space	168
A. N. Sakharov. Geometry of the phase space of the complex periodic Riccati equation	178
A. O. Syromyasov, V. E. Malkov. Imitational SI-model of epidemic spread in closed polulation	185
A. N. Tynda, D. N. Sidorov. Numerical solution of the inverse problem for integral dynamic models with discontinuous kernels	193
A. A. Usmanova, K. F. Koledina. Mathematical simulation of a chemical reaction on a catalyst grain using the finite difference method	200
E. D. Tsapko, S. S. Leonov, E. B. Kuznetsov. Absolute stability of the explicit scheme of the Euler method for problems transformed to the best argument and its modification	210
K. V. Cherenkova, A. N. Bykov, M. N. Vishnyakova, Yu. N. Deryugin, A. B. Emelyanov,	

A. A. Lazarev, S. N. Polishchuk. Numerical simulation of selective laser melting by the SPH method.	214
A. A. Shalaeva, T. F. Mamedova, A. A. Lapshina. Study Interaction of companies in the field of EdTech services in Russia	216
P. A. Shamaev. On biorthogonalization of complete generalized Jordan sets of a linear operator and its adjoint in a Banach space	221
O. S. Yazovtseva, I. M. Gubaydullin, A. F. Kokulov, A. A. Makarova, E. E. Peskova. Modeling of oxidative regeneration of a solid cylindrical catalyst grain	225
V. L. Litvinov, K. V. Litvinova. Stochastic longitudinal oscillations viscoelastic rope with moving boundaries, taking into account damping forces.	231

УДК 004.932

Формальная постановка задачи роботизированного захвата и классификация существующих методов решения

Абдуллов Т. С., Мухаметов А. Н., Якупов З. Я.

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ

Аннотация: Роботизированный захват объектов является важной задачей в робототехнике и компьютерном зрении. В работе рассматривается проблема роботизированного захвата. Осуществляется формальная постановка задачи и описывается классификация методов решения данной задачи.

Ключевые слова: робототехника, компьютерное зрение, захват объектов, роботизированный захват объектов.

В работе рассматривается проблема роботизированного захвата. Осуществляется формальная постановка задачи и описывается классификация методов решения данной задачи. Роботизированный захват объектов — это фундаментальная проблема не только в научной сфере робототехники, но и во множестве сфер индустрии и промышленности. Решение данной задачи позволит расширить области применения роботов. В зависимости от свойств объектов, которыми должен манипулировать робот, выбирают подходящую конфигурацию захвата. Существуют 2 самых распространённых типа захвата: вакуумные захваты и грипперы. Наибольший интерес представляют грипперы (рис. 1) из-за схожести функционирования с человеческими пальцами. Конструктивная особенность и принцип функционирования гриппера позволяет осуществлять захват объектов сложной геометрической формы.

Пусть положение захвата описывается следующим образом:

$$G = (x, y, z, r_x, r_y, r_z, w), \quad (1)$$

где x, y, z — координаты центра захвата, r_x, r_y, r_z — углы поворота захвата, w — ширина захвата (рис. 1). Входные данные могут быть представлены:

1) в виде облака точек:

$$I = (x_i, y_i, z_i), \quad (2)$$

где $x_i, y_i, z_i \in R$ — координаты точки сцены относительно устройства съёмки,

2) или в формате RGBD:

$$I = (C, D), \quad (3)$$

где $C \in R^{(3 \times H \times W)}$ — цветное трехканальное с высотой H и шириной W изображение, а $D \in R^{(H \times W)}$ — карта глубины с теми же размерностями.

Тогда необходимо найти такой алгоритм A , который проводит отображение множества входных данных во множество поз захвата:

$$A(I, \bar{w}) = V, \quad (4)$$

где $\bar{w}$ — параметры алгоритма; $V = (G'_1, \dots, G'_K)$ — множество предсказанных поз рабочего органа для захвата.

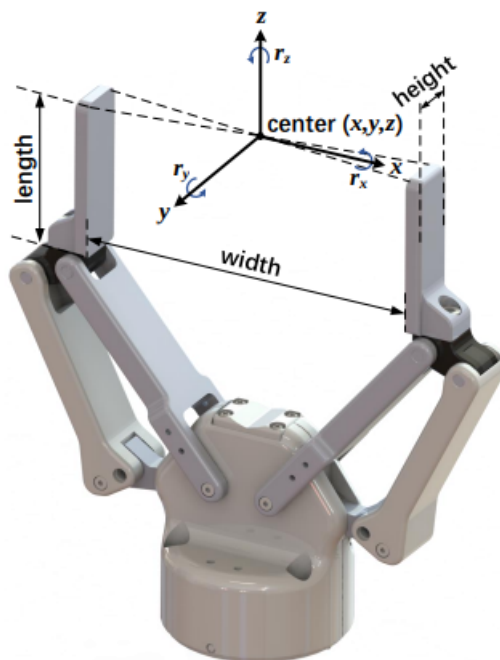


Рис. 1. Гриппер

Для решения задачи требуется большое количество качественных данных. Из всех существующих наборов данных можно выделить набор данных проекта GraspNet [1]. В наборе данных GraspNet содержится 190 нагромождённых сцен действия, снятых с использованием двух популярных RGBD камер (Kinect Azure и RealSense D435).

Подходы к решению задачи по роботизированному захвату можно классифицировать по множеству различных критериев. Вообще говоря, подходы можно разделить на статистические [1–3] и аналитические [4, 4, 5]. Аналитические подходы анализируют геометрию объектов, а статистические опираются на процесс обучения и данные. Статистические подходы дополнительно можно поделить по типу машинного обучения. Кроме того, подходы можно разделить на модельные и безмодельные.

Литература

1. Hao-Shu Fang et al. GraspNet-1Billion: A LargeScale Benchmark for General Object Grasping // Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2020. P. 11444–11453.
2. Bohg J., Morales A., Asfour T., Kragic D. Data-driven grasp synthesis—a survey // IEEE Transactions on Robotics (T-RO). 2014.
3. Sahbani A., El-Khoury S., Bidaud P. An overview of 3D object grasp synthesis algorithms // Robotics and Autonomous Systems. 2012.
4. Абдуллов Т., Мухаметов А. Роботизированный захват объектов известной формы с использованием монокулярной камеры // В сборнике: Физико-математические, естественно-научные и социальные аспекты

современного развития науки, техники и общества. Материалы I Городской молодёжной научной конференции. Казань. 2021. С. 3-6.

5. Абдуллов Т., Мухаметов А. Захват объекта вакуумным прихватом из неотсортированного множества // XXV Туполевские чтения (школа молодых ученых): Международная молодёжная научная конференция. С.4-6.

MSC 68T40

Formal statement of the robotic grasping problem and classification of existing solution methods

T. S. Abdullov, A. N. Mukhametov, Z. Ya. Yakupov

Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev

Abstract: Object grasping is a important task in robotics. In this work deals with the problem of robotic grasping. A formal formulation of the problem is carried out and a classification of methods for solving this problem is described.

Keywords: robotics, computer vision, object grasping, robotics grasping.

References

1. Hao-Shu Fang et al, GraspNet-1Billion: A LargeScale Benchmark for General Object Grasping, *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2020, P. 11444–11453.
2. J. Bohg, A. Morales, T. Asfour, D. Kragic, Data-driven grasp synthesis—a survey, *IEEE Transactions on Robotics (T-RO)*, 2014.
3. A. Sahbani, S. El-Khoury, P. Bidaud, An overview of 3D object grasp synthesis algorithms, *Robotics and Autonomous Systems*, 2012.
4. T. Abdullov, A. Mukhametov, Robotic capture of objects of known shape using a monocular camera, *Physical-mathematical, natural-scientific and social aspects of the modern development of science, technology and society. materials of the I City Youth Scientific Conference Kazan*, 2021, P. 3-6.
5. T. Abdullov, A. Mukhametov, Capturing an object by vacuum grabbing from an unsorted set, *XXV Tupolev Readings (School of Young Scientists): International Youth Scientific Conference*, P. 4-6.

УДК 517.962.2

Метод линеаризации при исследовании одной математической модели дискретного динамического процесса

Афиногентова Е. В.

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева

Аннотация: В статье в зависимости от параметров проведено исследование динамики математической модели численности биологической популяции. Получены ограничения на параметры, позволяющие применить метод линеаризации для решения задачи оптимизации критерия качества.

Ключевые слова: дискретная система, метод линеаризации, оценка решения.

1. Математическая модель динамики биологической популяции

Пусть динамика численности биологической популяции описывается дискретной системой

$$\begin{aligned}x(k+1) &= F(x(k), \gamma, D(k))x(k), \\k &= 0, 1, 2, \dots, \quad x(0) = x_0,\end{aligned}\tag{1}$$

где $x(k)$ — численность популяции в момент времени Tk , где $T = \text{const}$, $\gamma \in \mathbb{R}^s$ — многомерный параметр, $D(k) : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ — управляющее воздействие. Предположим, что популяция состоит из особей двух видов: потерявшие способность к размножению и сохранившие способность к размножению с постоянной η . Доля второго типа особей по отношению к общей численности популяции определяется соотношением

$$\frac{x_2(k)}{x(k)} = \exp(-\beta x(k)), \quad \beta = \text{const}\tag{2}$$

($x_2(k)$ — численность особей второго типа в момент времени Tk).

Уравнения выживаемости для первого и второго вида имеют вид

$$S_i(D) = \exp(-\gamma_i D), \quad \gamma_i = \text{const}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда правая часть системы (1) представима в виде

$$\exp(-\beta x(k) - \gamma_1 D(k) + \eta T) + (1 - \exp(-\beta x(k))) \exp(-\gamma_2 D(k)).$$

2. Минимизация критерия качества

Далее рассмотрим задачу минимизации критерия качества

$$J = ax(m) + \sum_{i=0}^{m-1} D^2(i).\tag{3}$$

Задача (1)-(3) может возникать, например, при лучевой терапии злокачественных новообразований [1]. В случае однородности популяции ($\beta = 0$) управляющее воздействие $D(k) = D$ при всех $k \in \mathbb{N} \in \{0\}$ и является корнем уравнения

$$\gamma_1 a x(0) \exp(m(\eta T - \gamma_1 D)) = 2D. \quad (4)$$

Нелинейный случай затрудняет получение точного аналитического решения. Далее, следуя [2], найдем ограничения на параметры модели, при которых задачу можно решить по линейному приближению

$$\begin{aligned} y(k+1) &= \exp(\eta T - \gamma_1 D) y(k), \quad y(0) = x(0), \\ k &= 0, 1, 2, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (5)$$

где D — корень уравнения (4).

Введем обозначение

$$C(D) = \exp(\eta T - \gamma_1 D) - \exp(-\gamma_2 D).$$

В силу того, что D решает задачу оптимизации функционала (3) на решениях уравнения (5),

$$0 < \exp(\eta T - \gamma_1 D) < 1 \text{ и } 0 < \alpha < 1, \quad (6)$$

где $\alpha = 1 - \exp(\eta T - \gamma_1 D)$. В зависимости от того, насколько отличаются друг от друга параметры γ_1 и γ_2 , возможны два случая:

1) если разность между γ_1 и γ_2 достаточно мала, то

$$\eta T > (\gamma_1 - \gamma_2)D, \text{ т. е. } C(D) > 0; \quad (7)$$

2) иначе

$$\eta T < (\gamma_1 - \gamma_2)D, \text{ т. е. } C(D) < 0. \quad (8)$$

Разберем случай 1).

Так как $x(k) \geq 0$, то справедливо неравенство

$$x(k+1) \leq \exp(\eta T - \gamma_1 D) x(k).$$

Получим, что

$$x(k) \leq y(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1. \quad (9)$$

Из (9) следует, что для нелинейного случая значение функционала не превысит оптимального значения, полученного по линейной модели.

Пусть имеет место случай 2).

Так как $\exp(-\beta x) > 1 - \beta x$ при $x > 0$, то

$$x(k+1) - x(k) \leq -\alpha x(k) - C(D)\beta x^2(k) \equiv \varphi(x(k))$$

Тогда

$$x(k) \leq u(k),$$

где $u(k)$ решение уравнения

$$u(k+1) - u(k) = \varphi(u(k)), u(0) = x(0), k = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Уравнение $\varphi(u) = 0$ в области $u \geq 0$ имеет два решения

$$u^{(1)} = 0 \text{ и } u^{(2)} = -\alpha/(C(D)\beta)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \varphi(u(k)) &> 0 \text{ при } u(k) > u^{(2)}, \\ \varphi(u(k)) &< 0 \text{ при } 0 < u(k) < u^{(2)}, \end{aligned}$$

приходим к выводу, что последовательность $\{u(k)\}_{k=0}^m$ возрастает при $u(0) > u^{(2)}$ и, строго убывая, стремится к нулю при $0 < u(0) < u^{(2)}$. Таким образом, если $0 < u(0) < u^{(2)}$, то $u(k) \leq u(0)$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$. А это дает $x(0) < u^{(2)}$ и

$$x(k) \leq x(0), k = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{x(k+1)}{x(k)} &= 1 - \alpha - C(D)(1 - \exp(-\beta x(k))) \leq \\ &\leq 1 - \alpha - C(D)(1 - \exp(-\beta x(0))) \equiv \delta \end{aligned}$$

Отсюда $x(k) \leq r(k)$, где $r(k)$ — решение уравнения

$$r(k+1) = \delta r(k), r(0) = x(0), k = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Следовательно, для $x(m)$ выполняется оценка

$$x(m) \leq \delta^m r(0). \quad (11)$$

Неравенство (11) позволяет оценить погрешность линеаризации

$$x(m) - y(m) \leq (\delta^m - (1 - \alpha)^m)x(0). \quad (12)$$

Если $C(D) > 0$, т.е. если особи первого и второго вида близки по чувствительности к управляющему воздействию, то равномерное во времени распределение $D(k)$ близко к оптимальному. В случае $C(D) < 0$ и $\beta \neq 0$ оценка (12) определяет допустимость метода линеаризации при решении задачи (1)-(3).

Литература

1. Иванов В.К. Оптимизация лучевой терапии в модели гетерогенной популяции опухолевых клеток // Автомат. и телемех. 1986. № 5. С. 102-107. URL: <http://mi.mathnet.ru/at6272>
2. Афиногентова Е.В., Щенников В. Н. Исследование корректности применения линейной математической модели раковой опухоли при лучевой терапии. Морд. гос. ун-т. Саранск. 2001. 8 с. Рус. Деп. в ВИНТИ. № 773-В2001 от 28.03.2001.

MSC 34G10 58D25

The linearization method for the study of a certain discrete dynamic process mathematical model

E. V. Afinogentova

National Research Ogarev Mordovia State University

Abstract: In the article depending on the parameters a study of the dynamics of a mathematical model for the number of biological populations is carried out. Restrictions on parameters are obtained that allow applying the linearization method to solve the problem of optimizing the quality criterion.

Keywords: discrete system, linearization method, solution estimation

References

1. V.K. Ivanov, Optimizaciya luchevoj terapii v modeli geterogennoj populyacii opuholevyh kletok *Avtomat. i telemekh.*, 1986, Vol. 5, pp. 102-107. (In Russian). URL: <http://mi.mathnet.ru/at6272>
2. E.V. Afinogentova , V.N. Shhennikov, Issledovanie korrektnosti primeneniya linejnoj matematicheskoj modeli rakovoj opuxoli pri luchevoj terapii, Mord. gos. un-t, Saransk, 2001, 8 p. Rus. Dep. v VINITI. № 773-V2001, 28.03.2001.

УДК 51-74

Ряды Фурье в прикладных исследованиях

Ахмадуллин Р. Н., Якупов З. Я., Галимова Р. К.

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.
Туполева-КАИ

Аннотация: В статье рассматриваются преобразования рядов Фурье. Они представлены с использованием тригонометрической функции и комплексных чисел. Представлено применение рядов Фурье в прикладных исследованиях, отмечены преимущества и недостатки их применения.

Ключевые слова: тригонометрический ряд, чётность функции, непериодическая функция, комплексное число.

А знаете ли вы, почему при игре на гитаре медиатором, звук получается громче, чем при игре пальцами? Теория рядов Фурье, непосредственно, ответит на данный вопрос.

Предположим, что задана некая функция. Требуется узнать: можно ли (и если можно, то как) представить эту функцию в виде наложения большого количества синусоид с разными амплитудами, фазами и частотами. Впервые эта задача появилась в начале 18 в. в связи с решением вопроса о форме колебаний струны. Из теории и практики было известно, что струна может колебаться по синусоиде, притом так, что на её длине всегда уместится целое число полуволн, что обусловлено условием закрепления струны на концах. Эти простейшие синусоидальные формы колебаний струны стали называть гармониками. Было также известно, что струна может колебаться не только по синусоиде, но и принимать более сложные формы. Таким образом, ряды Фурье помогают понять, по форме функций, какие гармоники содержатся в функции $f(x, t)$ и, сказать, какие частоты слышимы [1, с. 327].

Прежде чем подробно рассмотреть ряды Фурье, необходимо отметить, что существует два подхода к изложению этой темы.

Запишем формулу Эйлера для комплексной экспоненты:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (1)$$

Из этого следует, что все возможные линейные комбинации, т. е. сумма с различными коэффициентами $\{\sin kx, \cos kx\}$, эквивалентны всем возможным линейным комбинациям $\{e^{ikx}, e^{-ikx}\}$. Эта эквивалентность приводит к возникновению двух подходов в описании методики. Первый вариант является более наглядным и более естественным, в нём не возникают комплексные числа, второй – более красивый, компактный.

Рассмотрим первый подход к описанию рядов Фурье.

Разложение в ряд Фурье основывается на предположении, что все имеющие практическое значение функции в интервале $-\pi \leq x \leq \pi$ можно выразить в виде сходящихся тригонометрических рядов. Известно, что ряд считается сходящимся, если сходится последовательность частичных сумм, составленных из его членов.

Стандартная запись осуществляется через сумму $\sin$ и $\cos$:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots \quad (2)$$

где $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2$ – действительные константы, т. е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где для диапазона от $-\pi$ до π коэффициенты ряда Фурье рассчитываются по формулам [2, с. 167]:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Известно, что коэффициенты ряда находятся методом интегрирования по частям или с помощью интегрирования тригонометрических функций.

Формула (2) – это периодический ряд Фурье с периодом 2π . Само разложение в ряд Фурье применяется для начальной функции (2), в частности, она раскладывается на компоненты $\cos$ и $\sin$. Это востребовано при описании переменных тока и напряжений, сложных акустических сигналов.

Стоит отметить, что, прежде чем вычислить сходящийся тригонометрический ряд, нужно рассмотреть достаточный признак сходимости ряда Фурье [3, с. 4]. Сумма полученного ряда $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности функции, а в точках её разрыва сумма ряда равна полусумме левостороннего и правостороннего пределов функции, то есть если $x = c$ – точка разрыва, то:

$$S(x) \Big|_{x=c} = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}. \quad (3)$$

Для разложения функции в ряд Фурье также понадобится понятие чётности функции. Если функция $f(x)$ чётная, то её ряд Фурье будет содержать только коэффициенты a_n и в самом ряде будут содержаться только функции $\cos$. В таком случае функция примет вид:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (4)$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Если же функция нечётная, то в ряде Фурье будут иметься только $\sin$, а для его нахождения нужны лишь коэффициенты b_n . Нечётная функция ряда Фурье выглядит следующим образом:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (5)$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Итак, мы выяснили, что периодическая функция описывает некоторые колебания (прибавление к аргументу какого-то числа, называемого периодом, не изменит функции). Но стоит сказать и о непериодической функции Фурье. Например, её можно доопределить как чётную или нечётную [3, с. 8].

Теперь рассмотрим второй подход к разложению в ряд Фурье.

Запись коэффициентов и рядов Фурье можно также упростить с использованием понятия комплексного числа. Каждое слагаемое в ряде Фурье имеет вид:

$$a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t, \quad (6)$$

а функции $\cos$ и $\sin$ представимы через экспоненту с мнимым показателем.

Запишем основное соотношение теории функции комплексного переменного:

$$e^{ik\omega t} = \cos k\omega t + i \sin k\omega t, \quad (7)$$

где i – мнимая единица.

То же самое соотношение можно записать и для обратного по знаку показателя:

$$e^{-ik\omega t} = \cos k\omega t - i \sin k\omega t, \quad (8)$$

В силу того, что $\cos$ – чётная функция, противоположный аргумент не изменит ее значения, $\sin$ же, как нечётная функция, изменит знак.

Из формул (7) и (8) можно выразить $\cos$ и $\sin$. Для этого нужно, соответственно, сложить и вычесть данные формулы. Получим:

$$\begin{cases} e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t} = 2 \cos k\omega t, \\ e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t} = 2i \sin k\omega t. \end{cases} \quad (9)$$

Подставим полученное выражение для $\sin$ и $\cos$ (9) в исходное выражение (6). После элементарного преобразования мы получим:

$$\left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i}\right) e^{ik\omega t} + \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i}\right) e^{-ik\omega t}. \quad (10)$$

Теперь для единообразия представления сделаем предположение, что ряд суммируется по k не от $(0; +\infty)$, а от $(-\infty; +\infty)$. Тогда второе слагаемое выражения (10) будет соответствовать отрицательной, а первое слагаемое – положительной части этого ряда. Коэффициент, стоящий перед мнимой экспонентой $\left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i}\right)$, мы обозначим через c_k – комплексное число, зависящее от k и от того, к какой части ряда (положительной или отрицательной) оно относится.

С учетом $\frac{1}{i} = -i$ получим:

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \text{ при } k > 0 \quad (11)$$

и

$$c_k = \frac{a_k + ib_k}{2} \text{ при } k < 0. \quad (12)$$

Пользуясь введёнными обозначениями (11) и (12), сумму ряда мы можем записать в виде:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}. \quad (13)$$

Преимущества такой формы представления заключаются в следующем. Во-первых, эта запись компактна, единообразна и эстетична. Во-вторых, именно с помощью этой записи можно осуществить предельный переход в случае бесконечного периода и получить непрерывное преобразование Фурье для непериодических сигналов [4].

Метод Фурье зарекомендовал себя как эффективное средство исследования физических процессов: он позволяет в подчас весьма зашумлённом сигнале увидеть то, что невооружённым взглядом увидеть невозможно, выделить те колебания, которые имеют особый смысл в рамках решаемой задачи. Тем не менее, у этого метода есть и ограничения. Главный недостаток заключается в том, что он пригоден только для стационарных процессов (под стационарностью понимается не постоянство сигнала во времени, а постоянство его спектральных характеристик). Если амплитуда какой-то гармоники изменилась, метод Фурье не выявит, в какой момент времени это произошло.

Благодаря широкому применению метода Фурье и сходных с ним аналитических методов мы и сегодня можем повторить с полным основанием то, что лорд Кельвин сказал в 1867 году: «Теорема Фурье не только является одним из самых изящных результатов современного анализа, но и даёт нам незаменимый инструмент в исследовании самых трудных вопросов современной физики» [5].

Литература

1. Лосев Г.В. Исследование колебательных процессов с помощью рядов Фурье // Материалы LXIII студенческой научной конференции. Под редакцией Н.С. Сергеева. Челябинск: ИАИ ЮУрГАУ, 2012. 342 с.
2. Ерин С.В., Николаев Ю.Л. Автоматизация инженерных расчетов с использованием пакета Scilab: практическое пособие. Москва: Русайнс, 2020. 183 с.
3. Романова Л.Д., Шаркунова Т.А., Елисеева Т.В. Интегральные преобразования: учебное пособие. Пенза: Изд-во ПГУ, 2015. 76 с.
4. Ганин В.Д. Выделение полезного сигнала из белого шума // Современные тенденции развития науки и образования: теория и практика. Сборник материалов 3-й Международной научно-практической конференции. Москва: ВИПО, 2019. С. 113-118.
5. Брейсуэлл Р.Н. Преобразование Фурье.
www.ai-library.ru/ainfo/ailenta_594.html?ysclid=15b3j3evz2927607579
(дата обращения 07.07.2022).

MSC 42B05

Fourier series in applied research

R. N. Ahmadullin, Z. Ya. Yakupov, R. K. Galimova

Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev

Abstract: The article discusses the Fourier series transformations. They are represented using a trigonometric function and complex numbers. The application of Fourier series in applied research is presented, the advantages and disadvantages of their application are noted.

Keywords: trigonometric series, parity of a function, non-periodic function, complex number.

References

1. G.V. Losev, Investigation of oscillatory processes using Fourier series, *Materials of the LXIII Student Scientific Conference: conference materials*, Chelyabinsk, IAI Yurgau, 2012. 342 p.
2. S.V. Erin, Yu.L. Nikolaev, Automation of engineering calculations using the Scilab package: a practical guide, Moscow, Rusains, 2020, 183 p.
3. L. D. Romanova, T. A. Sharkunova, T. V. Eliseeva, Integral transformations: textbook, Penza, Publishing House of PSU, 2015. 76 p.
4. V.D. Ganin, Isolation of a useful signal from white noise, *Modern trends in the development of science and education: theory and practice. Collection of Materials of the 3rd International Scientific and Practical Conference*, Moscow, VIPO, 2019. P. 113-118.
5. R.N. Bracewell. Fourier Transform.
www.ai-library.ru/ainfo/ailenta_594.html?ysclid=15b3j3evz2927607579
(date of access 07.07.2022).

УДК 519.63

Некоторые результаты расчетов турбулентных течений в криволинейных каналах с использованием вихреразрешающего подхода

Балабина Т. Ю., Дерюгин Ю. Н., Кудряшов Е. А.

ФГУП «РФЯЦ - ВНИИЭФ»

Аннотация: В работе исследуются структуры турбулентных потоков с использованием сеточных моделей, отвечающих RANS и вихреразрешающим моделям турбулентности. Актуальность работы обусловлена требованиями детального моделирования турбулентных явлений, возникающих под воздействием многих факторов в лазерных установках замкнутого типа. Из хорошей согласованности произведенных расчетов с экспериментальными данными сделан вывод об адекватности моделирования исследуемых явлений с использованием вихреразрешающей DES модели турбулентности.

Ключевые слова: численное моделирование, сеточная модель, турбулентность.

Ключевым аспектом в создании лазерных установок замкнутого типа является получение однородного профиля скорости на рабочих участках. Однако, поворотные конструкции, изменение размеров сечения канала, введение экранирующих потоков существенно влияют на структуру потока. Все это приводит к возникновению возмущений в потоке и развитию турбулентности.

Рассматривая проблему эффективных способов выравнивания профиля скорости потока, следует учитывать, что каждый источник генерации возмущений порождает определенный вид неоднородности. Таким образом, первоочередной задачей в решении поставленной проблемы является получение представления о формировании той или иной неоднородности, которая порождается характерными элементами конструкции. В рамках данной работы рассмотрены поворотные участки канала на угол 90° (колено), а также связка «диффузор-конфузор».

Современные подходы к моделированию течений в каналах подобного типа предъявляют высокие требования к описанию турбулизации потока. Использование RANS моделей, в расчетах такого типа дает, как правило, квазистационарную картину течения, что не совсем соответствует действительности. Модели турбулентности должны достаточно точно описывать не только усредненные поля, но и мелкомасштабные пульсации отрывных течений, которые можно получить только в нестационарном расчете. В настоящее время для этих целей развиты вихреразрешающие модели турбулентности, которые позволяют увеличить разрешающую способность моделирования турбулентных течений [1] и получать более адекватные картины течений. Одним из основных требований к использованию вихреразрешающих моделей является требование к расчетной сетке. В области турбулентных вихрей сетка должна иметь размер ячеек достаточный для их точного разрешения.

В настоящей работе для численного исследования структуры турбулентных потоков в рассматриваемых элементах конструкций построены сеточные модели, отвечающие RANS и вихреразрешающим моделям турбулентности. Расчеты течений были выполнены как в стационарной, так и в нестационарной постановках

по комплексу программ «ЛОГОС» [2] на параллельном суперкомпьютере. Из анализа полученных результатов делается вывод о том, что осредненные параметры потока в нестационарной постановке с использованием вихреразрешающей DES модели турбулентности [3] качественно и количественно лучше совпадает с экспериментальными данными, которые были получены на аэродинамическом стенде ФТ-18 на базе НГТУ им. Р. Е. Алексеева [4].

Литература

1. Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Травин А.К., Шур М.Л. Современные подходы к моделированию турбулентности: учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. Ун-та, 2016. 234 с.
2. Козелков А.С., Дерюгин Ю.Н., Зеленский Д.К., Полищук С.Н., Лашкин С.В., Жучков Р.Н., Глазунов В.А., Яцевич С.В., Курулин В.В. Многофункциональный пакет программ ЛОГОС: физико-математические модели расчета задач аэро-, гидродинамики и тепломассопереноса. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013. 67 с.
3. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
4. Аношкин Ю.И., Добров А.А., Кузьма М.М. и др. Разработка и обоснование экспериментального стенда ФТ-18 для исследования процессов смешения в моделях различной геометрии // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2019. № 2 (125). С. 94-104. DOI 10.46960/1816-210X2019_2_94

MSC 65D25

Some results of turbulent flows calculations in curved channels using a vortex-resolving approach

T. Y. Balabina, Y. N. Deryugin, E. A. Kudryashov

FSUE «RFNC - VNIIEF»

Abstract: The paper investigates the structures of turbulent flows using grid models corresponding to RANS and vortex-resolving turbulence models. The relevance of the work is due to the requirements of detailed modeling of turbulent phenomena arising under the influence of many factors in closed-type laser installations. The conclusion is made about the adequacy of modeling the phenomena under study using the vortex-resolving DES turbulence model from the good consistency of the calculations performed with the experimental data.

Keywords: numerical modeling, grid model, turbulence.

References

1. A.V. Garbaruk, M.H. Strelec, A.K. Travin, M.L. SHur, Modern approaches to turbulence modeling: textbook, St. Petersburg, Publishing House of the Polytechnic. Un-ta, 2016. 234 p.
2. A.S. Kozelkov, Yu.N. Deryugin, D.K. Zelensky, S.N. Polishchuk, S.V. Lashkin, R.N. Zhuchkov, V.A. Glazunov, S.V. Yatsevich, V.V. Kurulin, Multifunctional software package LOGOS: physico-mathematical models for calculating problems of aero-, hydrodynamics and heat and mass transfer, Sarov, RFNC-VNIIEF, 2013, 67 p.
3. K.N. Volkov, V.N. Emelyanov, Modeling of large vortices in calculations of turbulent flows, M, FIZMATLIT, 2008.
4. Yu.I. Anoshkin, A.A. Dobrov, M.M. Kuzma and [et al.], Development and justification of the FT-18 experimental stand for the study of mixing processes in models of various geometries, *Proceedings of the R.E. Alekseev NSTU*, 2019, № 2 (125), P. 94-104. DOI 10.46960/1816-210X2019_2_94

УДК 004.056.55

Разработка комбинированного алгоритма шифрования мультимедийных данных в процессе их передачи

Барабошкин Д. А., Бакаева О. А.

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва

Аннотация: В статье представлено описание процесса разработки комбинированного алгоритма шифрования мультимедийных данных, суть которого состоит в применении существующих алгоритмов на разных этапах шифрования.

Ключевые слова: комбинированный алгоритм, шифрование данных, криптостойкость, ключ, хеш, пакет, процесс Handshake, безопасность, конфиденциальность.

Передача информации в современном виде была бы невозможна без существования протоколов передачи данных. В основе протоколов лежат алгоритмы шифрования данных. Существующие алгоритмы: AES, RSA, протокол Диффи-Хеллмана и функция хеширования данных SHA256 – имеют ряд недостатков с точки зрения безопасности передачи и хранения данных пользователя [1, 2]. Поэтому существует необходимость разработки универсального алгоритма шифрования мультимедийных данных.

Комбинированный алгоритм основан на инициировании и передаче RSA ключей, а также ключей Диффи-Хелмана, необходимых для осуществления процесса «рукопожатия» Handshake – установки защищенного соединения между инициатором и респондером.

Процесс Handshake включает в себя три шага. На первом шаге процесса Handshake происходит обмен RSA ключами. Он представлен на рис. 1.

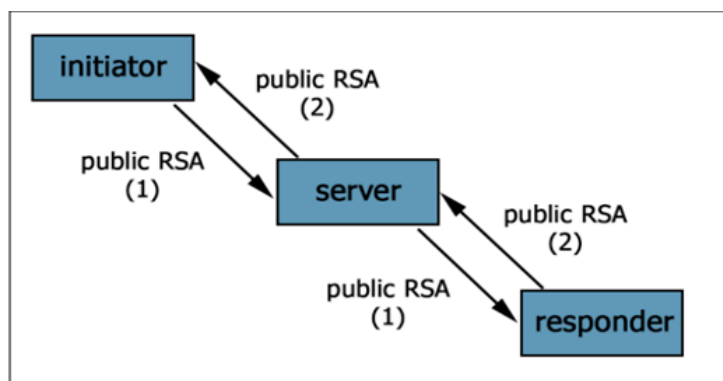


Рис. 1. Обмен RSA ключами между инициатором и респондером

Идентичность проверяется посредством сравнения хеша от присланного public RSA с `sender_id`. Далее, если они не совпадают, Handshake прерывается.

На втором шаге процесса Handshake происходит обмен Диффи-Хелман ключами, представленный на рис. 2.

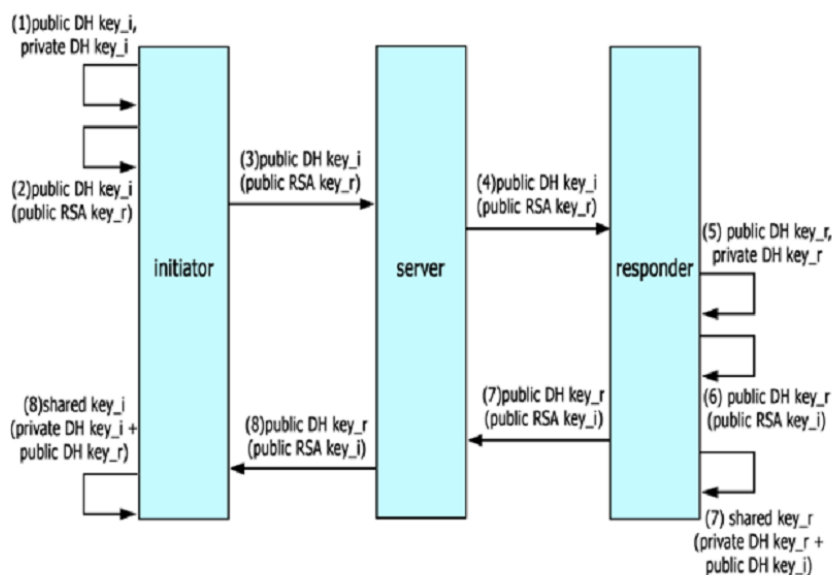


Рис. 2. Алгоритм генерации и передачи ключей Диффи-Хелмана

Алгоритм генерации и обмена Диффи-Хелман ключами представляет собой следующую последовательность действий:

- 1) на стороне инициатора генерируется пара public и private Диффи-Хелман ключей;
- 2) public Диффи-Хелман ключ шифруется полученным public RSA собеседника;
- 3) зашифрованный public Диффи-Хелман ключ отправляется собеседнику;
- 4) сервер пересылает public Диффи-Хелман ключ собеседнику;
- 5) на стороне респондера генерируется пара public и private Диффи-Хелман ключей;
- 6) public Диффи-Хелман ключ шифруется полученным public RSA собеседника;
- 7) зашифрованный public Диффи-Хелман ключ отправляется собеседнику; далее происходит генерация shared key с помощью private Диффи-Хелман ключа от респондера и public Диффи-Хелман ключа от инициатора;
- 8) сервер пересылает public Диффи-Хелман ключ собеседнику.

Далее инициатор принимает сообщение сервера и генерирует shared key.

После 7-го шага responder создает «крипто-материал». Это происходит следующим образом.

Берется shared key и к нему добавляются байты: 0, 1, 2.

- 1 – shared key | 0
- 2 – shared key | 1
- 3 – shared key | 2

Полученные три «крипто-материала» хешируются с помощью SHA-256 и от результатов хеша получают:

- 1 – session_id;
- 2 – AES key (encryption_key для initiator, decryption_key для responder);
- 3 – AES key (encryption_key для responder, decryption_key для initiator).

После завершения второго шага устанавливается защищенное соединение и на-

чинается третий шаг процесса Handshake, в котором происходит обмен полученными `session_id` между инициатором и респондером.

Полученный `session_id` отправляется собеседнику. Собеседник отправляет свой, полученный `session_id`. Происходит сравнение `session_id` собеседников. Они должны получиться одинаковыми. Тогда соединение будет установлено. Если они различны – соединение обрывается.

Таким образом, в процессе Handshake происходит обмен public RSA ключами между инициатором и респондером, генерация пар public и private DH keys на сторонах клиентов. С помощью пары private DH key и public DH key генерируется shared key, создаются 3 «крипто-материала». Они хешируются с помощью SHA-256 и от результатов хеша получают пары `encryption_key` (AES key для initiator), `decryption_key` (AES key для responder) и `encryption_key` (AES key для responder), `decryption_key` (AES key для initiator) [3].

В процессе шифрования при отправке сообщения данные шифруются с помощью AES.

Для осуществления процесса установки защищенного соединения были разработаны пакеты, описанные ниже и представленные на рис. 3-4 [4].

`INIT_HANDSHAKE_REQUEST` = 100 (Инициализация Handshake)

key length – 2 байта

key – key length байт

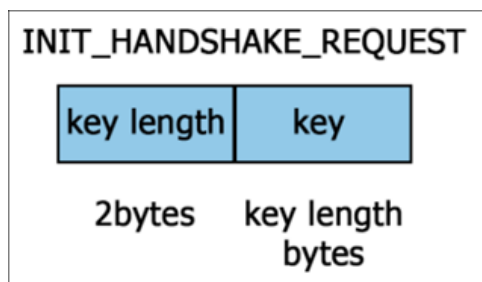


Рис. 3. Структура payload INIT HANDSHAKE REQUEST

`INIT_HANDSHAKE_RESPONSE` = 101

status – 1 байт

0 – none (discard)

1 – success (продолжаем Handshake)

key length – 2 байта

key – key length байт

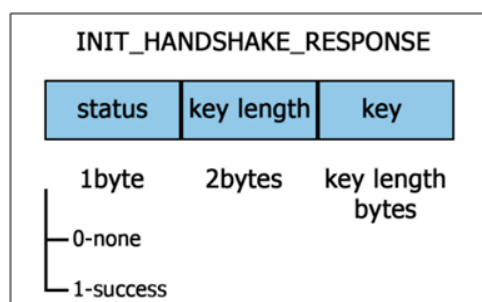


Рис. 4. Структура payload INIT HANDSHAKE RESPONSE

First step – обмен public DH keys, зашифрованными с помощью public RSA ключа

собеседника.

`HANDSHAKE_FIRST_STEP_INITIATOR = 200`

DH key, зашифрованный с помощью public RSA ключа собеседника, полученного в предыдущем шаге.

`HANDSHAKE_FIRST_STEP_RESPONDER = 201`

DH key, зашифрованный с помощью public RSA ключа собеседника, полученного в предыдущем шаге.

Second step – проверка правильности полученных параметров защищенного канала `session_id` и пары полученных shared keys ключей. Они проверяются на совпадение у initiator и responder.

`HANDSHAKE_SECOND_STEP_INITIATOR = 300`

`session_id` зашифрованный своим `encryption_key`.

`HANDSHAKE_SECOND_STEP_RESPONDER = 301`

`session_id` зашифрованный своим `encryption_key`.

При разработке комбинированного алгоритма шифрования данных использовались [1]:

- 1) криптографический протокол Диффи-Хелмана;
- 2) алгоритм хеширования SHA-256;
- 3) симметричный алгоритм блочного шифрования AES с размером ключа 128 бит в режиме шифрования CTR;
- 4) криптографический алгоритм с открытым ключом RSA.

Получение хеша и проверка целостности получаемого пакета осуществляется с помощью алгоритма SHA-256.

Данный алгоритм позволяет обеспечить максимальный уровень безопасности передачи данных и тем самым сохранить приватность пользователя.

Литература

1. Барабошкин Д.А., Бакаева О.А. Анализ алгоритмов шифрования данных // Сборник научных статей 3-й Всероссийской молодежной научной конференции «ЗА НАМИ БУДУЩЕЕ: взгляд молодых ученых на инновационное развитие общества». Юго-Зап. гос. ун-т, Курск. 2022. Т. 2. С. 449–452.
2. Старусев О.Г. Формальное описание функционирования протоколов передачи данных // Вестник НТУ ХПИ. 2005. №46. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/formalnoe-opisanie-funktsionirovaniya-protokolov-peredachi-dannyh>
3. Вотинов М.В. Практикум по архитектуре вычислительных машин, комплексам защиты информации и протоколам передачи данных в компьютерных сетях. Мурманск: МГТУ, 2018. 110 с.
4. Беляев С.В., Совин А.В., Солошенко Е.Б. История развития последовательных протоколов передачи данных // Оборонный комплекс научно-техническому прогрессу России. 2007. №2. С. 55–60. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=11902688>.

MSC 68P25

The development of a combined algorithm for encrypting multimedia data during transmission

D. A. Baraboshkin, O. A. Bakaeva

National Research Mordovia State University

Abstract: The article presents a description of the process of developing a combined algorithm for encrypting multimedia data, the essence of which is to apply existing algorithms at different stages of encryption.

Keywords: combined algorithm, data encryption, cryptographic strength, key, hash, packet, Handshake process, security, privacy.

References

1. D.A. Baraboshkin, O.A. Bakaeva, Analysis of data encryption algorithms, *Collection of scientific papers of the 3rd All-Russian youth scientific conference "FOR WE ARE THE FUTURE: the view of young scientists on the innovative development of society"*, South-West. State University, 2022, Vol. 2, P. 449–452.
2. O.G. Starusev, Formal Description of the Functioning of Data Transmission Protocols, *Newsletter of NTU KhPI*, 2005, №46. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/formalnoe-opisanie-funktsionirovaniya-protokolov-peredachi-dannyh>
3. M.V., Votinov Workshop on the architecture of computers, information protection systems and data transmission protocols in computer networks, Murmansk, MSTU, 2018, 110 p.
4. S.V. Belyaev, A.V. Sovin, E.B. Soloshenko, History of Serial Data Transmission Protocols Development, *Defense Complex to Scientific and Technical Progress of Russia*, 2007, №2, C. 55-60. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=11902688>.

УДК 519.853.4

Разделение параметров в задачах глобальной оптимизации с помощью методов машинного обучения *

Баркалов К. А., Усова М. А.

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Аннотация: В работе представлены результаты исследования подхода к решению задач глобальной оптимизации с разным характером зависимости от разных групп параметров. Предложена схема выделения параметров задачи, которые оказывают локальное влияние на целевую функцию, что позволяет решать существенно многомерные задачи с использованием многошаговой схемы редукции размерности. При этом на разных уровнях рекурсии используются разные оптимизационные алгоритмы. Исследование работоспособности предложенного подхода проведено при решении тестовых и прикладных задач глобальной оптимизации.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, локальная оптимизация, редукция размерности, разделение параметров

1. Постановка задачи

В настоящее время методы глобальной оптимизации используются в различных областях науки и техники, например, для идентификации значений параметров математических моделей, при которых результаты моделирования наиболее близки к результатам, полученным экспериментально. Число параметров, которые требуется определить подобным образом, например, для задач химической кинетики, может составлять десятки и сотни. В данном случае использование детерминированных методов глобальной оптимизации крайне ограничено в силу чрезвычайно больших вычислительных затрат на покрытие области поиска точками испытаний. Это остается справедливым даже в случае использования эффективных алгоритмов (например, [1, 2]), строящих существенно неравномерные покрытия. При этом частым явлением в подобных задачах является близкая к линейной зависимость по некоторой группе параметров, в то время как для остальных параметров наблюдается сложный многоэкстремальный характер. Заранее указать разделение на группы параметров с разным характером поведения целевой функции, как правило, не представляется возможным, т. к. целевая функция в обратных задачах задается как черный ящик.

Задача многомерной многоэкстремальной оптимизации может быть определена как проблема поиска наименьшего значения действительной многоэкстремальной функции $\varphi(y)$

$$\begin{aligned}\varphi(y^*) &= \min \{\varphi(y) : y \in D\}, \\ D &= \{y \in R^N : a_i \leq y_i \leq b_i, 1 \leq i \leq N\},\end{aligned}\tag{1}$$

* Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 0729-2020-0055) и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего» (проект № 075-02-2021-1394).

где D есть область поиска, представляющая собой некоторый гиперпараллелепипед N -мерного евклидова пространства. Будем предполагать, что функция $\varphi(y)$ задана в виде «черного ящика» и удовлетворяет условию Липшица

$$|\varphi(y') - \varphi(y'')| \leq L \|y' - y''\|, \quad y', y'' \in D, \quad 0 < L < \infty,$$

с априори неизвестной константой L .

Целевые функции большинства практических задач оптимизации обладают данным свойством. Одновременно с этим будем предполагать, что зависимость целевой функции от N_1 параметров является многоэкстремальной, а от оставшихся $N_2 = N - N_1$ параметров зависимость является близкой к линейной или квадратичной. При этом разделение параметров является неизвестным.

2. Общее описание подхода к решению

Решение поставленной задачи можно организовать с помощью *многошаговой схемы редукции размерности* [3], согласно которой решение многомерной задачи оптимизации может быть получено посредством решения последовательности «вложенных» одномерных задач. Таким образом, решение исходной задачи (1) можно проводить следующим образом:

$$\varphi(y^*) = \min_{y \in D} \varphi(y) = \min_{y^1 \in D_1} f(y^1), \quad D_1 = \{y \in R^{N_1} : a_i \leq y_i \leq b_i, \quad 1 \leq i \leq N_1\}, \quad (2)$$

где

$$f(y^1) = \min_{y^2 \in D_2} \varphi(y^1, y^2), \quad D_2 = \{y \in R^{N_2} : a_i \leq y_i \leq b_i, \quad N_1 + 1 \leq i \leq N\}. \quad (3)$$

Данный подход широко используется для снижения сложности алгоритмов глобальной оптимизации и позволяет формировать эффективные покрытия области поиска. Решение многоэкстремальной подзадачи (2), для которой требуется использовать сложные оптимизационные алгоритмы, будет проводиться на верхнем уровне рекурсии с помощью *алгоритма глобального поиска* [4], принадлежащего классу характеристических алгоритмов, в сочетании со схемой редукции размерности на основе *кривых Пеано* [5]. Этот алгоритм зарекомендовал себя как мощный инструмент для решения сложных многоэкстремальных задач.

Унимодальные подзадачи (3) на нижнем уровне могут быть решены с помощью методов прямого поиска, которые не предполагают гладкости функции. При поиске минимума эти методы измеряют только значения функций, потому в отличие от методов типа BFGS, они не требуют вычисления градиента и хорошо работают в условиях наличия вычислительных ошибок в значениях функций, что является типичным при решении прикладных задач. Одним из наиболее популярных в практике методов этого класса является *метод Хука-Дживса*, использующийся в нашем алгоритме.

Описанный подход позволяет существенно снизить вычислительную сложность поиска оптимума. Однако его использование, вообще говоря, требует ручного распределения переменных по уровням, что, как уже отмечалось ранее, в практических задачах редко осуществимо. Потому возникла необходимость разработки схемы распределения параметров по уровням.

3. Разделение параметров задачи

Для разделения параметров задачи на локальные и глобальные предлагается следующая последовательность действий:

Этап 1. Зафиксировать опорную точку $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_N)$ для целевой функции $\varphi(y)$ одним из следующих способов:

- точка фиксируется исходя из физического смысла решаемой прикладной задачи;
- в качестве фиксированной точки используется решение, найденное локальным методом за K итераций;
- в качестве фиксированной точки используется решение, найденное глобальным методом за K итераций.

Этап 2. Для всех компонент (переменных) y_i , $1 \leq i \leq N$ провести исследование на локальность:

1. Вычислить $P + 1$ значение целевой функции $\varphi(y)$ в точках

$$z_i^j = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{i-1}, y_i^j, \bar{y}_{i+1}, \dots, \bar{y}_N),$$

где $y_i^j = a_i + jh$, $h = (b_i - a_i)/P$, $0 \leq j \leq P$.

2. Сформировать множество Q , представляющее собой набор из $P + 1$ пары вида

$$\{y_i^j, \varphi(z_i^j)\}.$$

3. Построить регрессионную модель заданной степени deg на основе данных из Q .
4. Вычислить оценку R^2 и провести классификацию i -й переменной:

- если R^2 больше заданного порога T , то добавить переменную к множеству локальных переменных,
- иначе добавить переменную к множеству глобальных переменных.

Значения K , deg и T являются параметрами метода и устанавливаются исследователем в соответствии со свойствами решаемой задачей. В реализованном методе $deg = 1$ или $deg = 2$, что позволяет строить модель линейной (рис. 1) или квадратичной (рис. 2) регрессии соответственно.

В основе проводимой регрессии лежит *метод наименьших квадратов* (МНК). Оценка качества построенной модели производится с помощью скорректированного коэффициента детерминации R_a^2 , характеризующего схожесть построенной модели регрессии с целевой функцией в зафиксированном сечении.

Этап 3. Если локальные переменные были обнаружены, то продолжить решение задачи с использованием описанной ранее многошаговой схемы. В противном случае запустить алгоритм глобального поиска, считая все переменные глобальными.

4. Численные эксперименты

Предложенный подход показал свою работоспособность при решении нескольких серий тестовых задач, представляющих собой линейные комбинации подзадач с глобальными параметрами и подзадач с локальными параметрами – комбинации близких к линейным одномерных функций или функций с разным вкладом квадратичной составляющей.

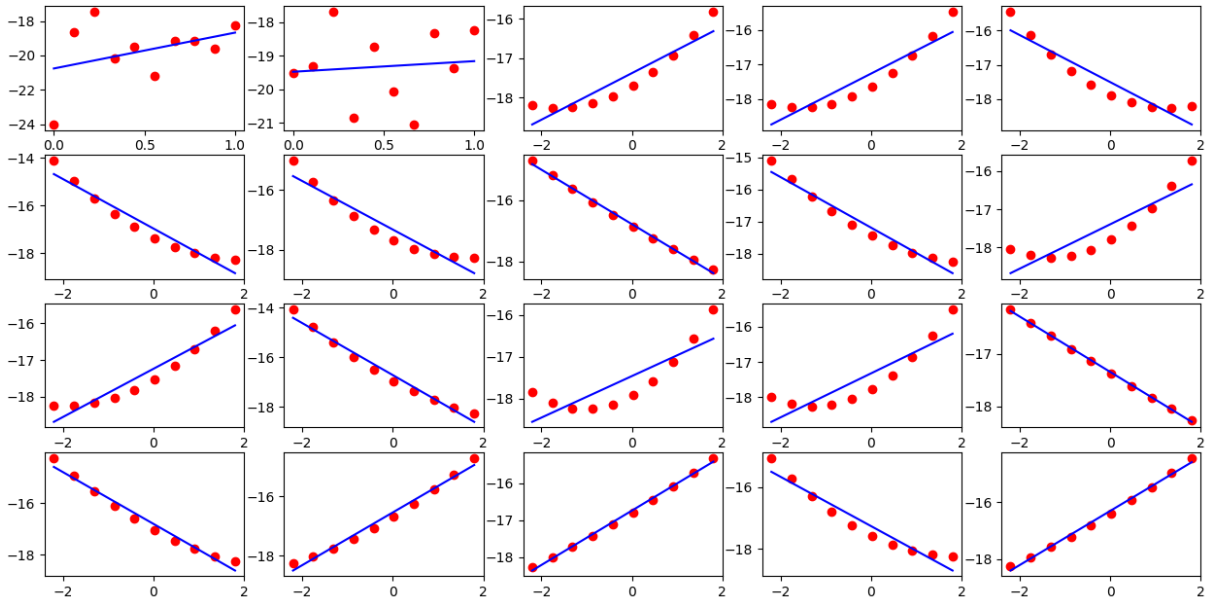


Рис. 1. Линейные регрессионные модели 20-мерной тестовой задачи (2 глобальных параметра).

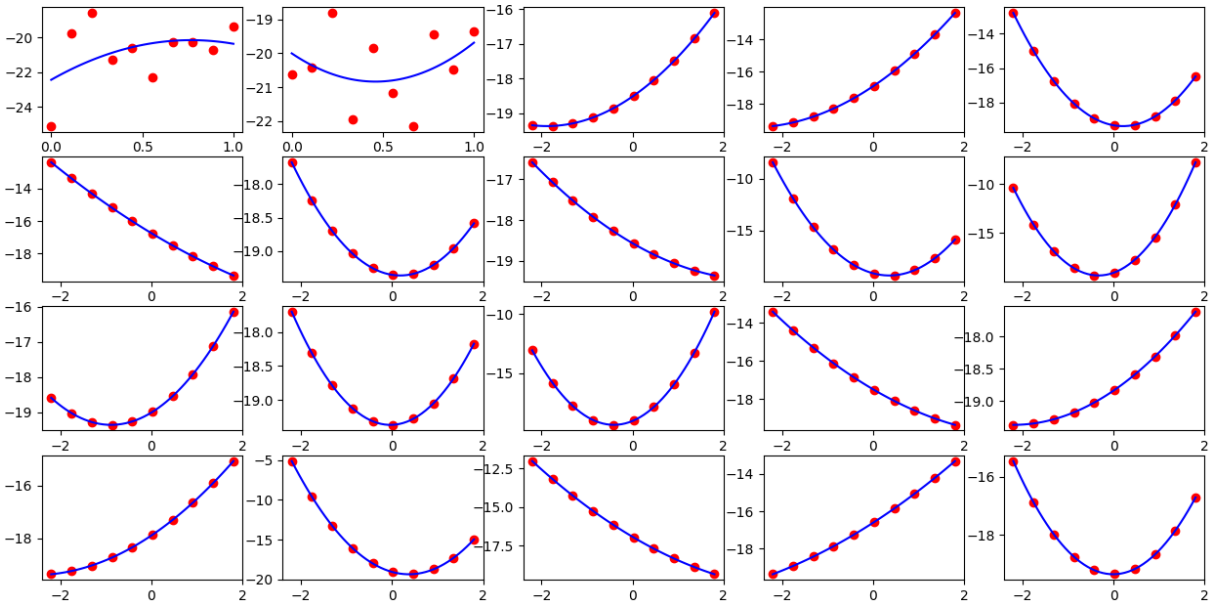


Рис. 2. Квадратичные регрессионные модели 20-мерной тестовой задачи (2 глобальных параметра).

4.1. Описание серий задач

В первом наборе тестовых задач (будем обозначать его GRIS-L) использовалось 20-мерные задачи комбинированного типа: локальная подзадача размерности 18, глобальная подзадача размерности 2. В качестве локальной составляющей использовались подзадачи, представляющие собой комбинацию близких к линейным одномерных функций:

$$\varphi_j^{loc}(y) = \sum_{i=1}^{18} (M_{ij}y_i + L_{ij}y_i^2), \quad (4)$$

где $-2.2 \leq y_i \leq 1.8$, а параметры $0.5 \leq |M_{ij}| \leq 1$ и $0.01 \leq L_{ij} \leq 0.3$ распределены случайно равномерно в соответствующих интервалах. В качестве глобальной составляющей задачи $\varphi_j^{glob}(y)$ использовались многоэкстремальные функции (рис. 3), предложенные Гришагиным [6]. Целевая функция $\varphi(y)$ во всех наборах представляла

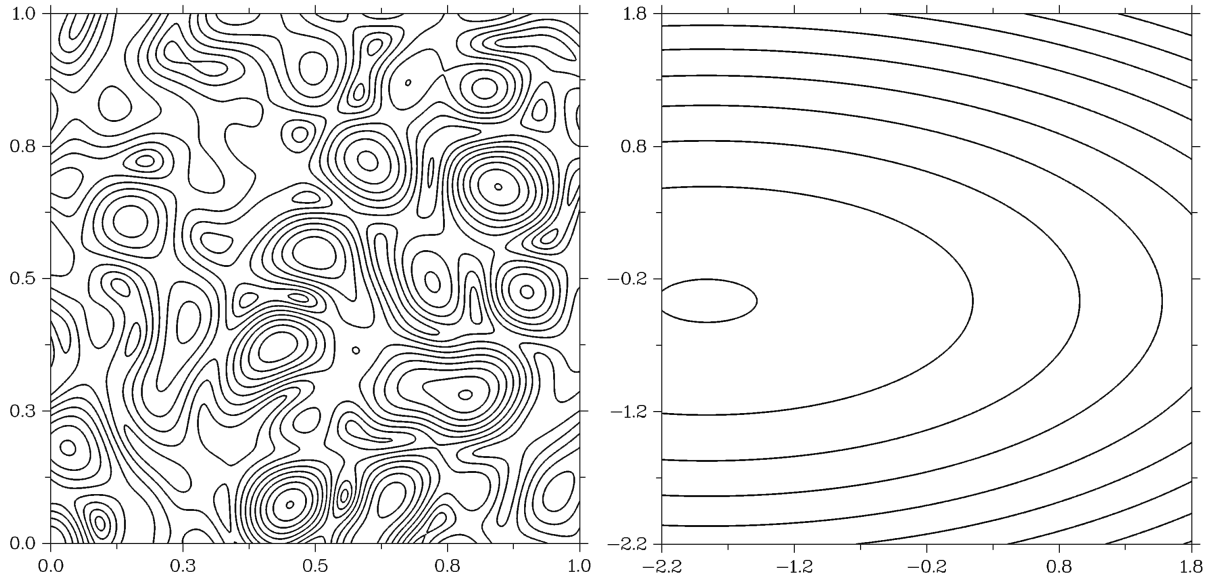


Рис. 3. Линии уровня многоэкстремальной подзадачи и двумерное сечение локальной подзадачи.

собой линейную комбинацию подзадач, т. е. $\varphi_j(y) = \alpha\varphi_j^{glob}(y) + \beta\varphi_j^{loc}(y)$. Последовательность параметров в каждой задаче задавалась случайным образом.

Во втором наборе задач (далее GRIS-LQ) параметры M_{ij} и L_{ij} локальной подзадачи (4) были устроены таким образом, чтобы в 60% случаев переменная имела несущественную квадратичную часть, в 30% вклад квадратичной составляющей был существенным (как минимум, соизмеримым со вкладом линейной составляющей), а оставшиеся 10% переменных были чисто линейными.

В третьей серии экспериментов (далее GKLS-L) в качестве многоэкстремальной части использовались 4-мерные функции из класса GKLS (функции Сергеева) [5] в качестве локальной составляющей использовалась локальные подзадачи серии GRIS-L.

4.2. Результаты экспериментов на сериях тестовых задач

По результатам экспериментов при решении серий задач с существенной многоэкстремальностью (GRIS-L и GRIS-LQ) было проведено корректное разделение на глобальные и локальные переменные, а затем задачи были успешно решены при помощи многошаговой схемы за приемлемое время и количество итераций.

Задачи с функциями GKLS для алгоритма являются более сложными в силу схожести части параметров функций с параболоидами, поэтому решить все задачи серии за ограниченное количество итераций метода не удалось.

Вычисления проводились на компьютере с CPU Intel Core™ i7 10750H, 2.6 GHz. Исследуемый алгоритм был реализован на C++; вычисление значений целевой функции было реализовано в Python 3.9. Для построения и анализа регрессионной модели использовался пакет scikit-learn из Python.

Численные результаты серий экспериментов приведены в Таблице 1. В ней пред-

ставлены данные о числе решенных задач S , среднем числе итераций глобального поиска на верхнем уровне рекурсии G_{av} , среднем числе испытаний на нижнем уровне L_{av} , среднем времени решения задачи t_{av} (в секундах).

Таблица 1. Результаты решения серий тестовых задач

	S	G_{av}	L_{av}	t_{av}
GRIS-L	20/20	705	378 545	1.3
GRIS-LQ	20/20	705	420 397	1.4
GKLS-L	18/20	9531	3 899 417	16.4

4.3. Решение прикладной задачи

В настоящее время наблюдается тенденция к улучшению экологических характеристик автомобильного топлива при сохранении высокого октанового числа. Алкилирование изобутана смешанными олефинами, катализируемое серной кислотой, позволяет получить высокооктановый компонент бензина с минимальным содержанием ароматических углеводородов. Для оптимизации описанного химического процесса в промышленности необходимо сначала разработать его модель, что в данном случае означает построение математической модели химического процесса, а затем его кинетической модели, т. е. численно рассчитать кинетические константы реакции.

Подробные описания моделей представлены в работе [7].

Аналитически узнать кинетические константы реакций, как правило, невозможно. В этом случае критерии качества найденного решения (целевая функция) не имеют явного аналитического описания, но допускают алгоритмическое представление и требуют значительных вычислительных ресурсов. Ранее использование параллельного асинхронного алгоритма, работающего на 8 узлах кластера, позволило значительно сократить время поиска оптимума. Для проведения указанного численного эксперимента использовался суперкомпьютер «Лобачевский» (операционная система – CentOS 7.2, на узле – два процессора Intel Sandy Bridge E5-2660 2.2 GHz, оперативная память – 64 Gb). Найденные оптимальные параметры 15-мерной модели позволили адекватно смоделировать описанный процесс (рис. 4). При параметре метода $r = 3$ было найдено лучшее значение целевой функции, равное 0.519793. Однако при использовании данного метода решения достигнуть заданной точности за обозримое время не представляется возможным (используется остановка по числу итераций или по ограничению времени решения).

С помощью исследуемого в данной работе метода за 15 часов было найдено улучшенное решение данной задачи – 0.497063. Размерность глобальной подзадачи – 4, число запусков глобального поиска – 427, число запусков локального метода – 427000.

5. Заключение

В данной работе исследовался подход к разделению параметров по уровням для использования известной многоуровневой схемы редукции размерности в задачах глобальной оптимизации, комбинирующей использование кривых Пеано и много-

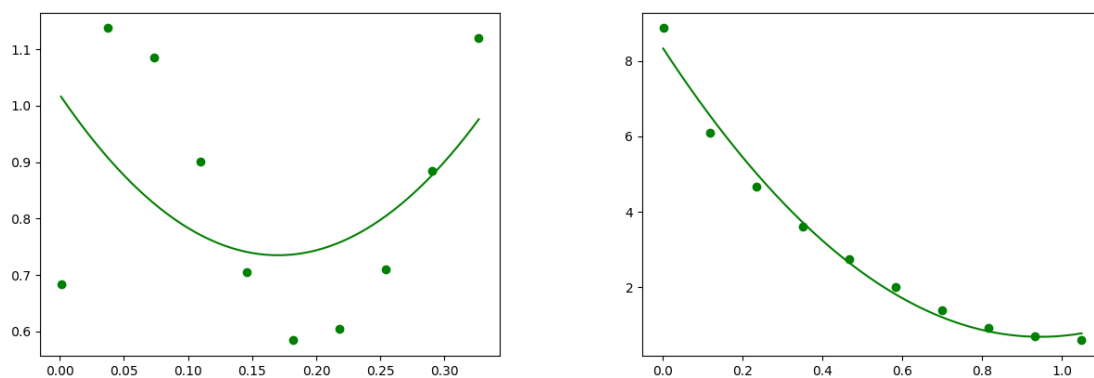


Рис. 4. Квадратичные регрессионные модели 15-мерной прикладной задачи глобального параметра (слева) и для локального параметра (справа).

шаговую схему. Для решения редуцированных глобальных подзадач использовался алгоритм глобального поиска, для локальных подзадач был выбран метод Хука-Дживса. Предложена схема разделения параметров с использованием построения регрессионной модели с помощью МНК. Проведены вычислительные эксперименты на серии тестовых задач большой размерности. Получено улучшенное решение прикладной задачи. Результаты экспериментов показывают, что предложенная схема позволяет корректно распределять параметры и эффективно находить оптимум задачи.

Литература

1. Евтушенко Ю.Г., Малкова В.У., Станевичюс А.-И. А. Параллельный поиск глобального экстремума функций многих переменных // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49, № 2. С. 255–269.
2. Paulavičius R., Žilinskas J. Advantages of Simplicial Partitioning for Lipschitz Optimization Problems with Linear Constraints // Optim. Lett. 2016. V. 10, No. 2. P. 237–246.
3. Городецкий С.Ю., Гришагин В.А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. 489 с.
4. Стронгин Р.Г., Гергель В.П., Гришагин В.А., Баркалов К.А. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации. М.: Изд-во МГУ, 2013. 280 с.
5. Sergeyev Y.D., Strongin R.G., Lera D. Introduction to global optimization exploiting space-filling curves // Journal of Global Optimization, Springer. 2013. V. 60, No. 3. P. 595–596.
6. Sergeyev Y., Grishagin V. Parallel Asynchronous Global Search and the Nested Optimization Scheme // J. Comput. Anal. Appl. 2001. V. 3, No. 2. P. 123–145.
7. Gubaydullin I., Enikeeva L., Barkalov K., Lebedev I., Silenko D. Kinetic Modeling of Isobutane Alkylation with Mixed C4 Olefins and Sulfuric Acid as a Catalyst Using the Asynchronous Global Optimization Algorithm // Communications in Computer and Information Science. 2022. V. 1618. P. 293–306.

MSC 90C26

Separation of parameters using machine learning methods in global optimization problems

K. A. Barkalov, M. A. Usova

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
Nizhny Novgorod, Russia

Abstract: The paper presents the findings from research into an approach to solving global optimization problems with a different nature of dependence on diverse groups of parameters. A scheme for choosing the problem parameters, which have a local effect on the objective function is proposed, which allows to solve essentially multidimensional problems using the nested optimization scheme. At the same time, different optimization algorithms are used at differing levels of recursion (nesting levels). The proposed approach has demonstrated its efficiency in solving several series of test problems. The effectiveness of the proposed approach was studied.

Keywords: global optimization, local optimization, nested optimization scheme, high-dimensional problems, parameter separation

References

1. Yu.G. Evtushenko, V.U. Malkova, A.A. Stanevichyus, Parallel global optimization of functions of several variables, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2009, V. 49, No. 2, P. 255–269.
2. R. Paulavičius, J. Žilinskas, Advantages of Simplicial Partitioning for Lipschitz Optimization Problems with Linear Constraints, *Optim. Lett.*, 2016, V. 10, No. 2, P. 237–246.
3. S.Yu. Gorodetskii, V.A. Grishagin, Nonlinear Programming and Optimization Multiextremal, Nizhny Novgorod, UNN Publ, 2007, 489 p.
4. R.G. Strongin, V.P. Gergel, V.A. Grishagin, K.A. Barkalov, Parallel Computations in the Global Optimization Problems, Moscow, MSU Publ, 2012, 280 p.
5. Y.D. Sergeyev, R.G. Strongin, D. Lera, Introduction to global optimization exploiting space-filling curves, *Journal of Global Optimization*, Springer, 2013, V. 60, No. 3, P. 595–596.
6. Y. Sergeyev, V. Grishagin, Parallel Asynchronous Global Search and the Nested Optimization Scheme, *J. Comput. Anal. Appl.*, 2001, V. 3, No. 2, P. 123–145.
7. I. Gubaydullin, L. Enikeeva, K. Barkalov, I. Lebedev, D. Silenko, Kinetic Modeling of Isobutane Alkylation with Mixed C4 Olefins and Sulfuric Acid as a Catalyst Using the Asynchronous Global Optimization Algorithm, *Communications in Computer and Information Science*, 2022, V. 1618, P. 293–306.

УДК 519.62

Модель распространения пандемии с двумя устойчивыми состояниями

Бугров В. О.¹, Рассадин А. Э.²

Приволжская оперативная таможня¹, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»²

Аннотация: В статье представлены результаты исследования распределённой модели распространения гипотетического инфекционного заболевания, динамика инфицирования которым определяется обобщением закона Гомперца. Это исследование было проведено для различных зависимостей скорости распространения заболевания от времени. Также в работе получены автомодельные решения для случая постоянной скорости распространения заболевания.

Ключевые слова: метод характеристик, лагранжева координата, эйлерова координата, бегущая волна, одnogорбое распределение, двугорбое распределение.

1. Введение

Появление таких пандемий, как COVID-19 и оспа обезьян, является большой угрозой для прогрессивного человечества, поэтому в настоящее время во всём мире самое пристальное внимание уделяется развитию математической теории эпидемий [1–3]. В частности, вопросом первостепенной важности является оценка эффективности карантинных мер для защиты населения разных стран от проникновения пандемий через границы государств.

Для того, чтобы прояснить особенности этого явления, будем рассматривать следующую модель пространственно-временной эволюции некоторого гипотетического заболевания:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(t) \frac{\partial u}{\partial x} = f(u), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $c(t)$ – зависящая от времени скорость распространения заболевания, $u(x, t)$ – это безразмерная линейная плотность заражённых этой болезнью людей, $u_0(x)$ – их начальная плотность, а функция $f(u) = u \ln u (1 - \ln^2 u)$ определяет динамику инфицирования.

Эта функция является модификацией известного закона Гомперца [4]. Поскольку согласно эпидемиологическому смыслу её аргумент – функция $u(x, t)$ – всегда должна быть неотрицательна: $u(x, t) \geq 0$, то функцию $f(u)$ необходимо доопределить следующим образом: $f(0) = 0$. Это доопределение даёт нам возможность корректно рассматривать эволюцию интервалов на оси x , на которых в начальный момент времени заражённых нет.

График функции $f(u)$ приведён на рис. 1. Из рис. 1 видно, что уравнение (1) кроме однородного решения $u = 0$ имеет ещё три однородных решения: $u = e^{-1}$, $u = 1$ и $u = e$. Это в два раза больше, чем в модели Гомперца [4], т. е. рассматриваемая нами модель сложнее. Безусловно, модели заболеваний вида (1) гораздо проще, чем мультиагентные модели [5], однако, как показала практика, простые модели заболеваний обладают по крайней мере не меньшей прогностической силой, чем сложные [6].

Если в уравнении (1) положить $c(t) \equiv 0$, то получим обыкновенное дифференциальное уравнение. Тогда из графика его правой части на рис. 1 можно предположить, что однородные решения системы $u = e^{-1}$ и $u = e$ – устойчивы, а $u = 0$ и $u = 1$ – неустойчивы.

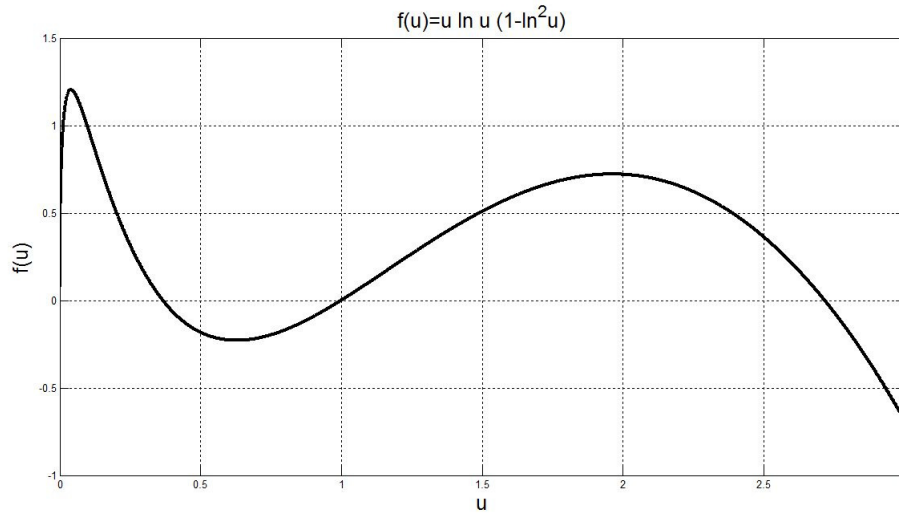


Рис. 1. График зависимости скорости инфицирования от числа заражённых

Статья имеет следующую структуру: в разделе 2 с помощью метода характеристик [7] найдено общее решение задачи Коши (1) для произвольных функций $c(t)$ и $u_0(x)$. В разделе 3 графики этих решений построены для конкретных функций $c(t)$ и $u_0(x)$, отвечающих различным эпидемиологическим ситуациям. Автомодельные решения уравнения (1) при постоянной по времени скорости распространения заболевания обсуждены в разделе 4. В заключении суммированы полученные результаты и обсуждены перспективы дальнейших исследований.

2. Точное решение задачи Коши для уравнения распространения пандемии

Введём новую неизвестную функцию $v(x, t) = \ln u(x, t)$, тогда можно переписать задачу Коши (1) следующим образом:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c(t) \frac{\partial v}{\partial x} = v(1 - v^2), \quad v(x, 0) \equiv v_0(x) = \ln u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Задача Коши (2) может быть решена точно с помощью метода характеристик [7], а именно, уравнения характеристик имеют вид:

$$\frac{dx}{dt} = c(t), \quad x|_{t=0} = y, \quad (3)$$

и

$$\frac{dv}{dt} = v(1 - v^2), \quad v|_{t=0} = v_0(y), \quad (4)$$

где y – это лагранжева координата.

Очевидно, что задача Коши (3) для эйлеровой координаты x имеет следующее точное решение:

$$x = y + \xi(t), \quad (5)$$

где

$$\xi(t) = \int_0^t c(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Точное решение задачи Коши (4) легко находится методом разделения переменных:

$$v = \frac{v_0(y)}{\sqrt{v_0^2(y) + [1 - v_0^2(y)] \exp(-2t)}}. \quad (7)$$

В результате комбинирования выражений (5) и (7) получается точное решение вспомогательной задачи Коши (2) в эйлеровой координате в виде:

$$v(x, t) = \frac{v_0(x - \xi(t))}{\sqrt{v_0^2(x - \xi(t)) + [1 - v_0^2(x - \xi(t))] \exp(-2t)}}. \quad (8)$$

Возвращаясь от вспомогательной функции (8) к первоначальной неизвестной функции $u(x, t)$, выпишем точное решение исходной задачи Коши (1):

$$u(x, t) = \exp \left[\frac{\ln u_0(x - \xi(t))}{\sqrt{\ln^2 u_0(x - \xi(t)) + [1 - \ln^2 u_0(x - \xi(t))] \exp(-2t)}} \right]. \quad (9)$$

Из формулы (9) видно, что на больших временах плотность инфицированных стремится к некоторой универсальной функции:

$$u(x, t) \approx \exp(\text{sign}(\ln [u_0(x - \xi(t))])), \quad (10)$$

где $\text{sign}(\zeta)$ – функция знака числа ζ .

Далее ограничимся рассмотрением спадающих на бесконечности начальных распределений инфицированных, т. е. будем предполагать, что $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_0(x) = 0$. Такие распределения обладают наиболее прозрачным эпидемиологическим смыслом.

В этом случае, если начальная плотность инфицированных на всей оси x удовлетворяет неравенству $0 < u_0(x) < 1$, то согласно формуле (10) происходит гомогенизация решения, то есть выход плотности инфицированных на однородное решение $u = e^{-1}$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = e^{-1}$.

Если же на оси x есть участки, на которых $u_0(x) > 1$, то из формулы (10) следует, что при $t \rightarrow +\infty$ функция $u(x, t)$ трансформируется в «скелетное» решение $u_s(x, t)$, которое определяется не только структурой начального распределения, но и видом функции (6).

3. Динамика выхода на «скелетные» решения

Для иллюстрации теоретических результатов, полученных в предыдущем разделе, будем использовать скорости распространения заболевания и соответствующие им функции (6), приведённые в таблице 1.

Эти функции изображают следующие типичные режимы распространения заболевания: равномерное распространение (N 1), периодическое распространение (N 2), останавливающееся распространение (N 3) и ускоряющееся распространение (N 4).

Таблица 1. Функции $c(t)$ и $\xi(t)$

N	1	2	3	4
$c(t)$	1, 5	$2, 4 \cos(1, 2t)$	$6(1 + 9t^2)^{-1}$	t
$\xi(t)$	$1, 5t$	$2 \sin(1, 2t)$	$2 \arctan(3t)$	$0, 5t^2$

Кроме того, мы будем рассматривать две различных начальных плотности заражённых – одnogорбую:

$$u_0(x) = 1, 5 \exp(-0, 5 x^2) \quad (11)$$

и двугорбую:

$$u_0(x) = \exp(6 x^2 - 3 x^4 - 1, 2). \quad (12)$$

Графики функций (11) и (12) представлены на рис. 2. Горизонтальные линии на рис. 2 представляют собой однородные решения: $u = 0, e^{-1}, 1, e$.

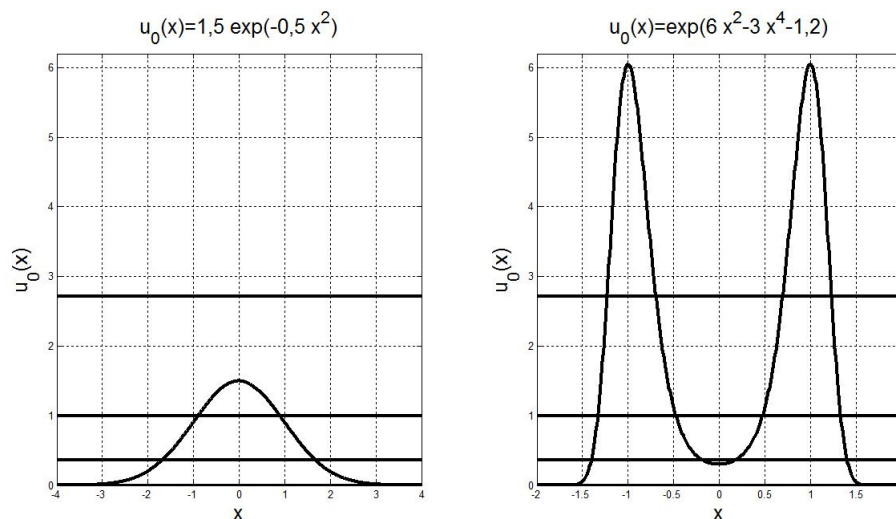


Рис. 2. График начальных распределений инфицированных: одnogорбое (слева) и двугорбое (справа)

Из рис. 2 видно, что и функция (11), и функция (12) имеют на оси x участки, на которых они принимают значения, большие единицы, то есть к решениям задач Коши (1) применима формула (10) для «скелетных» решений.

Графики выхода решений задач Коши (1) с начальным условием (11) и функциями $c(t)$ из таблицы 1 по формуле (9) на «скелетные» решения (10) приведены на рис. 3-6.

Эти графики показывают, что при $t \rightarrow +\infty$ из начального распределения (11) формируется «скелет» $u_s(x, t)$ по правилу: если $x \in \mathbb{R}$ таково, что $u_0(x) > 1$, то $u_s(x, t) = e$, если же $x \in \mathbb{R}$ таково, что $0 < u_0(x) < 1$, то $u_s(x, t) = e^{-1}$.

Временная эволюция границы «скелета» на полуплоскости (x, t) определяются уравнением:

$$x = x_s + \xi(t), \quad (13)$$

где x_s – это решение уравнения $u_0(x_s) = 1$, а функции $\xi(t)$ берутся из таблицы 1.

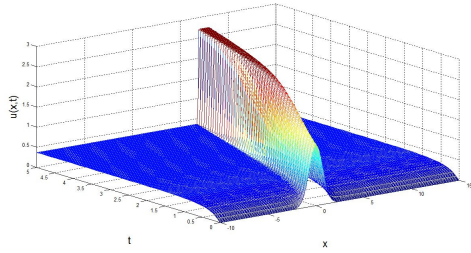


Рис. 3. Волна пандемии для одногорбого начального распределения инфицированных и $c(t) = 1, 5$

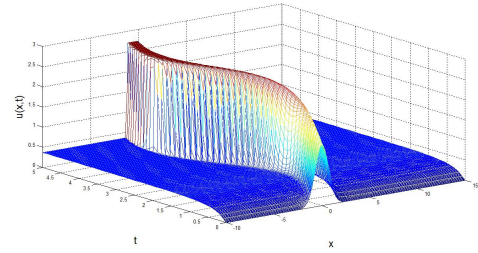


Рис. 4. Волна пандемии для одногорбого начального распределения инфицированных и $c(t) = 2, 4 \cos(1, 2t)$

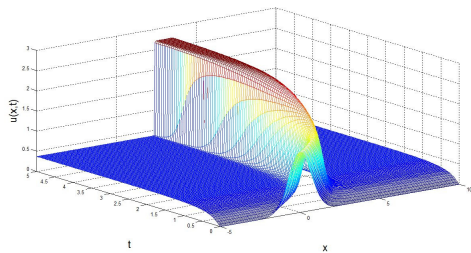


Рис. 5. Волна пандемии для одногорбого начального распределения инфицированных и $c(t) = 6(1 + 9t^2)^{-1}$

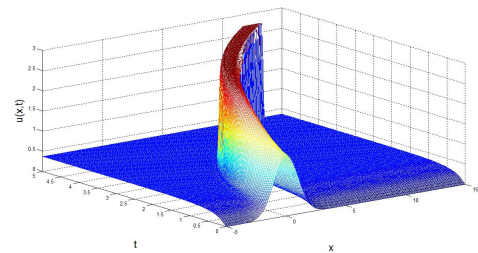


Рис. 6. Волна пандемии для одногорбого начального распределения инфицированных и $c(t) = t$

Сравнивая формулу (13) с формулой (5), легко видеть, что x_s является лагранжевой координатой «кости скелета».

Графики выхода решений задач Коши (1) с начальным условием (12) и функциями $c(t)$ из таблицы 1 по формуле (9) на «скелетные» решения (10) приведены на рис. 7-10.

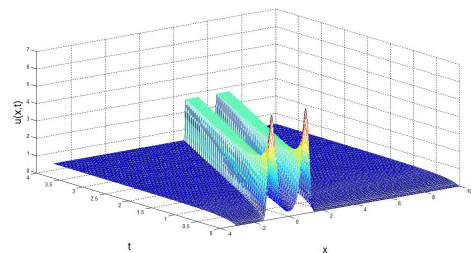


Рис. 7. Волна пандемии для двугорбого начального распределения инфицированных и $c(t) = 1, 5$

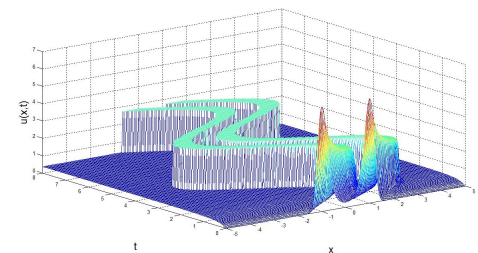


Рис. 8. Волна пандемии для двугорбого начального распределения инфицированных и $c(t) = 2, 4 \cos(1, 2t)$

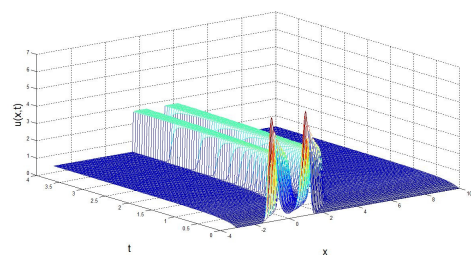


Рис. 9. Волна пандемии для двугорбого начального распределения инфицированных и $c(t) = 6(1 + 9t^2)^{-1}$

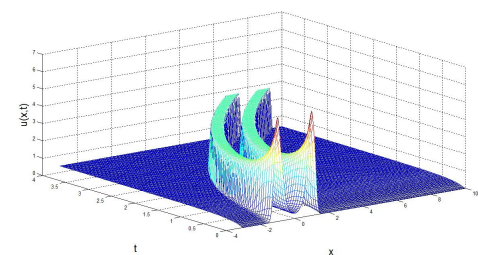


Рис. 10. Волна пандемии для двугорбого начального распределения инфицированных и $c(t) = t$

Из этих графиков видно, что в этом случае алгоритм формирования «скелетного» решения $u_s(x, t)$ тот же самый, только в силу двугорбости начального распределения инфицированных (12) структура «скелета» сложнее – по сравнению с предыдущим случаем в нём больше «костей» (см. рис. 2).

4. Бегущие волны пандемии

Пусть скорость распространения заболевания не зависит от времени и равна некоторой константе $c_0 \in \mathbb{R}$, тогда уравнение (1) сведётся к:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} = u \ln u (1 - \ln^2 u). \quad (14)$$

Далее, если отказаться от требования убывания до нуля начального распределения заражённых $u_0(x)$ на пространственной бесконечности, то уравнение (14) имеет точные решения, отличные от описанных ранее «скелетных» и гомогенизирующихся решений, а именно, будем искать решение уравнения (14) в виде бегущей волны: $u(x, t) = U(\eta)$, где $\eta = x - Vt$, и скорость волны $V \in \mathbb{R}$, тогда для функции $U(\eta)$ получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$(c_0 - V) \frac{dU}{d\eta} = U \ln U (1 - \ln^2 U). \quad (15)$$

Точное решение уравнения (15) задаётся параметром $U_0 = U(0)$ и имеет вид:

$$U(\eta) = \exp \left[\frac{\ln U_0}{\sqrt{\ln^2 U_0 + [1 - \ln^2 U_0] \exp \left(-\frac{2\eta}{c_0 - V} \right)}} \right]. \quad (16)$$

Графики функций (16) приведены на рис. 11. Пунктиром на этом рисунке обозначены однородные решения $u = 0, e^{-1}, 1, e$ уравнения (14).

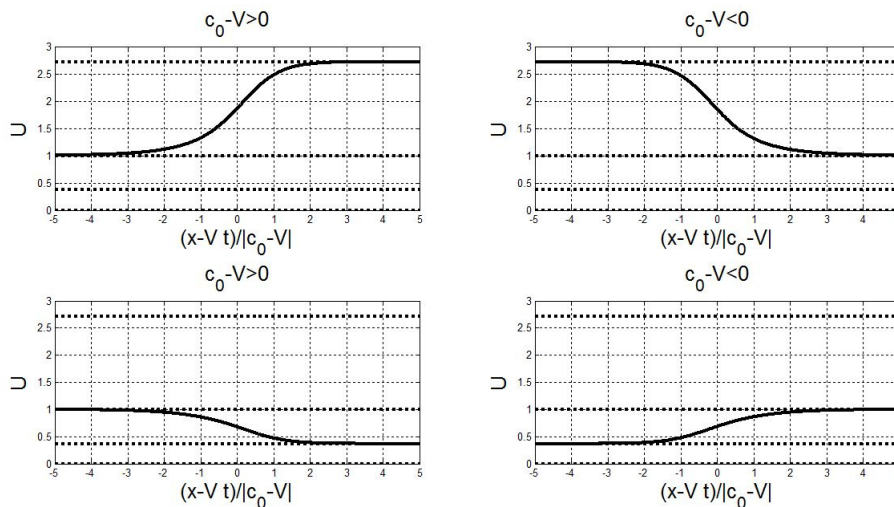


Рис. 11. Профили бегущих волн пандемии

По эпидемиологическому смыслу функция (16) должна быть ограничена на всей оси x , значит, это требование даёт следующие условия на допустимые значения параметра U_0 : $e^{-1} < U_0 < 1$ (нижние графики на рис. 11) и $1 < U_0 < e$ (верхние графики на рис. 11). Другим важным параметром, классифицирующим функции (16) при фиксированном значении параметра U_0 , является относительная скорость $c_0 - V$ распространения пандемии в системе отсчёта, движущейся со скоростью V , а именно, случаю $c_0 - V > 0$ соответствуют левые графики на рис. 11, а случаю $c_0 - V < 0$ – правые графики на нём. Таким образом, уравнение (14) допускает четыре различных типа бегущих волн (рис. 11).

5. Заключение

В данной работе методом характеристик получено общее решение задачи Коши (1) для плотности инфицированных гипотетической пандемией. На основании анализа этого общего решения для спадающих до нуля на пространственной бесконечности начальных распределений заражённых выявлено два типа формирования асимптотического профиля инфицированных на больших временах – гомогенный профиль и «скелетный» профиль. В частности, выведена формула (10), с помощью которой удобно анализировать прохождение «скелетных» профилей заболевания через границы государств. Наконец, для уравнения (14) найдены четыре различных типа автомодельных решений в виде бегущих волн.

Перспективами развития данной работы являются исследование устойчивости полученных бегущих волн относительно малых возмущений, проведение полной качественной классификации поведения решений задачи Коши (1) на больших временах без предположения об обращении начального распределения инфицированных в нуль на пространственной бесконечности, а также распространение полученных результатов на пространственно-двумерный случай.

Литература

1. Мамедова Т.Ф., Титков М.Д. Математическая модель распространения инфекционных заболеваний [Электронный ресурс] // Огарёв-online. 2020. № 13. Режим доступа: <http://journal.mrsu.ru/arts/matematicheskaya-model-rasprostraneniya-infekcionnyx-zabolevanij>
2. Кокоулина М.В., Епифанова А.С., Пелиновский Е.Н., Куркина О.Е., Куркин А.А. Анализ динамики распространения коронавируса с помощью обобщённой логистической модели // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2020. № 3. С. 28-41.
3. Рассадин А. Э. Об оценках решений эволюционных уравнений моделей распространения пандемии COVID-19 // В сборнике: Актуальные проблемы математики и информационных технологий. Материалы II Всероссийской конференции, приуроченной к 90-летию Дагестанского государственного университета. 2021. С. 138-141.
4. Gompertz B. On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1825. 115. P. 513-585.

5. Криворотко О.И., Андорная Д.В., Кабанихин С.И. Анализ чувствительности и практическая идентифицируемость математических моделей биологии // Сибирский журнал индустриальной математики. 2020. Т. 23. № 1. С. 107-125.
6. Carletti T., Fanelli D., Piazza F. COVID-19: The unreasonable effectiveness of simple models // Chaos, Solitons and Fractals. 2020. 140. P. 110241-1-13.
7. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М., Наука, 1986. 272 с.

MSC 35F25

The model of the spread of a pandemic with two stable states

V. O. Bugrov ¹, A. E. Rassadin ²

Volga Operational Customs ¹, Higher School of Economics ²

Abstract: The article presents the results of a study of a distributed model of the spread of a hypothetical infectious disease, the dynamics of infection of which is determined by the generalization of the Gompertz's law. This study was conducted for various time dependencies for the rate of spread of the disease. Self-similar solutions for the case of a constant rate of spread of the disease are also obtained in the work.

Keywords: method of characteristics, Lagrangian coordinate, Eulerian coordinate, traveling wave, one-hump distribution, two-hump distribution.

References

1. T.F. Mamedova, M.D. Titkov, Matematicheskaya model rasprostraneniya infektionikh zabolevanij, *Ogaryov-online*, 2020, 13.
<http://journal.mrsu.ru/arts/matematiceskaya-model-rasprostraneniya-infekcionnyx-zabolevanij>
2. M.V. Kokoulina, A.S. Epifanova, E.N. Pelinovsky, O.E. Kurkina, A.A. Kurkin, Analiz dinamiki rasprostraneniya koronavirusa s pomoshyu obobshyonnoi logisticheskoi modeli, *Trudi NGTU im. R.E. Alekseeva*, 2020, 140, P. 110241-1-13.
3. A.E. Rassadin, Ob otzenkah reshanii evolyutsionnih uravnenii modelei rasprostraneniya pandemii COVID-19, *V sbornike: Aktualnie problemi matematiki i informatsionnih tehnologii. Materiali II Vserossiiskoi konferentsii, priurochennoi k 90-letiyu Dagestanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2021, P. 138-141.
4. B. Gompertz, On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1825, 115, P. 513-585.
5. O.I. Krivorot'ko, D.V. Andornaya, S.I. Kabanikhin, Analiz chuvstvitelnosti i prakticheskaya identiftitsiruemost matematicheskikh modelei biologii, *Sibirskii zhurnal industrialnoi matematiki*, 2020, 23, 1, P. 107-125.

6. T. Carletti, D. Fanelli, F. Piazza, COVID-19: The unreasonable effectiveness of simple models, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2020, 140, P. 110241-1-13.
7. A.P. Kartashev, B.L. Rozhdestvenskii, Obiknovennye differentsialnye uravneniya i osnovy variatsionnogo ischisleniya, M., Nauka, 1986, 272 p.

УДК 517.968, 519.863

О существовании и единственности непрерывного решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования *

Булатов М. В., Ботороева М. Н.

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН

Аннотация: В докладе сформулированы условия существования единственного непрерывного решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования. Поставленная задача является системой взаимосвязанных алгебраических и интегральных уравнений Вольтерра как первого, так и второго рода, оба предела интегрирования в которых являются переменными. В таком виде может быть представлена интегральная модель развивающихся систем. Такое представление позволяет привлечь аппарат матричных пучков для ее исследования.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра, переменные пределы интегрирования, интегральная модель, развивающиеся системы, матричный пучок.

1. Постановка задачи

В работе рассматриваются интегро-алгебраические уравнения (ИАУ) с переменными пределами интегрирования вида

$$A(t)x(t) + \int_{t-c}^t K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где $A(t)$ — ненулевая квадратная матрица порядка n , удовлетворяющая условию

$$\det A(t) = 0. \quad (2)$$

Заданы $(n \times n)$ матрица $K(t,s)$, n -мерная вектор-функция $f(t)$ и положительная постоянная величина c , а $x(t)$ — искомая n -мерная вектор-функция с известными стартовыми значениями:

$$x(t) = x^0(t), \quad t \in [-c, 0]. \quad (3)$$

Предполагается, что входные данные $A(t)$, $f(t)$ определены и обладают необходимой степенью гладкости на отрезке $[0, T]$, а элементы ядра $K(t,s)$ — на заштрихованной области $\Delta = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t-c \leq s \leq t, 0 \leq t \leq T\}$ (рис. 1). Под решением поставленной задачи будем понимать непрерывную n -мерную вектор-функцию $x(t)$, которая при подстановке в уравнение (1) обращает его в верное тождество и удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow -0} x^0(t) = x(0).$$

Рассмотрим вопрос существования единственного непрерывного решения поставленной задачи.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00173, <https://rscf.ru/project/22-11-00173/>

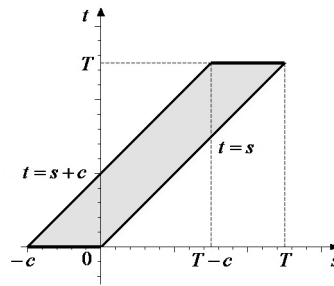


Рис. 1. Область определения ядра $K(t, s)$ уравнения (1) заштрихована

2. Условия существования единственного непрерывного решения

Приведем некоторые необходимые для дальнейшего изложения определения.

Определение 1. [3]. Пучком матриц назовем сумму $\lambda B + C$, где λ – скалярный параметр, B и C – матрицы размера $(m \times n)$.

Определение 2. [4]. Пучок квадратных матриц $\lambda B(t) + C(t)$ удовлетворяет критерию «ранг-степень» на отрезке $[0, T]$ (имеет индекс один, имеет простую структуру), если

$$\forall t \in [0, T] \text{ rank} B(t) = \deg(\det(\lambda B(t) + C(t))) = r = \text{const},$$

где λ – скалярный параметр, символ $\deg(\cdot)$ означает показатель степени многочлена $(\cdot)$, а операция $\deg(0)$ не определена.

Определение 3. [5]. Матрица размерности $(n \times m)$, обозначаемая в дальнейшем как $A^-(t)$, называется полуобратной к $(m \times n)$ -матрице $A(t)$, если для всех t из области определения она удовлетворяет уравнению

$$A(t)A^-(t)A(t) = A(t).$$

В терминах матричных пучков сформулируем условия существования единственного непрерывного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования.

Теорема 1. Задача (1), (2), (3) имеет единственное непрерывное решение, если выполнены условия:

- 1) $A(t) \in C_{[0, T]}^1, f(t) \in C_{[0, T]}^1, K(t, s) \in C_{\Delta}^1, \Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t - c \leq s \leq t, 0 \leq t \leq T\}$;
- 2) пучок $\lambda A(t) + K(t, t)$ удовлетворяет критерию «ранг-степень» на отрезке $[0, T]$;
- 3) $W(0)f'(0) = W(0)[K(0, 0)x^0(-0) - K(0, -c)x^0(-c) + A'(0)x^0(-0)] + W(0) \int_{-c}^0 K'_t(0, s)x^0(s)ds$,
где $W(0) = E - A(0)A^-(0)$;
- 4) $A(0)x^0(-0) = f(0) - \int_{-c}^0 K(0, s)x^0(s)ds$.

Продemonстрируем возможность практического применения представленной теоремы на примере исследования модели развивающихся систем.

3. Модель развивающихся систем

Рассмотрим базовую двухсекторную модель развивающейся системы (РС) В. М. Глушкова [1,2]. Она описывает систему, состоящую из двух подсистем: $\mathcal{A}$ — подсистема самосовершенствования и $\mathcal{B}$ — подсистема создания внешнего продукта. Новые продукты создаются внутри системы, не поступая извне. Введем следующие количественные характеристики:

$m(t)$ — общее количество новых элементов, создаваемых в единицу времени в момент t ;

$\alpha(t, s)$ — количество новых элементов, производимых в единицу времени в момент t одним элементом, созданным в момент s и функционирующим в $\mathcal{A}$;

$y(t)$ — относительная доля созданных в момент t элементов, остающаяся в подсистеме $\mathcal{A}$;

$a_1(t), a_2(t)$ — временные границы сворачивания устаревших элементов в подсистемах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно;

$\beta(t, s)$ — выпуск внешнего продукта в единицу времени в момента t одним элементом, созданным в момент s и функционирующим в $\mathcal{B}$;

$p(t)$ — объем производства внешнего продукта в единицу времени в момент t (желаемый объем потребления);

$n(t)$ — количество элементов, функционирующих в моделируемой системе в момент t .

Будем считать, что созданные ранее момента $a_1(t)$ или $a_2(t)$ элементы в момент t не используются в системе, а созданные после используются на 100%, и временные границы $a_1(t)$ и $a_2(t)$ являются неубывающими функциями, т. е. $a'_1(t) \geq 0$, $a'_2(t) \geq 0$, $t \in [t_0, T]$. Остановимся на случае, когда $a_1(t) = a_2(t) = t - c$. Это означает, что сроки жизни элементов в подсистемах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ совпадают и известны (c — срок службы элемента) и система зародилась до момента $t_0 = 0$ начала моделирования, а значит исследователь данной РС может обладать информацией о ее работе на предыстории $[-c, 0)$.

Остановимся на примере двухсекторной модели РС [2], которая может быть записана в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_{t-c}^t \alpha(t, s) y(s) m(s) ds, \\ p(t) &= \int_{t-c}^t \beta(t, s) (1 - y(s)) m(s) ds, \\ n(t) &= \int_{t-c}^t m(s) ds, \\ 0 &\leq y(t) \leq 1, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \tag{4}$$

с начальными условиями $y(t) \equiv y^0(t)$, $m(t) = m^0(t)$, $t \in [-c, 0)$.

Модель (4) состоит из уравнения воссоздания элементов системы, обеспечивающих ее внутреннюю функцию (рост фондов), уравнения производства внешнего продукта, обеспечивающего ее внешнюю функцию, и балансового уравнения. Такая постановка задачи позволяет определить необходимую скорость ввода элементов системы (новое оборудование, ресурсы, рабочие места) в подсистемы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и общее количество функционирующих в моделируемой системе элементов в каждый момент времени $t \in [0, T]$ для достижения желаемого объема производства внешнего про-

дукта с учетом известных значений уже указанных характеристик на предыстории $t \in [-c, 0)$, производительности труда и сроков сворачивания устаревших элементов.

Исследовать вопрос существования единственного непрерывного решения поставленной задачи в трудах [1, 2] предлагается по отдельности для каждого уравнения с дальнейшим согласованием полученных условий, поскольку иного аппарата не было. Представим модель (4) в виде (1).

Введем замену переменных:

$$v(t) = y(t)m(t), \quad w(t) = (1 - y(t))m(t),$$

где $v(t), w(t)$ — количество новых элементов системы, созданных в единицу времени в момент t для функционирования в подсистемах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. При этом важно учесть, что

$$v(t) + w(t) = m(t).$$

Не изменяя задачи моделирования представим задачу (4) в виде системы линейных относительно неизвестных функций $v(t), w(t), m(t), n(t)$ интегральных уравнений как первого, так и второго рода с переменными пределами интегрирования и алгебраического уравнения, а именно

$$\begin{aligned} v(t) + w(t) &= \int_{t-c}^t \alpha(t, s)v(s)ds, \\ p(t) &= \int_{t-c}^t \beta(t, s)w(s)ds, \\ n(t) &= \int_{t-c}^t m(s)ds, \\ v(t) + w(t) &= m(t), \quad t \in [t_0, T]. \end{aligned} \tag{5}$$

На предыстории задаются значения неизвестных функций:

$$\begin{aligned} v(t) &= v^0(t), \quad w(t) = w^0(t), \quad n(t) = n^0(t), \\ m(t) &= v^0(t) + w^0(t), \quad t \in [-c, 0). \end{aligned} \tag{6}$$

Матричный вид системы (5) полностью совпадает с ИАУ (1) при

$$\begin{aligned} A(t) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ p(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ K(t, s) &= \begin{pmatrix} \alpha(t, s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta(t, s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \\ m(t) \\ n(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7}$$

Представление модели РС в виде ИАУ с переменными пределами интегрирования позволяет использовать условия теоремы 1 для исследования вопроса существования единственного прогноза распределения элементов РС по ее подсистемам для достижения заданного уровня роста производства внешнего продукта. Кроме непрерывной дифференцируемости всех входных данных и справедливости условия 4) теоремы 1 следует требовать выполнение следующих условий:

$$p'(0) = \int_{-c}^0 \beta'_t(0, s)v^0(s)ds + \beta(0, 0)v^0(-0) - \beta(0, -c)v^0(-c); \quad (8)$$

$$\beta(t, t) \neq 0. \quad (9)$$

Равенство (8) напрямую следует из условия 3) теоремы 1 и требует согласованности значений предыстории с производительностью системы в момент начала моделирования ($t = 0$). Условие (9) ограничивает ввод в эксплуатацию неисправного оборудования и при его выполнении справедлив критерий «ранг-степень» (условие 2) теоремы 1), поскольку ранг матрицы $A(t)$ равен трем и совпадает со степенью определителя пучка матриц

$$\det(\lambda A(t) + K(t, t)) = \lambda^3 \beta(t, t) - \lambda^2 \beta(t, t) \alpha(t, t).$$

Следует отметить, что все полученные условия согласуются с теоремой существования единственного непрерывного решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода с переменными пределами интегрирования [6].

Таким образом исследование ИАУ с переменными пределами интегрирования позволяет получить достаточно удобный аппарат для изучения развивающихся систем в различных областях экологии, экономики, энергетики и пр.

Литература

1. Глушков В.М. Об одном классе динамических макроэкономических моделей // Управляющие системы и машины. 1977. № 2. С. 3–6.
2. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. М.: Наука, 1983. 350 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1986. 576 с.
4. Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996. 280 с.
5. Ваарман О. Обобщенные обратные отображения. Таллин: Валгус, 1988. 120 с.
6. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999. 193 с.

MSC 45N05, 91B66

The existence and uniqueness of a continuous solution of integral algebraic equations with variable limits of integration

M. V. Bulatov, M. N. Botoroeva

Motrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of
Russian Academy of Sciences

Abstract: The report presents conditions for the existence of a unique continuous solution of integro-algebraic equations with variable limits of integration. The problem posed is a system of algebraic and Volterra integral equations of the first and the second kind, both integration limits in which are variables. Integral model of developing systems can be written in this form. This representation makes it possible to use the apparatus of matrix beams for its study.

Keywords: Volterra integral equations, variable limits of integration, integral model, developing systems, matrix beam.

References

1. V.M. Glushkov, Ob odnom klasse dinamicheskikh makroekonomicheskikh modeley, *Upravlyayushchiye sistemy i mashiny*, 1977, № 2, P. 3–6.
2. V.M. Glushkov, V.V. Ivanov, V.M. Yanenko, Modelirovaniye razvivayushchikhsya sistem, M., Nauka, 1983, 350 p.
3. F.R. Gantmakher, Teoriya matrits, M., Nauka, 1986, 576 p.
4. V.F. Chistyakov, Algebro-differentsialnyye operatory s konechnomernym yadrom, Novosibirsk, Nauka, 1996, 280 p.
5. O. Vaarman, Obobshchennyye obratnyye otobrazheniya, Tallin, Valgus, 1988, 120 p.
6. A.S. Apartsin, Neklassicheskiye uravneniya Volterra I roda: teoriya i chislennyye metody, Novosibirsk, Nauka, 1999, 193 p.

УДК 519.688:004.8

Программная реализация иммунного алгоритма, применяемого для поиска проектных решений в электронном архиве проектной документации

Буткина А. А., Гущина О. А., Кузнецова О. А., Шамаев А. В.

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева

Аннотация: В статье представлена разработка программного обеспечения, используемого для поиска проектных решений, хранящихся в электронном архиве проектной документации. Поиск осуществляется с помощью модифицированной версии иммунного алгоритма как по заданным характеристикам проектных решений, так и по характеристикам документов (текстовых и графических). Представлены диаграммы вариантов использования и классов, схема организации базы данных, стек средств и технологий разработки, результаты проверки работоспособности и эффективности разработанного программного обеспечения.

Ключевые слова: программное обеспечение, иммунный алгоритм, алгоритм клональной селекции, проектное решение, электронный архив, поиск.

На сегодняшний день большинство IT-компаний располагают хранилищами цифровых файлов, содержащими информацию о выполненных проектах и, как правило, имеющими значительный объем. Чаще всего реализация нового проекта или кейса основывается на принципах и методах, применяемых ранее в предыдущих работах. Использование готовых разработок компании позволяет сократить время выполнения нового пакета работ и избежать допущенных ранее ошибок и недочётов, обеспечив тем самым повышение качества создаваемого продукта.

В настоящее время на практике применяются разнообразные программные системы поиска необходимых сведений, содержащихся в электронных архивах проектной документации. В таких программах достаточно эффективно выполняется обнаружение искомой текстовой информации, однако зачастую не удается отыскать документы, содержащие данные, представленные в графическом формате. В IT компаниях это могут быть файлы презентаций, UML диаграммы, макеты интерфейса приложений, созданные в различных графических редакторах, и т. п. Таким образом, существует потребность в программном обеспечении, которое будет производить поиск документов любого типа, составляющих проектное решение, вне зависимости от формата хранящейся в них информации, что обуславливает актуальность данного исследования.

Целью данной работы является разработка программного обеспечения, позволяющего осуществлять поиск проектных решений, размещенных в электронном архиве проектной документации и представленных как в текстовом, так и в графическом форматах, с помощью иммунного алгоритма. Для достижения этой цели были поставлены и решены следующие задачи:

- изучение предметной области и постановка задачи исследования;
- анализ существующих аналогов разрабатываемого программного обеспечения и выявление особенностей их функционирования;
- выбор средств и технологий разработки;

- определение функциональных требований к разрабатываемому программному обеспечению;
- разработка архитектуры программного обеспечения;
- реализация и проверка работоспособности разработанного программного обеспечения.

Прежде всего, опишем постановку задачи исследования. Каждому проектному решению, хранящемуся в электронном архиве проектной документации, должна быть присвоена определённая бинарная последовательность, представляющая собой набор характеристик, соответствующих данному проектному решению. Указанная бинарная последовательность формируется следующим образом: в позицию, соответствующую определенной характеристике, записывается значение «1», если эта характеристика присуща данному проектному решению, и значение «0» – в противном случае.

Аналогично каждому файлу документа, входящего в состав каждого проектного решения, ставится в соответствие бинарная последовательность, отражающая набор характеристик данного документа и формируемая указанным выше способом.

Для реализации поиска проектного решения или документов, содержащихся в базе данных проектных решений, отвечающих заданному пользователем набору характеристик, должна быть сформирована соответствующая бинарная последовательность. Все бинарные последовательности хранящихся в архиве проектных решений и проектного решения, для которого выполняется поиск, имеют одинаковую размерность. Размерности бинарных последовательностей, отражающих характеристики искомого документа и документов, входящих в существующие проектные решения, также совпадают.

Таким образом, задачу исследования можно свести к нахождению заданной бинарной последовательности, соответствующей искомому проектному решению или документу, обладающему требуемым набором значений характеристик, в имеющейся базе бинарных последовательностей, построенных для хранящихся в базе данных проектных решений.

Эта задача относится к задачам линейного целочисленного программирования. Следует также учитывать, что целевая функция данной задачи является мульти-модальной, поскольку в процессе поиска могут быть найдены несколько проектных решений (документов), отвечающих заданному пользователю набору характеристик.

Указанная особенность целевой функции приводит к тому, что задачи оптимизации таких функций плохо поддаются решению традиционными методами (метод ветвей и границ, метод градиентного спуска и др.), поэтому возникает необходимость в использовании альтернативных методов, среди которых следует выделить иммунный алгоритм клональной селекции, обеспечивающий параллельный поиск оптимального решения. Данный алгоритм наилучшим образом подходит для решения поставленной задачи, поскольку строит своё решение на основе перебора многочисленных вариантов последовательностей и отбора лучших из них, а также предоставляет более адаптивные механизмы, чем другие иммунные алгоритмы.

В настоящее время при работе с электронным архивом проектной документации применяется целый ряд специализированных программ. Наибольший интерес для данного исследования представляют программы YuKoSoft, E-Arch и Search. Далее рассмотрим каждую из них более подробно с точки зрения осуществления поиска проектных решений по заданным характеристикам.

1) YuKoSoft – созданная российскими разработчиками программа [1], используемая для ведения архива документов. Она включает систему электронного докумен-

тооборота, электронный архив документов с возможностью регистрации документов организации путем автоматического формирования и присвоения им уникальных номеров. Также в данной программе предусмотрена возможность поиска проектов и документов, который, однако, выполняется недостаточно корректно, в частности:

- в результатах поиска не учитывается дата создания документа;
- невозможно выполнить поиск отдельных файлов, входящих в состав проектного решения;
- невозможно производить поиск документов по типу файла;
- невозможно выполнить поиск графического файла по типу содержащейся в нем информации.

2) E-Arch – это защищённое структурированное централизованное хранилище электронных документов, предназначенное для организации оперативного многопользовательского доступа к содержащейся в них информации. Данная программа разработана российской компанией Редокс [2]. Основными выявленными недостатками данной программы являются:

- официальный сайт не предоставляет доступ для скачивания и установки бесплатной лицензионной версии;
- отсутствует возможность поиска проектного решения по нескольким файлам;
- отсутствует возможность поиска графических файлов по типу содержащейся в них информации.

3) Search – разработанная группой российских программистов программа, представляющая собой систему для работы с архивом технической документации [3]. Программа предоставляет возможность поиска по некоторым параметрам проекта, есть возможность просмотра файлов, входящих в состав проекта. Однако, в результате анализа её возможностей были обнаружены следующие недостатки:

- программа не имеет бесплатной лицензионной версии, доступной для использования;
- отсутствует возможность одновременного поиска нескольких файлов, входящих в проектное решение;
- невозможно выполнить поиск графических файлов по типу документа и внутренним параметрам (например, наличие видео в презентации).

В таблице 1 представлены результаты сравнительного анализа рассмотренных аналогов и разработанного программного обеспечения FindProject.

Как было описано ранее, каждое проектное решение (и каждый отдельный документ в его составе) имеет набор характеристик, значения которых должны быть заданы при его внесении в базу данных. Будем считать каждый добавленный в электронный архив набор характеристик проектного решения (или документа) – антителом, а искомое проектное решение (или документ), обладающее набором характеристик, по которым происходит поиск, – антигеном.

Обозначим через x некую сформированную пользователем совокупность проектных решений. В работе будут рассматриваться два вида аффинностей (термодинамическая характеристика, количественно описывающая силу взаимодействия веществ [4]):

- аффинность ax_v – выражает степень схожести антитела с антителом, т. е. одного архивного проектного решения (документа) с другим архивным проектным решением (документом);
- аффинность $ay_{v,w}$ – выражает степень схожести антитела с антигеном, т. е. архивного проектного решения (документа) с искомым проектным решением (доку-

Таблица 1. Сравнение систем

	YuKoSoft	E-Arch	Search	FindProject
Поиск проектного решения по нескольким документам	–	–	–	+
Поиск графических файлов по их характеристикам	–	–	–	+
Возможность привязывать документы к проектам	–	–	+	+
Разграниченный доступ к проектам	+	+	+	+
Разграниченный доступ к документам	–	+	+	+
Наличие бесплатной версии	+	–	–	+

ментом).

Для хранения бинарных последовательностей, соответствующих проектным решениям (документам), которые не отвечают критериям поиска и не будут рассматриваться, т. е. будут удалены, используется массив c_v .

Весь массив имеющихся в архиве бинарных последовательностей, участвующий в отборе решения, отвечающего критериям поиска, отражается величиной e_v с указанием того, какие претенденты будут удалены и какие останутся.

Таким образом, иммунный алгоритм параллельного поиска, основанный на клональном алгоритме, для решаемой задачи можно представить в следующем виде [5]:

Шаг 1. *Распознавание антигена*. На данном шаге происходит формирование антигена, т. е. бинарной последовательности, составленной по заданным пользователем значениям характеристикам проектного решения (документа).

Шаг 2. *Выработка антител*. На данном шаге происходит «вспоминание» – формирование массива бинарных последовательностей, отражающих характеристики проектных решений (документов), путем их извлечения из базы данных (архива проектных решений).

Шаг 3. *Вычисление аффинностей*. На данном этапе происходит выявление набора лимфоцитов, которые индуцируют наиболее соответствующие им антитела – проектные решения (документы). Формулы для вычисления аффинностей представлены ниже:

а) аффинность пары антител (пары архивных проектных решений (документов)):

$$ay_{v,w} = \frac{\sum_{i=1}^M S_i}{\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^S p_{ij}}, \quad (1)$$

где M – количество бит в бинарной последовательности, S – количество архивных проектных решений (антител), S_i – вероятность равенства i -го бита (отдельной характеристики архивного проектного решения) текущего антигена единице; p_{ij} – ве-

роятность равенства i -го бита текущего антитела i -му биту j -го антитела;

б) аффинность антитела (архивного проектного решения (документа)) к антигену (искомому проектному решению (документу)):

$$ax_v = opt_v, \quad (2)$$

где opt_v – сила связи (соответствия, схожести) антигена (искомого проектного решения (документа)) с антителом (архивным проектным решением (документом)). Она равна количеству единиц в бинарной последовательности, полученной в результате логического умножения бинарной последовательности архивного проектного решения (документа) на бинарную последовательность искомого проектного решения (документа).

Шаг 4. *Разделение лимфоцитов.* На данном шаге происходит исключение из обработки не подходящих В-лимфоцитов. Решения, которые не будут рассматриваться, рассчитываются по формуле:

$$c_v = \frac{1}{N} \sum_{w=1}^N ac_{v,w} > T_c,$$

где

$$ac_{v,w} = \begin{cases} 1, & \text{если } ay_{v,w} \geq Tac1; \\ 0, & \text{иначе } ay_{v,w} < Tac1; \end{cases} \quad (3)$$

T_c – пороговое значение для В-лимфоцита; $Tac1$ – пороговое значение для антигена.

Шаг 5. *Размножение и подавление антител.* Ожидаемый масштаб e_v выработки антител рассчитывается по формуле:

$$e_v = \frac{ax_v \prod_{s=1}^S (1 - as_{v,s})}{c_v \sum_{i=1}^N ax_i},$$

где

$$as_{v,w} = \begin{cases} ay_{v,s}, & \text{если } ay_{v,s} \leq Tac2; \\ 0, & \text{иначе } ay_{v,s} < Tac2. \end{cases} \quad (4)$$

В популяции лимфоцитов разнообразие и концентрация антител архивных проектных решений (документов) также подчиняется отношению (4). Обширность направлений поиска определяется с учётом локальных экстремумов (4).

Шаг 6. *Размножение антител.* Для обработки бинарной последовательности искомого проектного решения (документа) происходит создание лимфоцитов, замещающих бинарные последовательности архивных проектных решений (документов) – антител. Это позволяет обеспечить разнообразие антител, достигаемое согласно теории иммунитета путем реализации процесса мутаций (скрещивания), что обеспечивает наибольшую эффективность алгоритма за счёт максимально широкого охвата вариантов решения.

Для разработки программного обеспечения были выбраны следующие средства:

– полнофункциональная и расширяемая интегрированная среда разработки Visual Studio Community;

- компилируемый, статически типизируемый язык программирования C++, поддерживающий объектно ориентированную, обобщённую и процедурную парадигмы программирования;
- интерфейс прикладного программирования Windows Forms для разработки графического интерфейса;
- платформа разработки .NET Framework взаимодействующая с операционными системами семейства Microsoft Windows и имеющая общезыковую среду исполнения;
- надёжная, качественная и бесплатно распространяемая реляционная система управления базами данных MySQL.

Приведем описание функциональных требований к разработанному программному обеспечению в виде диаграммы вариантов использования (рис. 1). Стоит отметить, что данным программным обеспечением может пользоваться только зарегистрированный пользователь. Для регистрации ему необходимо обратиться к администратору.

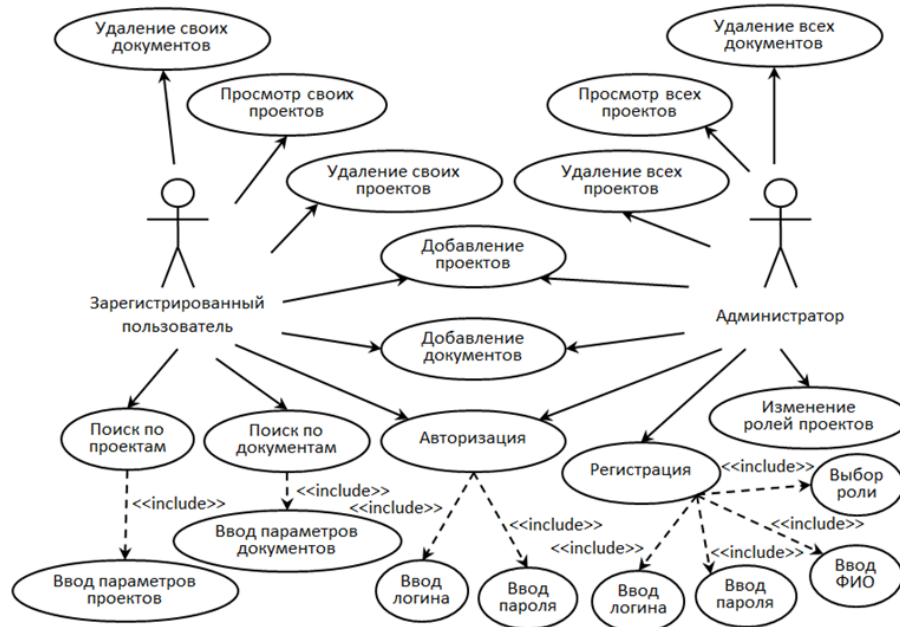


Рис. 1. Диаграмма вариантов использования

На основе сформулированных функциональных требований к программному обеспечению и применения объектно-ориентированного подхода к реализации описанного выше иммунного алгоритма была разработана логическая модель программного обеспечения, представленная в виде диаграммы классов (рис. 2).

Таким образом, структурно разработанное программное обеспечение включает три основных класса: MainForm, IaController и Antibody.

Класс MainForm обеспечивает:

- связь с пользователем (считывает заданные параметры поиска, выдаёт его конечный результат);
- подключение к имеющейся базе данных проектных решений и документов электронного архива;
- работу остальных классов и модулей разработанного программного обеспече-

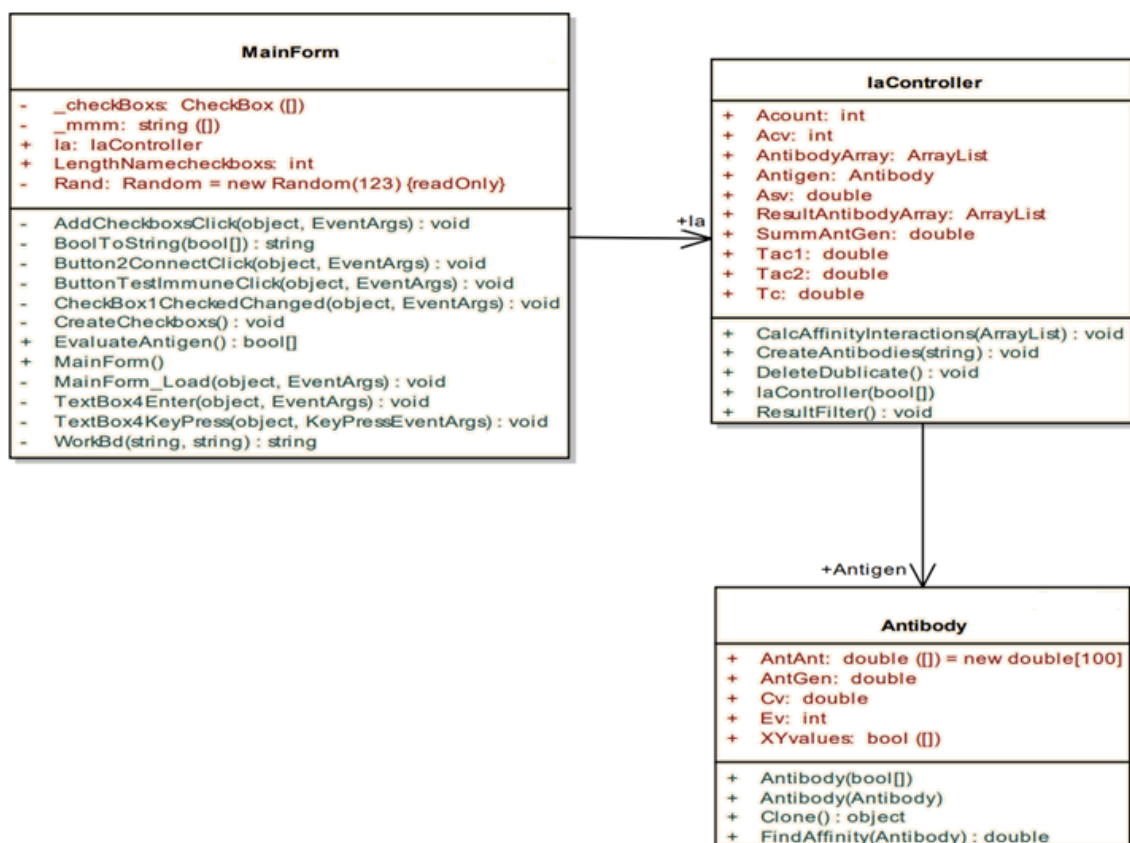


Рис. 2. Диаграмма классов

ния.

Класс Antibody описывает свойства (характеристики) антитела, а также выполняет вычисление различных видов аффинностей с помощью модуля FindAfinity.

В свою очередь модуль FindAfinity реализует вычисление аффинностей как между каждой парой антител, соответствующей архивным проектным решениям (документам), так и между каждой парой антитела с антигеном, соответствующей архивному проектному решению (документу) и искомому проектному решению (документу).

Класс IaController реализует алгоритм параллельного поиска оптимального решения и необходимые для его реализации вспомогательные методы. Данный класс содержит методы:

- CalcAffinityIterations реализует алгоритм параллельного поиска проектного решения, соответствующего заданным критериям;
- DeleteDublicate выполняет исключение одинаковых антител, которые образовались на шаге клонирования;
- ResultFilter необходим для объединения бинарных последовательностей, соответствующих отдельным проектным решениям (документам), полученным с применением параллельного поиска, в единый массив.

Для проверки работоспособности разработанного программного обеспечения была спроектирована база данных, структура которой представлена на рис. 3.

Она содержит 9 таблиц:

- login_password – для хранения логина и пароля пользователя;

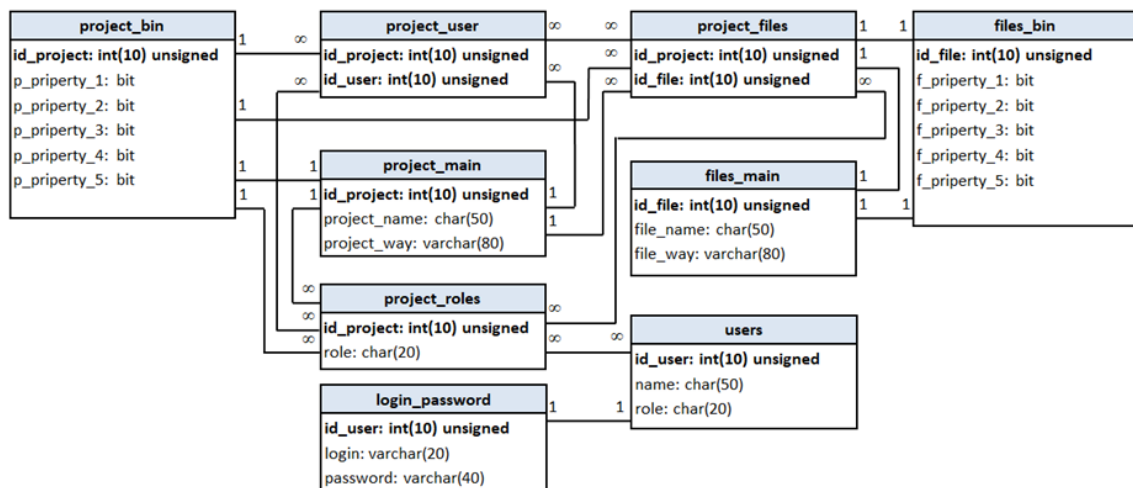


Рис. 3. Структура базы данных

- users – для хранения характеристик пользователя;
- project_roles – для соотнесения проектных решений и ролей;
- project_bin – для хранения бинарных характеристик проектных решений;
- project_user – для соотнесения проектных решений и пользователей;
- project_main – для хранения основных характеристик проектного решения;
- project_files – для соотнесения проектных решений и документов;
- files_main – для хранения основных характеристик документов;
- files_bin – для хранения бинарных характеристик документов.

Для использования разработанного приложения каждый пользователь должен войти в систему. Для входа необходимо ввести корректные логин и пароль и нажать кнопку «Войти». Администратор зарегистрирован в системе по умолчанию. Для того, чтобы обычный незарегистрированный пользователь получил возможность входа в систему по своему логину и паролю он должен обратиться к администратору.

После входа в систему открывается окно «Главное меню». Для администратора открывается главное меню с пометкой «(Администратор)» (рис. 4, слева), в котором он может перейти к регистрации новых пользователей или к настройке проектов. В главном меню обычного пользователя можно выполнить поиск проектных решений или документов, а также просмотреть свои проектные решения (рис. 4, справа).

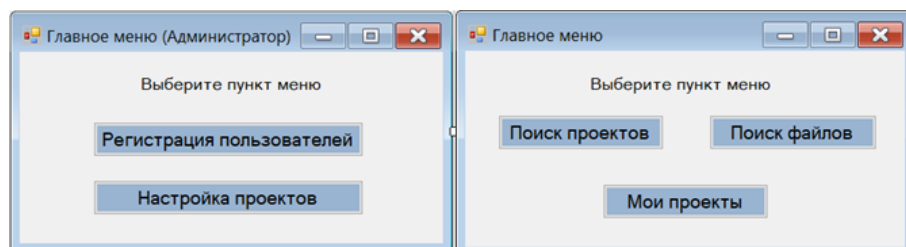


Рис. 4. Главное меню Администратора и обычного пользователя

Выбрав пункт главного меню «Регистрация пользователей», администратор может зарегистрировать нового пользователя. Для этого необходимо корректно запол-

нить поля «ФИО», «Логин», «Пароль» и выбрать роль для разграничения доступа к проектным решениям и документам. Выбрав в главном меню «Настройка проектов» (рис. 5), администратор может просмотреть роли, для которых доступен каждый проект, его расположение, а также просмотреть название и расположение каждого файла проектного решения. Кроме того, он может назначить роли на каждый проект, удалить или добавить проект, удалить или добавить файл.

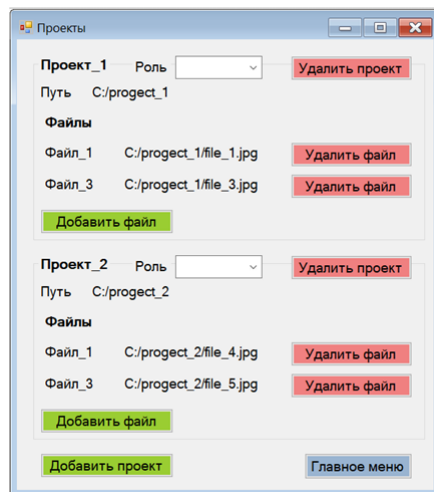


Рис. 5. Диалоговое окно «Настройка проектов»

Обычный пользователь может просматривать только свои проекты и не может назначать роли на проекты. Кроме того он может удалять только файлы документов и проекты, которые добавил он сам. Также пользователь может выполнить поиск проектных решений и файлов, задав соответствующие параметры поиска.

Теперь продемонстрируем проверку работоспособности разработанного программного обеспечения, для чего рассмотрим несколько сценариев действий пользователя.

Сценарий 1. Поиск проектного решения по заданным параметрам проектного решения.

Шаг 1. Ввод логина и пароля пользователя.

Шаг 2. Выбор пункта главного меню «Поиск проектов» в диалоговом окне, представленном на рис. 4.

Шаг 3. Ввод параметров поиска проекта в форму, представленную на рис. 6.

Шаг 4. Получение результатов поиска проектов по заданным параметрам (рис. 7).

Сценарий 2. Поиск проектного решения по заданным параметрам файла документа.

Шаг 1. Ввод логина и пароля пользователя.

Шаг 2. Выбор пункта главного меню «Поиск файлов» в диалоговом окне, представленном на рис. 4.

Шаг 3. Ввод параметров поиска файла в форму, представленную на рис. 8.

Шаг 4. Получение результатов поиска файлов, входящих в состав проектных решений, по их параметрам (рис. 9).

Оценка эффективности поисковой системы производилась по следующей методике построения паретовой границы в критериальном пространстве показателей эффективности поиска [6]. При этом были вычислены значения двух ключевых по-

Рис. 6. Диалоговое окно «Поиск проектов»

Рис. 7. Результат поиска проекта по заданным параметрам

Рис. 8. Диалоговое окно «Поиск файлов»

казателей: коэффициента полноты k_{Π} и коэффициента точности k_T по следующим

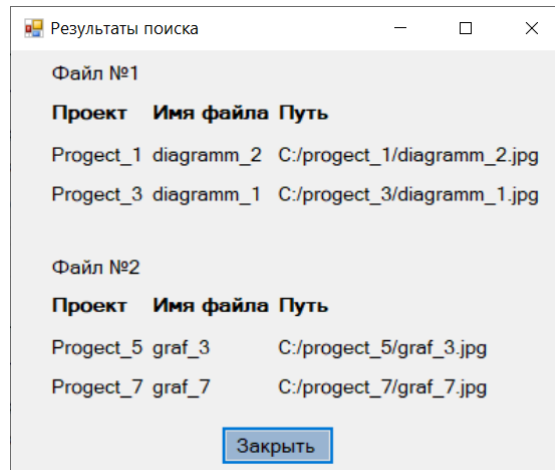


Рис. 9. Результат поиска файлов по заданным параметрам

формулам:

$$k_{\Pi} = \frac{\sum_{(d,s) \in M \times S} \eta(d,s) \varphi(d,s)}{\sum_{(d,s) \in M \times S} \eta(d,s)}, \quad (5)$$

$$k_{\Pi} = \frac{\sum_{(d,s) \in M \times S} \eta(d,s) \varphi(d,s)}{\sum_{(d,s) \in M \times S} \varphi(d,s)}, \quad (6)$$

где s – запрос, d – проектное решение, пара (d, s) называется релевантной парой, если проектное решение d релевантно запросу s , M – массив всех проектных решений, S – массив всех запросов, m – максимальное количество запросов, $\eta(d, s) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \eta_j(d, s)$ – степень релевантности (d, s) , $\varphi(d, s)$ – отношение выдачи (d, s) :

$$\begin{cases} \varphi(d, s) = 1, & \text{если найден документ } d \text{ на запрос } s; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Коэффициент полноты равен 1 только в том случае, когда все проектные решения, степень релевантности которых выше 0, входят в массив результатов поиска. Коэффициент точности будет единичным, если в массив результатов поиска входят только проектные решения со степенью релевантности, равной 1.

Изменяя состав выдачи, то есть функцию $\varphi(d, s)$, можно получать различные значения показателей полноты и точности поиска. Нахождением для каждого значения полноты наибольшего значения точности, строится паретова граница для множества значений полноты-точности поиска.

На основе проведенных экспериментов была построена кривая оптимальных характеристик (рис. 10).

По построенной кривой можно определить границы максимально достижимых значений полноты и точности для данной предметной области.

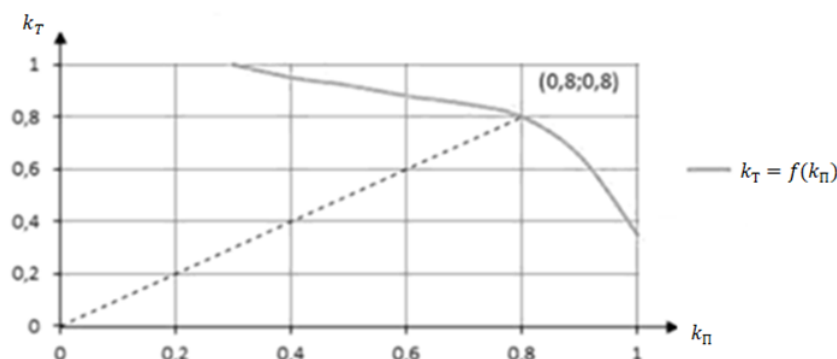


Рис. 10. Кривая оптимальных характеристик качества поиска

Так, если коэффициент полноты равен 1, то значение коэффициента точности не будет превышать 0.3. Это значит, что 70% выдачи будет состоять из «шума» – нерелевантной информации. Если же значение коэффициента точности равно 1 (т. е. в отсутствии «шума»), то значение коэффициента полноты не превысит 35%. Это значит, что 65% релевантной информации будет потеряно. Если требования пользователя к полноте и точности примерно одинаковы, то, проведя биссектрису координатного угла, получим $k_T = k_P = 0.8$. Это значит, что выдача будет содержать 80% релевантной информации и 20% «шума». Потери также составят 20%.

В целях проверки работоспособности разработанного комплекса программ было выполнено тестирование всех вариантов его использования, представленных на рис. 1, с применением соответствующих тестовых сценариев. Успешность выполнения всех рассмотренных авторами сценариев позволяет сделать вывод о работоспособности разработанного программного обеспечения.

Таким образом, разработанный комплекс программ может быть успешно применен для организации поиска проектных решений и входящих в их состав документов в электронных архивах проектной документации IT-компаний с достаточным для практического использования уровнем полноты и точности выдачи релевантной информации, что подтверждает практическую значимость работы.

Литература

1. Учет клиентов [Электронный ресурс] <http://yukosoft.ru> (дата обращения 12.03.2022).
2. Электронный архив E-Arch [Электронный ресурс] <http://e-arch.ru> (дата обращения 15.03.2022).
3. ИНТЕРМЕХ – Комплексная автоматизация технической подготовки производства [Электронный ресурс] <https://intermech.ru> (дата обращения 12.03.2022).
4. De Castro L.N., Timmis J.I. Artificial immune systems as a novel soft computing paradigm // Soft Computing - A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications. 2003. 7. P. 526–544.

5. de Castro L.N., Von Zuben F.J. Artificial Immune Systems: Part II – A Survey of Application. Technical Report. 2000.
6. Соколов А.В. Методика оценки максимально возможных значений показателей эффективности поиска текстовой информации: Информационные технологии // Новые технологии. 2009. №5. С. 18–24.

MSC 68T20 68-04

Software implementation of the immune algorithm used to search for design solutions in the electronic archive of design documentation

A. A. Butkina, O. A. Gushina, O. A. Kuznetsova, A. V. Shamaev

National Research Ogarev Mordovia State University

Abstract: The article discusses the process of developing software used to search for design solutions stored in the electronic archive of design documentation. The search is carried out using a modified version of the immune algorithm, both according to the given characteristics of design solutions, and according to the characteristics of documents (both text and graphic). Diagrams of use cases and classes, a database organization scheme, a stack of development tools and technologies, the results of testing the functionality and efficiency of the developed software are presented.

Keywords: software, immune algorithm, clonal selection algorithms, design solution, electronic archive, search.

References

1. Customer accounting [Electronic resource] <http://yukosoft.ru> (date of access 12.03.2022).
2. Electronic archive E-Arch [Electronic resource] <http://e-arch.ru> (date of access 15.03.2022).
3. INTERMECH – Complex automation of technical preparation of production [Electronic resource] <https://intermech.ru> (date of access 12.03.2022).
4. L.N. De Castro, J.I. Timmis, Artificial immune systems as a novel soft computing paradigm, *Soft Computing - A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications*, 2003, 7, P. 526–544.
5. L.N. de Castro, F.J. Von Zuben, Artificial Immune Systems: Part II – A Survey of Application, Technical Report, 2000.
6. A.V. Sokolov, Methodology for estimating the maximum possible values of indicators of the efficiency of text information retrieval: Information Technology, *New technologies*, 2009, 5, P. 18–24.

УДК 517.9:539.3

Математическое моделирование систем контроля за изменением давления в газожидкостных средах

Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А., Алексанин Н. Д.

Ульяновский государственный технический университет

Аннотация: Рассматривается начально-краевая задача для системы дифференциальных уравнений с частными производными, представляющая собой математическую модель механической системы «трубопровод – датчик давления», в которой сечение трубопровода имеет прямоугольную форму. На основе предложенной модели исследуется совместная динамика чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе. Для описания динамики используются линейные модели механики твердого деформируемого тела и механики жидкости и газа. С помощью введения усредненных характеристик исследование предложенной начально-краевой задачи сведено к изучению одномерной модели, для которой указаны аналитические и численные методы решения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, трубопровод, датчик давления, аэроупругость, динамика, метод Галеркина, метод конечных разностей.

При размещении датчика давления непосредственно на двигателе на него действуют повышенные температуры и вибрации, что приводит к погрешностям измерений и даже к разрушению упругого чувствительного элемента датчика. В связи с этим для измерения давления в рабочей камере двигателя применяются механические системы «трубопровод – датчик давления». В этой системе датчик расположен на некотором расстоянии от двигателя и соединен с ним с помощью трубопровода, что позволяет ослабить воздействие высоких температур и виброускорений. Задача состоит в получении уравнений, связывающих закон изменения давления рабочей среды на выходе из камеры сгорания двигателя (на входе в трубопровод) и деформацию упругого элемента датчика (расположенного на выходе из трубопровода), и предназначенных по величине деформации элемента рассчитать давление в двигателе.

Рассмотрим математическую постановку, соответствующую модели системы «трубопровод – датчик давления», в которой сечение трубопровода D_1 имеет прямоугольную форму

$$\varphi_{tt} = a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}), \quad x \in (0, l), \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b), \quad (1)$$

$$\varphi_y(x, 0, z, t) = \varphi_y(x, a, z, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad z \in (0, b), \quad (2)$$

$$\varphi_z(x, y, 0, t) = \varphi_z(x, y, b, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad y \in (0, a), \quad (3)$$

$$\varphi_x(l, y, z, t) = w_t(y, z, t), \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b), \quad (4)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, y, z, t) = P(y, z, t), \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} L(w(y, z, t)) &\equiv mw_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta(\Delta^2 w)_t + f(w_t, w) = \\ &= P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, y, z, t) - P_*, \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Delta w = w_{yy} + w_{zz}$, $\Delta^2 w = w_{yyyy} + 2w_{yyzz} + w_{zzzz}$.

В (1)-(6) $\varphi(x, y, z, t)$ – потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе прямоугольной формы; $w(y, z, t)$ – деформация упругого элемента, расположенного в конце трубопровода $x = l$; $P(y, z, t)$ – заданный закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод $x = 0$; ρ_0 , P_0 , a_0 – плотность, давление, скорость звука, соответствующие состоянию покоя рабочей среды; P_* – внешнее воздействие на упругий элемент; m и D – погонная масса и изгибная жесткость упругого элемента; N – сжимающее (растягивающее) элемент усилие; β – коэффициент внутреннего демпфирования; $f(w_t, w)$ – некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации и скорости деформации; индексы x, y, z, t снизу обозначают частные производные по координатам x, y, z и времени t .

Уравнение (1) описывает движение идеального газа в трубопроводе с сечением прямоугольной формы; (2)-(4) – условия непротекания стенок трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (5) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (6) описывает динамику упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций $\varphi(x, y, z, t)$, $w(y, z, t)$, которая должна быть дополнена начальными условиями для этих функций, а также граничными условиями для $w(y, z, t)$.

Для решения задачи (1)-(6) введем усредненные характеристики основных величин динамической системы

$$\begin{aligned}\Phi(x, t) &= \iint_{D_1} \varphi(x, y, z, t) dS, & \xi(t) &= \iint_{D_1} w(y, z, t) dS, \\ G(t) &= \iint_{D_1} P(y, z, t) dS, & Q(w) &= \iint_{D_1} L(w(y, z, t)) dS,\end{aligned}\tag{7}$$

где область интегрирования $D_1 = \{(y, z) : 0 \leq y \leq a; 0 \leq z \leq b\}$, $dS = dydz$. Интегрируя (1)-(6) по квадрату D_1 , получим

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0, \tag{8}$$

$$\Phi_x(l, t) = \dot{\xi}(t), \tag{9}$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0, t) = G(t), \tag{10}$$

$$(P_0 - P_*)S - \rho_0 \Phi_t(l, t) = Q(w), \tag{11}$$

где $S = ab$ – площадь сечения D_1 .

Пусть $w(y, z, t) = \theta(t)g(y, z)$, $w_0 = \iint_{D_1} g(y, z) dS$ и $g(y, z)$ удовлетворяет граничным условиям, соответствующим типу закрепления упругого элемента. Тогда $\xi(t) = w_0 \theta(t)$.

Пусть в (6) $L(w(y, z, t)) = mw_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta(\Delta^2 w)_t + \alpha w_t + \gamma w$, где α , γ – коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи. Тогда

$$Q(w) = m_0 \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t), \tag{12}$$

где $m_0 = m \iint_{D_1} g(y, z) dS$, $\alpha_0 = \alpha \iint_{D_1} g(y, z) dS + \beta \iint_{D_1} \Delta^2 g(y, z) dS$, $\gamma_0 = D \iint_{D_1} \Delta^2 g(y, z) dS + N \iint_{D_1} \Delta g(y, z) dS + \gamma \iint_{D_1} g(y, z) dS$. Таким образом, решение задачи (1)-(6) сведено к

исследованию одномерной системы (8)-(11) для функций $\Phi(x, t)$, $\theta(t)$, в которой $Q(w)$ имеет вид (12), а $\dot{\xi}(t) = w_0 \dot{\theta}(t)$.

Предложены несколько способов исследования одномерной системы (8)-(11).

1. При аналитическом исследовании решение задачи сводится к исследованию уравнения с отклоняющимся аргументом. Подставляя в (9)-(11) общее решение уравнения (8) $\Phi(x, t) = A \left(t - \frac{x}{a_0} \right) + B \left(t + \frac{x}{a_0} \right)$ и проводя ряд несложных математических действий, получим уравнение с отклоняющимся аргументом, связывающее величину отклонения $\theta(t)$ чувствительного элемента датчика с законом изменения давления $G(t)$ рабочей среды в двигателе

$$m_0 \left[\ddot{\theta} \left(t - \frac{l}{a_0} \right) + \ddot{\theta} \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \right] + \alpha_0 \left[\dot{\theta} \left(t - \frac{l}{a_0} \right) + \dot{\theta} \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \right] + \gamma_0 \left[\theta \left(t - \frac{l}{a_0} \right) + \theta \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \right] - \rho_0 a_0 w_0 \left[\dot{\theta} \left(t - \frac{l}{a_0} \right) - \dot{\theta} \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \right] = 2[G(t) + (P_0 - P_*)S]. \quad (13)$$

Если $\frac{l}{a_0} = \varepsilon$ - малый параметр (например, для воздуха $a_0 \approx 330$ м/сек), то, проводя в (13) разложение по степеням ε и отбрасывая старшие по порядку члены, можно получить приближенное уравнение (без отклонения аргумента t), связывающее $\theta(t)$ и $G(t)$

$$(m_0 + \rho_0 w_0 l) \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[\left(m_0 + \frac{1}{3} \rho_0 w_0 l \right) \theta^{(4)}(t) + \alpha_0 \ddot{\theta}(t) + \gamma_0 \ddot{\theta}(t) \right] + O(\varepsilon^4) = G(t) + (P_0 - P_*)S. \quad (14)$$

Решение линейного дифференциального уравнения (14) с постоянными коэффициентами можно искать классическими методами, а можно исследовать численно.

2. При численно-аналитическом исследовании на основе метода Галеркина потенциал скорости $\Phi(x, t)$ представляется в виде отрезков рядов по полным на интервале $(0, l)$ системам функций $\{z_m(x)\}$, которые удовлетворяют однородным граничным условиям, соответствующим условиям (9)-(10) или (10)-(11). В результате исследование сведено к решению задачи Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является основой для проведения численного эксперимента.

3. Численное исследование проводилось с помощью конечно – разностного метода. При этом использовалась явная схема, на основе которой проведен численный эксперимент.

Разработан программный комплекс для математического моделирования механической системы «трубопровод – датчик давления» [1]. Он предназначен для исследования совместной динамики чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе, соединяющем камеру сгорания двигателя с датчиком, и позволяет получать графики функции отклонения подвижного элемента датчика при различном задании механических параметров системы, в том числе при задании закона изменения давления рабочей среды в двигателе. Программный комплекс состоит из трех программ: программа численного исследования на основе метода конечных разностей, разработанная в пакете Microsoft Visual Studio C++, программа решения уравнения (14) и программа численного исследования на основе метода Галеркина, разработанные в пакете Mathematica 12.

Аналогичным образом с помощью введения усредненных характеристик к решению одномерной задачи сводятся начально-краевые задачи, соответствующие моделям механической системы «трубопровод-датчик давления» для других различных форм сечений трубопровода [1, 3, 5].

Литература

1. Тамарова Ю.А., Вельмисов П.А., Анкилов А.В. Программный комплекс для математического моделирования механической системы «трубопровод – датчик давления». Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2022615319, 30.03.2022. Заявка № 2022615014 от 28.03.2022.
2. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А., Покладова Ю.В. Математическое моделирование в задачах динамики и устойчивости деформируемых элементов одного класса аэроупругих систем // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: материалы XV Междунар. науч.-техн. конф. Пенза: Изд-во ПГУ. 2020. С. 122–127.
3. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал Средневолжского математического общества. 2020. Т. 22, № 3. С. 352–367.
4. Тамарова Ю.А., Вельмисов П.А., Алексанин Н.Д., Нуруллин Н.И. Исследование динамических процессов в системах измерения давления газожидкостных сред // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 4. С. 461–471.

MSC 35Q35 35Q74

Mathematical modeling of control systems for pressure changes in gas-liquid media

P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova, N. D. Aleksanin

Ulyanovsk State Technical University

Abstract: An initial-boundary value problem for a system of differential equations with partial derivatives is considered, which is a mathematical model of the mechanical system "pipeline - pressure sensor in which the pipeline section has a rectangular shape. Based on the proposed model, the joint dynamics of the sensitive element of the pressure sensor and the working medium in the pipeline is investigated. To describe the dynamics, linear models of the mechanics of a solid deformable body and the mechanics of liquid and gas are used. With the help of the introduction of averaged characteristics, the study of the proposed initial-boundary value problem is reduced to the study of a one-dimensional model, for which analytical and numerical methods of solution are indicated.

Keywords: differential equations, pipeline, pressure sensor, aeroelasticity, dynamics, Galerkin method, finite difference method.

References

1. Yu.A. Tamarova, P.A. Velmisov, A.V. Ankilov, The software package for mathematical modeling of the mechanical system «pipeline - pressure sensor», Certificate of registration of the computer program 2022615319, 30.03.2022. Application No. 2022615014 dated 03/28/2022.
2. P.A. Velmisov, Yu.A. Tamarova, Yu.V. Pokladova, Mathematical modeling in problems of dynamics and stability of deformable elements of one class of aeroelastic systems, *Analiticheskiye i chislennyye metody modelirovaniya yestestvenno-nauchnykh i sotsial'nykh problem: materialy XV Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. Penza: Izd-vo PGU*, 2020, P. 122–127.
3. P.A. Velmisov, Yu.A. Tamarova, Matematicheskoye modelirovaniye sistem izmereniya davleniya v gazozhidkostnykh sredakh, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 2020, 22, 3, P. 352–367.
4. Yu.A. Tamarova, P.A. Velmisov, N.D. Aleksanin, N.I. Nurullin, Issledovaniye dinamicheskikh protsessov v sistemakh izmereniya davleniya gazozhidkostnykh sred, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 2021, 23, 4, P. 461–471.

УДК 519.6

Численное моделирование взрывов в воздухе с выделением ударной волны

Веселова Е. А., Дерюгин Ю. Н., Зеленский Д. К., Ктиторов В. М.

ФГУП «РФЯЦ - ВНИИЭФ»

Аннотация: В работе представлена параллельная методика расчета двумерных задач газовой динамики на геометрически адаптивных неструктурированных сетках. Подобный подход позволяет значительно снизить вычислительную сложность алгоритмов за счёт детализированного моделирования особенностей ударной волны. Методика применена к решению нескольких задач имеющих аналитическое решение, на которых показала высокую эффективность и достоверность результатов.

Ключевые слова: численные методы, газовая динамика, геометрически адаптивные неструктурированные сетки, ударная волна.

В ряде приложений возникает необходимость моделировать ударную волну на больших временах и расстояниях от места взрыва, когда на форму и скорость ударной волны влияют различные факторы [1–5]. В принципе, расчет распространения ударных волн возможен по любому многомерному газодинамическому коду. Однако в большинстве созданных кодов, расчет ударных волн проводится «сквозным» методом, который требует либо построения сеточной модели для всей области распространения волны, либо разработке специализированных алгоритмов адаптации сетки к области, где находится волна. Все это приводит к большим затратам вычислительных ресурсов. В работах [6, 7] был развит подход, основанный на выделении ударной волны в сочетании с адаптивной сеткой, подстраиваемой под ее движение. На основе такого подхода был создан ряд двумерных и трехмерных расчетных методик на блочных структурированных сетках.

В данной работе представлена параллельная методика расчета двумерных задач газовой динамики на геометрически адаптивных неструктурированных сетках. Геометрическая адаптация связана с выделением в решении основных особенностей, таких как ударные волны и контактные разрывы. Скорость движения разрывов и параметры на разрывах определяются из решения задачи Римана о распаде разрыва. Смещение внутренних узлов сетки определяется методом интерполяции по смещению граничных узлов. Разностные уравнения получены дискретизацией исходных уравнений в интегральной форме квадратурными формулами прямоугольников. При решении уравнений Эйлера численные конвективные потоки определяются на основе решения задачи о распаде разрыва. Для повышения точности моделирования предраспадные параметры потока определяются с использованием линейной либо квадратичной реконструкции решения. В задачах со сферической симметрией с целью уменьшения немонокотности в численном решении применяется алгоритм доворота вектора скорости у предраспадных параметров потока. Методики реализованы в рамках параллельного пакета программ ЛОГОС [3]. Расчетная методика проверена на ряде тестовых и модельных задач принятых, для тестирования двумерных методик [4, 5].

Возможности методики иллюстрируются на трех задачах. В первой задаче рас-

считается распространение ударной волны от мгновенного взрыва сферического заряда ВВ на большие расстояния. Для близких расстояний результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными, представленными в [8]. Для больших расстояний получена аппроксимационная зависимость избыточного давления от пройденного расстояния. Определена структура потока за волной, которая с некоторого расстояния принимает универсальную форму N-волны.

Во второй задаче численно исследуется развитие двумерных возмущений в сильном взрыве. Такая задача рассматривалась в работах [3, 4], где для идеального газа построено автомодельное решение и показано, что при значениях показателя адиабаты газа, близких к единице, на фронте волны реализуется неустойчивость типа Релея-Тейлора [3]. В работе [4] был найден критерий устойчивости и определены инкременты наиболее быстро растущих гармоник. По созданной методике были проведены расчеты эволюции двумерных возмущений для различных гармоник и показателей адиабаты. Результаты расчетов сравниваются с автомодельным решением из работы [4]. Отмечается хорошее согласование результатов численных расчетов с аналитическим решением.

В третьей задаче численно исследуется искривление фронта ударной волны, распространяющейся по среде, включающей канал из другого вещества. Для такой задачи в работе [5] на основе автомодельного решения было построена зависимость коэффициента возмущения фронта волны в канале. Численно были проведены расчеты модельной задачи об искривлении фронта волны при вариации плотности вещества в канале. Результаты расчетов сравниваются с аналитическим решением из работы [5]. Здесь также отмечается хорошее согласование результатов численных расчетов с аналитическим решением.

Литература

1. Броуд Г. Сб. Механика № 3. Расчеты взрывов на ЭВМ. Подземные взрывы. М.: Мир, 1975-164с.
2. Зайдель Р.М. Влияние начальной разнородности на движение ударной волны // Изв. АН. СССР, МЖГ. 1968. 4. 152-162.
3. Vishiac E.T. Astrophysics J. 1983. 278. 1071.
4. Ктитор В.М. ВАНТ. Сер. ТИПФ. 1984г. №2(2). 28.
5. Ктитор В.М. Движение ударной волны в присутствии слабо выделенного канала // ВАНТ. Сер. ТИПФ. 1990. №2(2). С. 10-11.
6. Годунов С.К., Забродин А.В., Прокопов Г.П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной // ЖВМиМФ. 1, 36. 1020-1050.
7. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
8. Физика взрыва. Том 1. Под редакцией Л.П. Орленко. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 824 с.

MSC 76D05, 76M12

Numerical simulation of explosions in the air with the release of a shock wave

E. A. Veselova, Yu. N. Deryugin, D. K. Zelensky, V. M. Ktitorov

FSUE «RFNC - VNIIEF»

Abstract: The paper presents a parallel method for calculating two-dimensional problems of gas dynamics on geometrically adaptive unstructured grids. This approach makes it possible to significantly reduce the computational complexity of algorithms due to detailed modeling of shock wave features. The technique is applied to solving several problems with an analytical solution, on which it has shown high efficiency and reliability of the results.

Keywords: numerical methods, gas dynamics, geometrically adaptive unstructured grids, shock wave.

References

1. G. Broad, Sat. Mechanics No. 3. Calculations of explosions on a computer. Underground explosions, Moscow, Mir, 1975, 164 p.
2. R.M. Zaidel, The effect of the initial density difference on the motion of the shock wave, *Izv. A.N.SSSZR, MZhG*, 1968, 4, P. 152-162.
3. E.T. Vishiac, *Astrophysics J.*, 1983, 278, 1071.
4. V.M. Ktitorov, *VANT, Ser. TiPF*, 1984, No. 2(2), 28.
5. V.M. Ktitorov, Shock wave motion in the presence of a weakly isolated channel, *VANT, Ser. TiPF*, 1990, No. 2(2), P. 10-11.
6. S.K. Godunov, A.V. Zabrodin, G.P. Prokopov, Difference scheme for two-dimensional unsteady problems of gas dynamics and calculation of flow with a receding shock wave, *ZHVMIMF*, 1, 36 1020-1050.
7. S.K. Godunov, A.V. Zabrodin, M.Ya. Ivanov, A.N. Kraiko, G.P. Prokopov, Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics, M., Nauka, 1976, 400 p.
8. Explosion physics, Volume 1, Edited by L.P. Orlenko, M., FIZMATLIT, 2002, 824 p.

УДК 51-73+519.62

Опыт междисциплинарной и межрегиональной работы при моделировании процессов в химической технологии*

Губайдуллин И. М.

Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН

Аннотация: В работе рассматриваются современные подходы организации междисциплинарной и межрегиональной работы при математическом моделировании сложных промышленных процессов химической технологии. На сегодняшний день, когда промышленные заводы химической технологии работают в режиме жесткой конкуренции, методы математического моделирования становятся самым эффективным и мало затратным способом оптимизации физико-химических процессов с целью улучшения качества выпускаемой продукции и повышения прибыли. Приводится опыт сотрудничества с коллегами из лаборатории динамических и управляемых систем кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Института информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. На примере математического моделирования промышленно важного процесса сернокислотного алкилирования изобутана олефинами показана эффективная организация совместной работы с чётким выделением научной специализации научных школ Уфы и Нижнего Новгорода. Результатом такой межрегиональной и междисциплинарной работы является разработка кинетической модели реакции сернокислотного алкилирования изобутана олефинами с использованием асинхронного алгоритма глобальной оптимизации. Также итогом представленной работы является постановка новых задач математического моделирования и оптимизации вышеуказанного процесса. Целью работы является определение оптимального соотношения исходных реагентов (изобутан/олефин), концентрации катализатора (серной кислоты) и температуры ведения промышленного процесса алкилирования для максимального выхода продукта.

Ключевые слова: межрегиональный и междисциплинарный подход, иерархическая структура математического моделирования химико-технологических процессов, кинетическое моделирование, алкилирование изобутана олефинами, асинхронный алгоритм глобальной оптимизации, задачи оптимального управления химическими процессами.

С каждым годом качество товарных бензинов всё больше определяется концентрациями отдельных компонентов углеводородного состава. При этом происходит детализация ранее принятых при характеристике состава бензина групп углеводородов. Например, проведенные в последнее время научные исследования показали, что парафины необходимо рассмотреть более детально – в случае изомеров с минимальным октановым числом для нормальных и разветвленных парафинов с одинаковым числом атомов углерода разница составляет от 35 до 40 пунктов. Таким образом, для точной оценки октанового числа необходимо разделение парафинов на нормальные и на разветвленные. Кроме того, их реакционная способность к одним и тем же видам реакций различна. В случае с нафтенами пятичленные (циклопентаны) и ше-

*Работа выполнена в рамках Государственного задания Института нефтехимии и катализа УФИЦ РАН (тема №FMRS-2022-0078).

стичленные (циклогексаны) нафтены имеют различную селективность реакции ароматизации. Это является достаточным обоснованием необходимости их разделения при описании кинетики процесса, поскольку ароматические углеводороды обладают более высоким октановым числом. Более глубокая детализация состава бензина диктуется и экологическими требованиями: например, стандарт Евро-5 требовал содержания олефинов не более 14 %, а Евро-6 – уже не более 11 %. Таким образом, при проведении научных исследований с целью повышения качества нефтепродуктов и соблюдения экологических требований возникает необходимость детализации компонентного состава товарных бензинов. Это в свою очередь, приводят к увеличению количества стадий химических процессов при описании промышленно важных процессов. Следовательно, в технологической цепочке совершенствования действующих и разработки новых процессов и аппаратов методы математического суперкомпьютерного моделирования, теория анализа и хранения больших данных, становятся не просто необходимой, а обязательной частью. Также это обусловлено сложностью решаемых задач и необходимостью сокращения сроков исследований [1].

Товарный бензин – это смесь нефтепродуктов из разных установок с реализованными различными химико-технологическими процессами. Одним из идеальных компонентом бензина является алкилат. Он характеризуется низкой летучестью, практически не содержит непредельных и ароматических углеводородов, обладает высоким октановым числом. Быстрое увеличение автомобильного парка и соответствующий рост спроса на высокооктановый бензин ставят вопрос увеличения производства алкилата за максимально короткое время. Оптимальный выход определяется тремя важными составляющими процесса алкилирования: соотношения исходных продуктов (изобутана и олефина); концентрации катализатора (серная кислота) и температуры ведения процесса. Решить такую промышленно необходимую многокритериальную оптимальную задачу со сложным механизмом химических превращений за короткий срок под силу только суперкомпьютерному моделированию. Таким образом, актуальность представленной работы не вызывает сомнений.

Успех суперкомпьютерного моделирования промышленно важных сложных химико-технологических процессов и установок определяется тесным взаимодействием научных школ разных городов [2]. Одному коллективу нереально одновременно формировать базу данных входных и выходных информационных потоков, составлять математическое описание сложных химико-физических процессов, происходящих в аппаратах сложной конструкции, разрабатывать эффективные устойчивые быстросходящиеся численные методы, создавать интерфейсно удобные программные комплексы. Очень важно также наличие высокопроизводительных вычислительных центров с гибридными суперкомпьютерами, которые в свою очередь требуют постоянного технического обслуживания.

Для успешной реализации совместных работ разных школ, владеющими разными специализациями необходимо представить сложный химико-технологический процесс в виде иерархической структуры. Основоположник математического моделирования химико-технологических процессов, член-корр. Михаил Гаврилович Слинько выделил 6 этапов такой структуры [3]. На сегодняшний день, учитывая возросшую сложность математического описания, объем экспериментальных и вычислительных данных, параллельных алгоритмов и численных методов современное математическое моделирование нуждается в углублении и расширении иерархической структуры до 10 этапов. К 6 первоначальным этапам необходимо добавить разработку баз данных входных и выходных информационных потоков, грамотное разделение

численных алгоритмов по физическим процессам, технологии суперкомпьютерного параллельного программирования и WEB-вычислительную лабораторию с удобным интерфейсом удалённого доступа.

Для суперкомпьютерного моделирования процесса сернокислотного алкилирования на сегодняшний день реализован первый фундаментальный этап в структуре иерархического моделирования [4]. Проведено суперкомпьютерное кинетическое моделирование реакции сернокислотного алкилирования изобутана олефинами с использованием асинхронного алгоритма глобальной оптимизации. При этом решены следующие задачи:

- 1) созданы базы входных данных кинетических исследований;
- 2) построено математическое описание прямой задачи кинетики алкилирования;
- 3) формализована задача оптимизации – идентификация параметров химических реакций (минимизации функционала разности экспериментальных и расчетных данных концентраций участвующих в реакции веществ, при разных временах, при разных температурах);
- 4) реализованы методы решения задач глобальной оптимизации;
- 5) редуцированы размерности;
- 6) разработан параллельный алгоритм глобального поиска;
- 7) разработана программная система Globalizer;
- 8) проведены вычислительные эксперименты.

Работа была выполнена в тесном удалённом контакте сотрудниками лаборатории математической химии Института нефтехимии и катализа УФИЦ РАН и сотрудниками лаборатории динамических и управляемых систем кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Института информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Разделение выполнения задач было следующее. Пункты 1)-3) реализовала уфимская школа, а пункты 4)-7) – школа Нижнего Новгорода. Восьмой пункт был реализован совместными усилиями дистанционно. Вычислительные эксперименты проводились на суперкомпьютере «Лобачевский» (ННГУ). Один узел: 2 процессора Intel Sandy Bridge E5-2660 2.2 GHz 8 ядер, 64 Gb RAM, 3 GPU NVIDIA Kepler K20X 2688 CUDA-ядер. Компилятор GCC 5.5.0 Intel MPI 2017. Язык реализации программ – Python 3.9.

В статье [5] приведены результаты работы последовательного, параллельного синхронного и параллельного асинхронного алгоритмов при использовании 8 узлов (16 процессоров). Все методы нашли одинаковое (по значению целевой функции) решение. Получены графики сравнения концентрации расчетных и экспериментальных данных наблюдаемых веществ. Значения функционала разности составила менее 1 %.

Далее необходимо перейти на следующий этап иерархической структуры суперкомпьютерного моделирования – моделирование единичного блока в каскаде реакторов с учётом влияния концентрации катализатора (серной кислоты) и внешнего обогрева [6, 7]. После – провести оптимизацию введения процесса с целью максимального выхода продукта процесса – алкилата. Предварительное исследование показало, что выход алкилата зависит от трёх составляющих: 1) соотношения исходных реагентов; 2) концентрация катализатора; 3) температуры внешнего обогрева реактора. Проведена формализация многокритериальной оптимизации процесса сернокислотного алкилирования изобутана олефинами [8].

В заключение хочется отметить, что в данной работе приведено только сов-

местное сотрудничество между научными школами Уфы и Нижнего Новгорода. За последнее 10 лет, коллективом лаборатории математической химии ИНК УФИЦ РАН, совместно с коллегами из других регионов успешно решены ряд других научно-технических и практических задач. Коллегами из Института катализа им. Г.К. Борескова СО РАН проведено успешное математическое моделирование химизмов процесса пиролиза этана и пропана [9] и низкотемпературной конверсии легких углеводородов [10]. Научное сотрудничество с коллегами из Национального исследовательского Мордовского государственного университета им Н.П. Огарёва позволило моделировать более высокие уровни иерархического этапа – процессов на зерне [11-13] и в газовом потоке [14]. Таким образом, поэтапное моделирование в тесном сотрудничестве школ из разных городов в конечном итоге позволит создать отечественные программные комплексы. А это необходимый фундамент научно-технического проведения цифровизации химико-технологических промышленных процессов.

В списке литературы данной работы не случайно приведены диссертационные работы молодых ученых из разных регионов. Они успешно были защищены именно на основе совместного сотрудничества и очных контактов школ различных регионов! Для молодёжи особенно важно участие в научных семинарах и конференциях из других регионов, что даёт дополнительный стимул для привлечения молодёжи в науку и сохранения связи поколений.

Литература

1. Слинько М.Г. О сокращении сроков разработки и усовершенствования каталитических процессов // Катализ в промышленности. 2006. № 4. С. 3-11.
2. Слинько М.Г. Нам необходима новая стратегия развития промышленного катализа // Катализ в промышленности. 2007. № 1. С. 3-8.
3. Слинько М.Г. История развития математического моделирования каталитических процессов и реакторов // Теоретические основы химической технологии. 2007. Т. 41. № 1. С. 16-34.
4. Губайдуллин И.М. Информационно-аналитическая система решения многопараметрических обратных задач химической кинетики // диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук / Башкирский государственный университет. Уфа, 2012.
5. Gubaydullin I., Enikeeva L., Barkalov K., Lebedev I. Parallel global search algorithm for optimization of the kinetic parameters of chemical reactions // Communications in Computer and Information Science. 2021. Т. 1510 CCIS. С. 198-211.
6. Балаев А.В. Моделирование каталитических процессов с переменными свойствами реакционной среды // диссертация на соискание ученой степени доктора химических наук / Институт нефтехимии и катализа. Уфа, 2008.
7. Бесков В.С., Флокк В. Моделирование каталитических процессов и реакторов // М.: Химия, 1991. 256 с.
8. Коледина К.Ф. Многокритериальная оптимизация и оптимальное управление химическими процессами на основе детализированной кинетической модели // диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук / Башкирский государственный университет. Уфа, 2021.

9. Нурисламова Л.Ф. Разработка компактной кинетической модели пиролиза пропана методами анализа чувствительности // диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Башкирский государственный университет. Уфа, 2015.
10. Еникеева Л.В. Алгоритм и программный комплекс для анализа механизма гибели ароматических нитрозооксидов и низкотемпературной конверсии легких углеводородов // диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Башкирский государственный университет. Уфа, 2018.
11. Язовцева О.С. Исследование устойчивости решений математических моделей по части компонент на основе локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности // диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Ульяновский государственный университет. Ульяновск, 2019.
12. Губайдуллин И.М., Язовцева О.С. Исследование усредненной модели окислительной регенерации закоксованного катализатора // Компьютерные исследования и моделирование. 2021. Т. 13. № 1. С. 149-161
13. Yazovtseva O., Grishaeva O., Gubaydullin I., Peskova E. Construction of a Parallel Algorithm for the Numerical Modeling of Coke Sediments Burning from the Spherical Catalyst Grain // Parallel Computational Technologies. PCT 2022. Communications in Computer and Information Science. Springer, Cham, 2022. V. 1618. https://doi.org/10.1007/978-3-031-11623-0_17.
14. Пескова Е.Е. Моделирование химически реагирующих потоков с использованием вычислительных алгоритмов высокого порядка точности // диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / ИПМ им М.В. Келдыша. Москва, 2018.

MSC 00A71

Experience of interdisciplinary and interregional work in modeling processes in chemical technology

I. M. Gubaydullin

Institute of Petrochemistry and Catalysis of the Russian Academy of Sciences

Abstract: The paper considers modern approaches to the organization of interdisciplinary and interregional work in the mathematical modeling of complex industrial processes of chemical technology. Today, when industrial chemical technology plants operate in a highly competitive mode, mathematical modeling methods become the most effective and low-cost way to optimize physico-chemical processes in order to improve the quality of products and increase profits. The experience of cooperation with colleagues from the Laboratory of Dynamic and Controlled Systems of the Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis, the Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics of Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky is given. Using the example of mathematical modeling of the industrially important process of sulfuric acid alkylation of isobutane with olefins, an effective organization of joint work with a clear allocation of scientific specialization of scientific schools of Ufa and Nizhny Novgorod is shown. The result of such interregional and interdisciplinary work was the development of a kinetic model of the reaction of sulfuric acid alkylation of isobutane with olefins using an asynchronous global optimization algorithm. Also, the result of the presented work is the formulation of new problems of mathematical modeling and optimization of the above process. The purpose of which is to determine the optimal ratio of the initial reagents (isobutane/olefin), the concentration of the catalyst (sulfuric acid) and the temperature of the industrial alkylation process for maximum product yield.

Keywords: interregional and interdisciplinary approach, hierarchical structure of mathematical modeling of chemical-technological processes, kinetic modeling, alkylation of isobutane with olefins, asynchronous algorithm of global optimization, the problems of optimal control of chemical processes.

References

1. M.G. Slinko, On shortening the terms of development and improvement of catalytic processes, *Catalysis in industry*, 2006, No. 4, P. 3-11.
2. M.G. Slinko, We need a new strategy for the development of industrial catalysis, *Catalysis in industry*, 2007, No. 1, P. 3-8.
3. M.G. Slinko, The history of the development of mathematical modeling of catalytic processes and reactors, *Theoretical foundations of chemical technology*, 2007, Vol. 41, No. 1, P. 16-34.
4. I.M. Gubaydullin, Information and analytical system for solving multiparametric inverse problems of chemical kinetics, Dissertation for the degree of Doctor of Physico-mathematical Sciences, Bashkir State University, Ufa, 2012.
5. I. Gubaydullin, L. Enikeeva, K. Barkalov, I. Lebedev, Parallel global search algorithm for optimization of the kinetic parameters of chemical reactions,

- Communications in Computer and Information Science*, 2021, Vol. 1510 CCIS, P. 198-211.
6. A.V. Balaev Modeling of catalytic processes with variable properties of the reaction medium, Dissertation for the degree of Doctor of Chemical Sciences, Institute of Petrochemistry and Catalysis, Ufa, 2008.
 7. V.S. Beskov, V. Flock, Modeling of catalytic processes and reactors, Moscow, Khimiya, 1991, 256 p.
 8. K.F. Koledina, Multicriteria optimization and optimal control of chemical processes based on a detailed kinetic model, dissertation for the degree of Doctor of Physico-mathematical Sciences, Bashkir State University, Ufa, 2021.
 9. L.F. Nurislamova, Development of a compact kinetic model of propane pyrolysis by sensitivity analysis methods, Dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Bashkir State University, Ufa, 2015.
 10. L.V. Enikeeva Algorithm and software package for analyzing the mechanism of death of aromatic nitroxides and low-temperature conversion of light hydrocarbons, Dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Bashkir State University, Ufa, 2018.
 11. O.S. Yazovtseva Investigation of the stability of solutions of mathematical models in terms of components based on local component-by-component asymptotic equivalence, Dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 2019.
 12. I.M. Gubaydullin, O.S. Yazovtseva, Investigation of the averaged model of oxidative regeneration of a coked catalyst, *Computer studies and modeling*, 2021, Vol. 13, No. 1, P. 149-161
 13. O. Yazovtseva, O. Grishaeva, I. Gubaydullin, E. Peskova, Construction of a Parallel Algorithm for the Numerical Modeling of Coke Sediments Burning from the Spherical Catalyst Grain, *Parallel Computational Technologies. PCT 2022. Communications in Computer and Information Science*, Springer, Cham, 2022, V. 1618. https://doi.org/10.1007/978-3-031-11623-0_17.
 14. E.E. Peskova Modeling of chemically reacting flows using computational algorithms of high order of accuracy, dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, IPM named after M.V. Keldysh, Moscow, 2018.

УДК 51-7(004.94)

Применение методов математического моделирования в технологии VR/AR

Жалнин Р. В., Игайкин И. В.

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва

Аннотация: В статье рассматриваются особенности применения методов математического моделирования для создания симуляций виртуальной и дополненной реальности. В качестве примера демонстрируется симуляция лабораторной установки для определения скорости распространения пламени по поверхности горючей жидкости. В работе представлена математическая модель горения жидкого вещества и демонстрируется распространение фронта пламени по поверхности жидкости.

Ключевые слова: виртуальная реальность, адекватность среды, горение, фронт пламени

1. Особенности применения методов математического моделирования при создании VR симуляции

Одним из перспективных направлений прикладной области информационных технологий является применение трехмерных интерактивных виртуальных сред для создания тренажеров и симуляторов [1].

Для решения таких задач необходимо наличие эффективных технологий, которые должны обеспечивать адекватность виртуальной среды и быстродействие вычислительных процессов достаточное для формирования качественных изображений высокого разрешения в режиме реального времени [2].

Применение методов математического моделирования обеспечивает необходимую адекватность виртуальной среды. Однако использование большинства расчетных схем и численных методов для математических расчетов оказывается невозможным. Причиной этого является ограничение по времени, за которое должны быть выполнены расчеты.

Данное ограничение накладывается из-за необходимости отрисовки объектов виртуальной среды каждую $1/60$ долю секунды (стандартная периодичность отрисовки). Все расчеты должны быть выполнены в этот период времени, чтобы объекты и процессы, моделируемые в виртуальной среде, соответствовали требованию адекватности среды.

Для решения проблемы ограничения по времени можно применить два способа.

Первый способ заключается в предварительном расчете математических моделей и использовании полученных результатов в самой симуляции. Данный способ позволяет применять методы математического моделирования вне зависимости от их скорости выполнения.

Однако использование данного способа обладает существенным недостатком. Использование готовых расчетов предполагает, что все возможные действия в симуляции будут заранее известны. В виду наличия интерактивности в виртуальной среде,

процесс создания сценариев для симуляции значительно усложняется. При этом каждый новый сценарий может потребовать изменений в уже существующих моделях и создание новых моделей для новых случаев и процессов.

Подобный недостаток не позволяет применять его в VR симуляциях, где подразумевается высокая степень интерактивности с виртуальной средой. Поэтому предлагается альтернативный способ.

Второй способ заключается в использовании упрощенных моделей, которые должны соответствовать условиям адекватности и возможности использования расчетных схем или формул, вычисление по которым займёт времени не больше, чем период отрисовки. Сложность второго способа заключается в одновременном соблюдении двух обозначенных условий. Чем проще модель, тем меньше учитывается условий среды, что уменьшает ее адекватность. В то же время наложение дополнительных условий и факторов приводит к усложнению расчетной схемы и, как следствие, к увеличению времени, необходимого для получения результатов расчёта и отображения моделируемого объекта или процесса.

2. Математическая модель распространения пламени по поверхности жидкости

В качестве примера, рассмотрим симуляцию, в которой можно наблюдать процесс горения жидкого вещества. Данная симуляция является частью виртуальной среды для проведения лабораторных занятий по инженерной дисциплине «Теория горения и взрывов».

В теории горения и взрывов существует два способа описать процесс распространения пламени. Первый предполагает описания данного процесса с помощью химических реакций. Этот подход приведет к необходимости использовать уравнения химической кинетики и решать жесткие системы однородных дифференциальных уравнений. Методы их решения в большинстве случаев не будут удовлетворять условию ограничения расчетов по времени. Поэтому предлагается использовать термодинамический подход для описания процесса распространения пламени.

Распространение пламени по поверхности жидкости протекает в результате теплопередачи излучением, конвекцией и молекулярной теплопроводностью от зоны пламени к поверхности зеркала жидкости [3].

Основную роль в этом играет теплоизлучение от пламени. Пламя, обладая высокой температурой (более 1000°C), способно, как известно, излучать тепловую энергию. Согласно закону Стефана-Больцмана (2), интенсивность лучистого теплового потока, отдаваемого нагретым телом, определяется соотношением:

$$Q = \epsilon\sigma(T_s^4 - T_f^4), \quad (1)$$

где T_s — температура источника горения, T_f — температура жидкости, ϵ — степень черноты, σ — постоянная Стефана-Больцмана, Q — количество теплоты, излучаемое горячей жидкостью.

Излучаемое тепло расходуется на прогрев глубины (нижних слоёв) и передачу тепла ближайшему участку жидкости в слое (линейное распространение)[4]:

$$Q = r\rho W + rU(T - T_0), \quad (2)$$

где T — температура жидкости после передачи тепла, T_0 — температура жидкости до передачи тепла, r — удельная теплота испарения (кДж/кг), ρ — плотность жидкости,

W — линейная скорость распространения (скорость передачи тепла нижним слоям), U — массовая скорость выгорания (скорость сгорания вещества с единицы поверхности, она же скорость перемещения фронта пламени), Q — количество теплоты, излучаемое горящей жидкостью.

Согласно уравнениям (1) и (2) пламя на поверхности жидкости излучает тепло, которое расходуется на прогрев нижних слоев и той части поверхности, которая ещё не охвачена пламенем. Значит, для перемещения пламени на соседний не горящий участок зеркала достаточно, чтобы температура этого участка достигла определенного значения, а именно температуры самого пламени (источника горения). Тогда из уравнений (1) и (2) можно выразить скорость распространения пламени (массовую скорость):

$$U = \frac{\epsilon\sigma(T_s^4 - T_f^4) - r\rho W}{r(T_s - T_f)}, \quad (3)$$

Уравнение (3) представляет расчётную формулу, которая позволяет определить, как пламя будет перемещаться по поверхности жидкости.

3. Пример использования математической модели в виртуальной среде

В данной статье процесс распространения пламени применяется для симуляции лабораторной установки для замера скорости распространения пламени, схема которой продемонстрирована на рисунке ниже (рис. 1). В этой установке жидкость находится в длинном узком желобе, спроектированном так, чтобы жидкость не успевала испариться до конца замеров, а именно до того момента, когда пламя достигнет противоположного конца желоба.

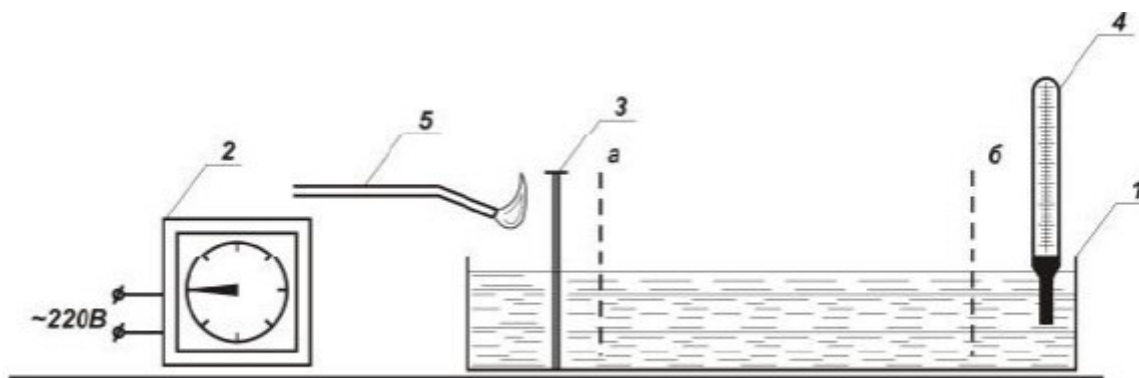


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 — желоб с горючей жидкостью; 2 — электросекундомер; 3 — заслонка; 4 — термометр; 5 — источник зажигания

В статье рассматривается установка, состоящая из самого желоба с жидкостью и заслонки, связанных непосредственно с моделируемым процессом распространения пламени по поверхности жидкости, в предположении, что в начальный момент времени часть жидкости, отделенная заслонкой, уже горит.

Для данной установки будем считать, что в желобе находится горючая жидкость без примесей. Как следствие, скорость прогрева глубины будет постоянна и одинакова по всему объёму жидкости. Более того, данная величина известна и зависит от

выбранного типа жидкости. Таким образом, в уравнении (3) неизвестной остаётся только искомая скорость распространения пламени по поверхности жидкости.

Зная скорость движения фронта пламени, мы можем вычислить положение границы фронта пламени. В свою очередь, зная положение границы, можно передать подсчитанное значение платформе, поддерживающей работу виртуальной среды, чтобы она отобразила актуальное состояние процесса.

В статье будет продемонстрирована иллюстрация работы прототипа установки, для симуляции которой будет применена описанная выше модель. От конечной реализации, прототип отличается только отсутствием текстур и эффектов, имитирующих само пламя. Для отображения фронта пламени, в прототипе предлагается выделять горящую часть жидкости оранжевым цветом.

На рисунках ниже (рис. 2 и рис. 3) продемонстрирована работа прототипа установки.

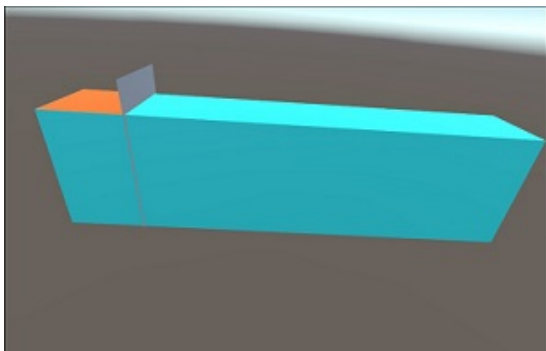


Рис. 2. Установка до начала замера

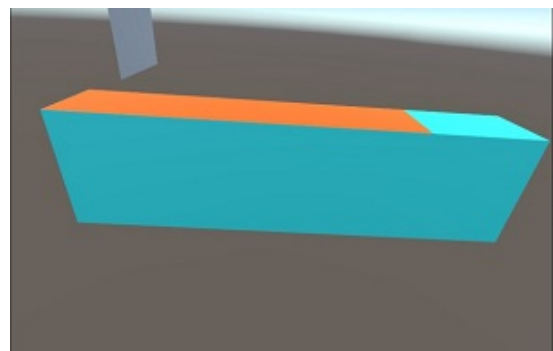


Рис. 3. Установка после начала замера

Начальным моментом времени для моделируемого процесса считается момент времени, когда заслонка оказывается выше границы горючей жидкости и воздуха. При запуске виртуальной среды, заслонка опущена и не даёт пламени распространиться дальше (рис. 2). Находящийся в виртуальной среде может поднять заслонку. Как только заслонка будет поднята над поверхностью жидкости, начнётся симуляция процесса распространения пламени.

В ходе симуляции, для отображения текущего состояния среды, включающего в себя состояние моделируемого процесса, происходит выполнение ряда задач. Сперва, выполняется расчёт скорости движения фронта пламени согласно выражению (3). Полученное значение используется для определения координат границы горящего участка поверхности. В нашем случае граница является прямой линией, поскольку эту форму она имела в начальный момент времени.

Как показано на рисунке выше (рис. 3), пламя движется до тех пор, пока не достигнет противоположной стороны желоба. На протяжении всей симуляции не было замечено замедлений в отображении визуальной составляющей. Это означает, что все вычисления были произведены за отведенный период отрисовки, т. е. условие на ограниченность по времени было выполнено.

Для оценки адекватности симуляции, было произведено сравнение с реальной установкой. Сравнение осуществлялась по двум критериям: соответствие видимых результатов (субъективная оценка правдоподобности) и значений, полученных с помощью замеров на реальной установке со значениями, вычисленных по формуле (3). Первый критерий был оценен позитивно – визуальная составляющая симуляции была

принята, как правдоподобная. Вторым критерий показал результаты с погрешностью третьего порядка, что считается достаточно хорошим результатом для применения модели в виртуальной симуляции.

Таким образом, был разработан рабочий прототип лабораторной установки, в основе симуляции которого лежит применение математической модели, удовлетворяющей условиям адекватности и ограниченности по времени. Сама же симуляция может быть дополнительно модифицирована для учёта дополнительных условий, которые могут возникать в результате взаимодействия пользователя виртуальной среды с самой установкой. Для этого достаточно выделить отдельные процессы, влияющий на основной процесс, и построить для них отдельные математические модели, удовлетворяющие условиям адекватности и ограниченности по времени.

На текущем этапе разработки решаются задачи по наложению текстур и эффектов. В ходе работы над эффектом огня пришлось столкнуться с нехваткой стандартных средств платформы Unity, с помощью которой разрабатывается виртуальная среда.

Стандартный подход к моделированию пламени в Unity предполагает использование системы частиц: пламя изображается в виде плотного потока небольших объектов. Использование встроенной системы частиц оказалось недостаточным. При попытке достичь максимальной реалистичности за счёт возможности вычислять интенсивность пламени в различных участках фронта пламени, была обнаружена проблема с нехваткой видеопамати на устройстве с NVIDIA GeForce RTX 3060 Ti с 8 GB видеопамати в качестве GPU.

Решение данной проблемы является текущей задачей разработки виртуальной среды и может быть решена альтернативным подходом к созданию визуальной составляющей огня или созданием собственной системы частиц.

Рассмотренный в рамках данной статьи пример даёт краткое представление о возможностях и проблемах применения методов математического моделирования в сфере технологий виртуальной и дополненной реальности для создания качественных симуляций.

Литература

1. Мочалов П.С. Технология разработки программных приложений 3D-виртуальных сред для моделирования технологических процессов и комплексов // Системы автоматизации в образовании, науке и производстве: Труды IX Всероссийской научно-практической конференции. 28-30 ноября 2013 г. Новокузнецк: Изд. центр СибГИУ, 2013. С. 125-129.
2. Мочалов П.С., Мочалов С.П. Технология создания интерактивных 3D – моделей производственных процессов и комплексов // Интеллектуальный потенциал XXI века: Ступени познания. 2012. № 13. С. 77-81.
3. Корольченко А.Я. Процессы горения и взрыва. М.: Пожнаука, 2007. 266 с.
4. Девисилов В.А., Дроздова Т.И., Тимофеева С.С. Теория горения и взрыва: практикум: Учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Форум, НИЦ ИНФРА-М, 2015. 384 с.

MSC 00A06

Application of mathematical modeling methods in VR/AR technology

R. V. Zhalnin, I. V. Igajkin

National Research Ogarev Mordovia State University

Abstract: The article discusses the features of using mathematical modeling methods to create virtual and augmented reality simulations. As an example, a simulation of a laboratory installation for determining the speed of flame propagation over the surface of a flammable liquid is demonstrated. The paper presents a mathematical model of liquid substance gorenje and demonstrates the propagation of the flame front on the surface of the liquid.

Keywords: virtual reality, environmental adequacy, combustion, flame front

References

1. P.S. Mochalov, Technology of development of software applications of 3D virtual environments for modeling technological processes and complexes, *Automation systems in education, science and production: Proceedings of the IX All-Russian Scientific and Practical Conference*, November 28-30, 2013, Novokuznetsk: SibGIU Publishing Center, 2013, P.125-129.
2. P.S. Mochalov, S.P. Mochalov, Technology for creating interactive 3D models production processes and complexes, *Intellectual potential of the XXI century: Stages of cognition*, 2012, No. 13, P. 77-81.
3. A.Ya. Korolchenko, Gorenje i explosion processes, M., Pozhnauka, 2007, 266 p.
4. V.A. Devisilov, T.I. Drozdova, S.S. Timofeeva, Gorenje i explosion theory: practicum: Textbook, 2nd ed., reprint and additional, Moscow, Forum, SIC INFRA-M, 2015, 384 p.

УДК 519.6

Применение метода LU-SGS для решения нестационарных задач газовой динамики с использованием неявных схем

Жалнин Р. В., Казакова И. С.

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва

Аннотация: В статье представлен обзор методов разработки вычислительного алгоритма для решения одномерной системы уравнений Эйлера газовой динамики. В основу алгоритма положена неявная схема типа Годунова, а также решатель LU-SGS и ограничитель наклонов minmod. В работе представлены результаты апробации алгоритма на серии тестовых одномерных задач, а именно – порядок точности реализованной схемы и профили газодинамических параметров. Также была продемонстрирована возможность применения решателя LU-SGS на двумерных задачах путём решения модельных тестов.

Ключевые слова: уравнения Эйлера газовой динамики, неявная схема Годунова, потоки Лакса–Фридрихса, ограничитель наклонов minmod, метод LU-SGS, задача Римана о распаде произвольного разрыва.

1. Математическая модель и разностная схема. Метод LU-SGS

Целью работы является создание устойчивого и экономичного численного алгоритма решения задач CFD.

Одна из основных задач газовой динамики – расчёт течения газа с определёнными параметрами в некоторой области. Для описания подобной задачи используется система уравнений Эйлера, которая в одномерном случае записывается следующим образом [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho E + p)u)}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$p = \rho \varepsilon (\gamma - 1). \quad (4)$$

Здесь ρ — плотность, u — скорость, p — давление, $E = \varepsilon + \frac{u^2}{2}$ — полная энергия, ε — внутренняя энергия, γ — показатель адиабаты. Формула (4) — уравнение состояния идеального газа, которым замыкается система (1)–(3).

Для решения системы (1)–(3) можно применить неявную разностную схему [2]:

$$\frac{U_m^{k+1} - U_m^k}{\Delta t} + \frac{F_{m+1/2}^{k+1} - F_{m-1/2}^{k+1}}{\Delta x} = 0, \quad (5)$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В выражении (6) представлены консервативные переменные вектора решения U и элементы вектора потоков $F(U)$. Дискретные потоки между ячейками могут быть вычислены различными способами. С.К. Годуновым было предложено использовать для вычисления потоков решение задачи о распаде произвольного разрыва [2]. Схемы, использующие подобный метод расчёта дискретных потоков, стали называться схемами Годунова; такой является, в том числе, и схема (5).

Для приближенного вычисления дискретных потоков в настоящей работе используется метод Лакса–Фридрихса:

$$F_{m+1/2}^k = \frac{1}{2}(F_m^k + F_{m+1}^k) + \frac{\lambda_{\max}}{2}(U_m^k - U_{m+1}^k), \quad (7)$$

где

$$\lambda_{\max} = \max \{|u_m| + c_m, |u_{m+1}| + c_{m+1}\}, \quad c_m = \sqrt{\frac{\gamma p_m}{\rho_m}}.$$

Поскольку в явной схеме Годунова имеется существенный недостаток — жёсткая зависимость временного шага от шага по сетке (обусловленная числом Куранта–Фридрихса–Леви), в текущей работе был реализован алгоритм с использованием неявной схемы (5). В этом случае, потоки Лакса–Фридрихса будут рассчитываться согласно соотношению:

$$F_{m+1/2}^{k+1} = F_{m+1/2}^k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial U} - \lambda_{\max} E \right) \Big|_{m+1} (U_{m+1}^{k+1} - U_{m+1}^k) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial U} + \lambda_{\max} E \right) \Big|_m (U_m^{k+1} - U_m^k), \quad (8)$$

E — единичная матрица.

С использованием преобразованного выражения (5) и переобозначений:

$$U_m^{k+1} - U_m^k = \Delta U_m, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial U} - \lambda_{\max} E \right) \Big|_{m+1} = A_{m+1}^-, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial U} + \lambda_{\max} E \right) \Big|_m = A_m^+$$

получим следующую систему сеточных уравнений:

$$-A_{m-1}^+ \Delta U_{m-1} + \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} E + A_m^+ - A_m^- \right) \Delta U_m + A_{m+1}^- \Delta U_{m+1} = F_{m-1/2}^k - F_{m+1/2}^k. \quad (9)$$

Пространственный порядок точности схемы (9) может быть повышен применением кусочно-линейных распределений функций внутри контрольного объёма с некоторыми ограничениями на коэффициенты соответствующих многочленов (рис. 1) [4].

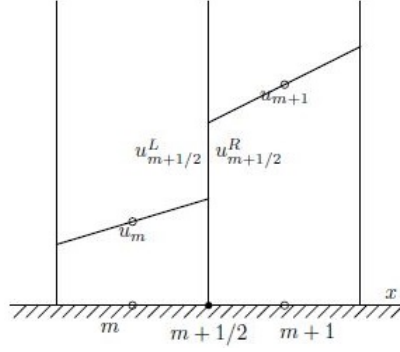


Рис. 1. Кусочно-линейное распределение функции.

В настоящей работе применён используемый ограничитель наклонов minmod , вычисляемый согласно формулам:

$$\begin{aligned} u_m &\leq u_m + \frac{1}{2}\alpha_m \leq u_{m+1} - \frac{1}{2}\alpha_{m+1} \leq u_{m+1}, \\ \alpha_m &= \text{minmod} \left(\frac{u_{m+1} - u_m}{\Delta x}, \frac{u_m - u_{m-1}}{\Delta x} \right), \\ \text{minmod}(a, b) &= \frac{1}{2} (\text{sign } a + \text{sign } b) \min(|a|, |b|). \end{aligned} \quad (10)$$

Полученные с помощью ограничителя наклонов minmod газодинамические параметры будем использовать для вычисления дискретных потоков на k -м шаге по времени.

При неявной временной дискретизации приходится решать систему разностных уравнений с разреженной матрицей. Прямые методы обращения достаточно больших матриц коэффициентов – вычислительно дорогие, поэтому достаточно широкое применение получил метод приближённой LU-факторизации (Lower-Upper SGS, LU-SGS) [4–6]. Преимущество применения последнего по сравнению с итерационными методами, такими как метод Гаусса-Зейделя (GS) и симметричный метод Гаусса-Зейделя (SGS), заключается в его неитерационном характере.

Более обстоятельного рассмотрения требует метод LU-SGS и особенности его применения [4, 5]. Сам метод приближённой LU-факторизации описывается следующим образом [5]. Систему (9) запишем в виде:

$$(D + L) D^{-1} (D + U) \Delta U = R + (L D^{-1} U) \Delta U. \quad (11)$$

Пренебрегая последним слагаемым правой части формулы (11) и полагая:

$$\frac{\partial F}{\partial U} \Delta U \approx \Delta F = F(U + \Delta U) - F(U), \quad (12)$$

СЛАУ можно решить методом LU-SGS за два шага:

$$\begin{aligned} (D + L) \Delta U^* &= R, \quad \Delta U_i^* = D^{-1} \left(R_i - \frac{1}{2} \sum_{j:j \in L(i)} (\Delta F_j^* - \lambda_{ij} \Delta U_j^*) s_{ij} \right), \\ (D + U) \Delta U &= D \Delta U^*, \quad \Delta U_i = \Delta U_i^* - D^{-1} \frac{1}{2} \sum_{j:j \in U(i)} (\Delta F_j - \lambda_{ij} \Delta U_j) s_{ij}. \end{aligned} \quad (13)$$

2. Одномерные задачи

Для проверки работоспособности алгоритма были выполнены расчёты на семи тестовых задачах из источника [7].

Ниже приведены таблицы с параметрами расчётных областей и начальными данными для тестовых задач (табл. 1–3).

Таблица 1. Названия тестов и параметры расчётных областей

№	Название	Расчётная область	Точка разрыва	Число ячеек
1	Sod problem	$-5 \leq x \leq 5$	$x_0 = 0$	100
2	Lax problem	$-5 \leq x \leq 5$	$x_0 = 0$	100
3	Supersonic shock tube	$0 \leq x \leq 1$	$x_0 = 0.5$	100
4	Mach 3 problem	$0 \leq x \leq 1$	$x_0 = 0.5$	100
5	Einfeldt problem	$0 \leq x \leq 1$	$x_0 = 0.5$	100
6	Shock entropy wave interaction	$-5 \leq x \leq 5$	$x_0 = -4$	200
7	Woodward-Colella blast waves	$0 \leq x \leq 1$		400

Таблица 2. Начальные данные для тестов 1–6

№	Параметры слева			Параметры справа			Расчётное время
	ρ	u	p	ρ	u	p	
1	1	0	1	0.125	0	0.1	2.0
2	0.445	0.698	3.528	0.5	0	0.571	1.3
3	1	0	1	0.02	0	0.02	0.15
4	3.857	0.920	10.333	1	3.55	1	0.09
5	1	-2	0.4	1	2	0.4	0.15
6	3.857143	2.629369	10.3333	$1 + 0.2 \sin(5x)$	0	1	1.8

Таблица 3. Начальные данные для теста 7

№ теста	$0 \leq x \leq 0.1$			$0.1 \leq x \leq 0.9$			$0.9 \leq x \leq 1$			Расчётное время
	ρ	u	p	ρ	u	p	ρ	u	p	
7	1	0	10^3	1	0	10^{-2}	1	0	10^2	0.038

На рис. 2–9 представлены профили плотности и внутренней энергии для выбранных тестовых задач. Тонкой сплошной линией на рисунках обозначены распределения газодинамических параметров, принимаемых за точные решения — они бы-

ли получены с помощью явной схемы Годунова на мелкой сетке из 10000 ячеек. Маркерами-точками обозначаем распределения параметров, полученные по неявной схеме Годунова, пунктиром – распределения, полученные неявной схемой с ограничителем minmod. Распределения, полученные по неявным схемам, на графиках отображаются на сетке из N ячеек, где N взято из табл. 1.

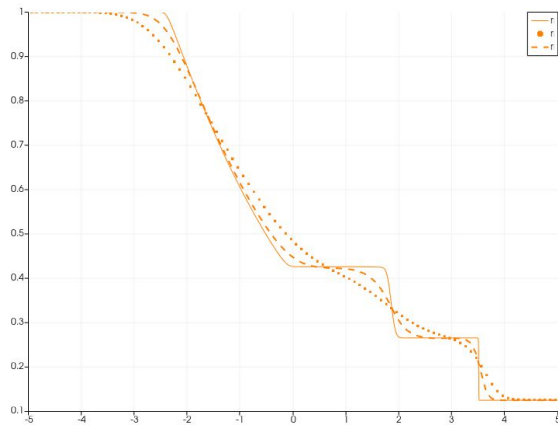


Рис. 2. Профиль плотности в задаче №1.

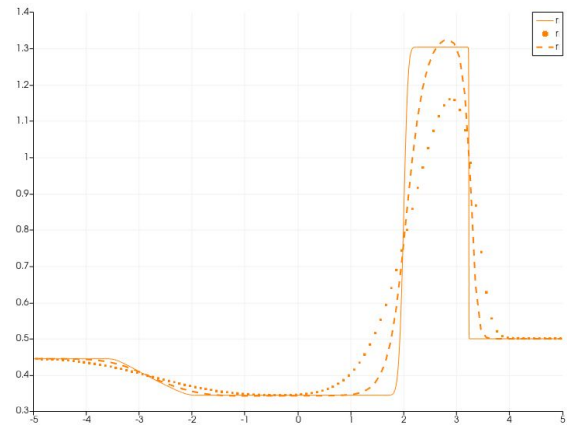


Рис. 3. Профиль плотности в задаче №2.

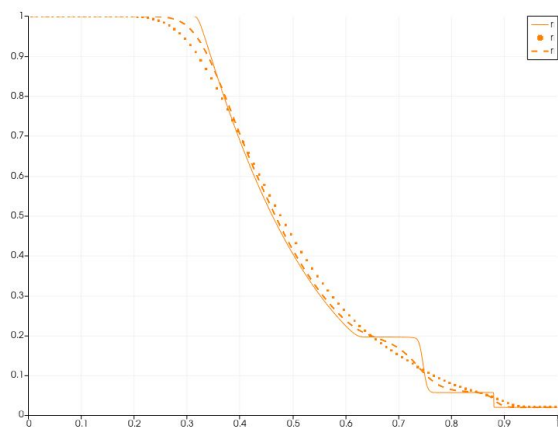


Рис. 4. Профиль плотности в задаче №3.

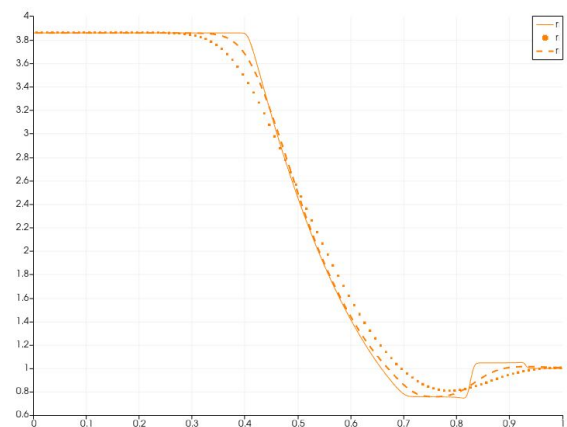


Рис. 5. Профиль плотности в задаче №4.

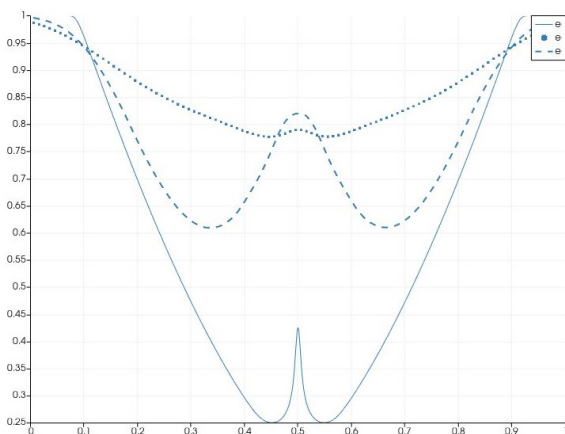


Рис. 6. Профиль внутренней энергии в задаче №5.

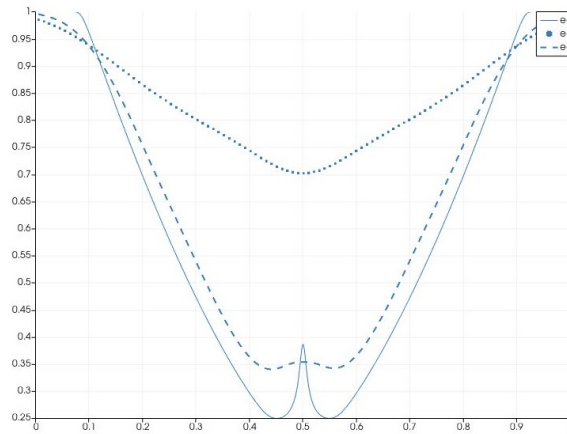


Рис. 7. Профиль внутренней энергии в задаче №5 (с дополнительной ячейкой).

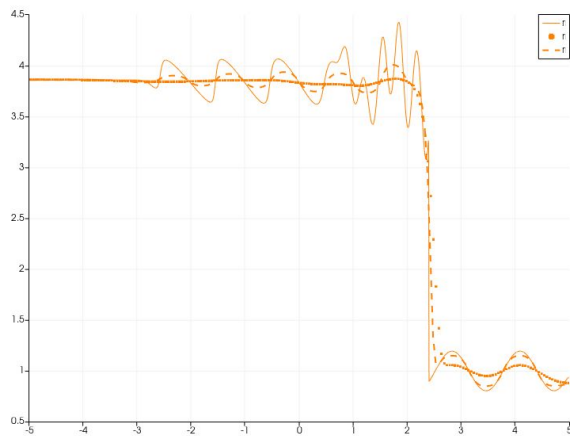


Рис. 8. Профиль плотности в задаче №6.

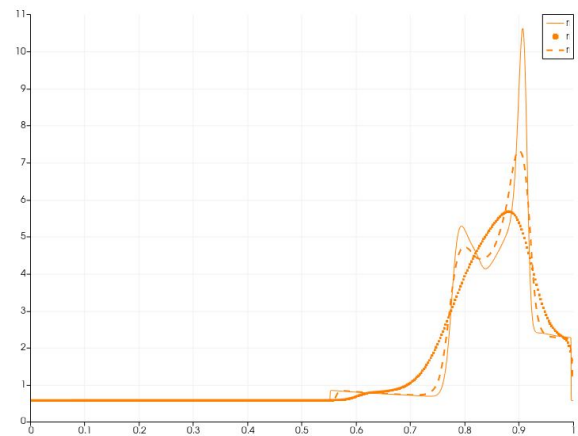


Рис. 9. Профиль плотности в задаче №7.

В табл. 4-5 приведены порядки точности метода без применения ограничителя minmod и с его применением соответственно.

Таблица 4. Порядки точности метода без применения minmod для задач №1—7

Норма	N	№ теста							
		1	2	3	4	5	5 (с доп. ячейкой)	6	7
$\ \cdot\ _\infty$		0.65	1.9	0.28	0.29	0.24	0.38	0.91	0.55
$\ \cdot\ _{L_1}$	100								
	200	0.65	0.67	0.53	0.66	0.59	0.62	0.39	-0.3
	400	0.73	0.65	0.6	0.67	0.61	0.66	-1.25	-0.003

Таблица 5. Порядки точности метода с применением minmod для задач №1—7

Норма	N	№ теста							
		1	2	3	4	5	5 (с доп. ячейкой)	6	7
$\ \cdot\ _\infty$		0.17	2.23	0.29	0.72	0.35	0.44	0.64	1.6
$\ \cdot\ _{L_1}$	100								
	200	1.06	1.02	0.88	0.88	0.74	0.82	0.65	-1.7
	400	1.3	1	1.06	0.74	0.81	0.88	-2.29	-0.09

Дополнительных разъяснений требует момент введения дополнительной ячейки в пятой тестовой задаче (рис. 7). При проведении расчётов на заявленном в таблице 1 количестве ячеек наблюдался нефизический всплеск внутренней энергии. Поэтому в сетку была добавлена дополнительная ячейка, и в центральной ячейке скорость была аппроксимирована нулём [7]. Видно, что нефизический всплеск энергии в середине расчётной области значительно уменьшился (особенно при применении ограничителя

наклонов $\minmod$).

Шестой тест предназначен для того, чтобы продемонстрировать сложность отображения мелкомасштабного плавного течения и ударных волн. Как видно из рис. 8, реализованный алгоритм достаточно хорошо показал себя на грубой сетке из 200 ячеек, однако, в силу сложной структуры течения, порядок точности в некоторых ситуациях для этой задачи получился отрицательным.

Особенность седьмой задачи (рис. 9) состоит в том, что решение сложно получить на эйлеровой сетке из-за сильных ударных волн и многочисленных взаимодействий с волнами разрежения и контактными разрывами [8]. Таким образом, даже использование мелкой сетки из 10000 ячеек для точного решения не помогло получить картину точного распределения параметров [7], что могло привести к отрицательному порядку точности метода при расчёте последней задачи.

Подводя промежуточные итоги, заметим, что в большинстве тестов порядки точности в норме $\|\cdot\|_{L_1}$ выше, чем в норме $\|\cdot\|_{\infty}$. Применение ограничителя $\minmod$ во всех тестах увеличивает порядок точности используемой неявной схемы и улучшает качество решения, но при этом не приводит к существенному увеличению времени работы алгоритма.

3. Двумерные задачи

Неявную схему Годунова с решателем LU-SGS можно распространить на двумерные задачи газовой динамики. В рамках данной работы были решены три тестовые задачи из источника [9] с использованием модифицированного программного кода [10]. Начальные данные приведены в табл. 6.

Таблица 6. Начальные данные для двумерных тестов

Тест №		Лево				Право				T
		p	ρ	u	v	p	ρ	u	v	
6	Верх	1.0	2.0	0.75	0.5	1.0	1.0	0.75	-0.5	0.3
	Низ	1.0	1.0	-0.75	0.5	1.0	3.0	-0.75	-0.5	
15	Верх	0.4	0.5197	-0.6259	-0.3	1.0	1.0	0.1	-0.3	0.2
	Низ	0.4	0.8	0.1	-0.3	0.4	0.5313	0.1	0.4276	
17	Верх	1.0	2.0	0.0	-0.3	1.0	1.0	0.0	-0.4	0.3
	Низ	0.4	1.0625	0.0	0.2145	0.4	0.5197	0.0	-1.1259	

В табл. 6 приняты следующие обозначения: p — давление, ρ — плотность, u и v — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости, соответственно, T — расчётное время. Область, на которой были решены тесты, представляет собой квадрат $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ с разными начальными условиями в каждом квадранте.

Начальные данные выбраны таким образом, чтобы решение одномерной задачи Римана между квадрантами содержало только одну волну: ударную волну, волну разрежения или контактный разрыв. Следуя предложенной в источнике [9] нотации,

ударную волну обозначим как S , волну разрежения — R , контактный разрыв — J . Если начать с нижнего левого квадранта и двигаться по часовой стрелке, то конфигурация трёх задач может быть описана следующим образом: Case 6: J, J, J, J ; Case 15: J, R, S, J ; Case 17: S, J, R, J .

Код из [10] был модифицирован под указанные задачи, также была добавлена реализация метода LU-SGS. На рисунках ниже приведены профили давления для всех трёх тестов.

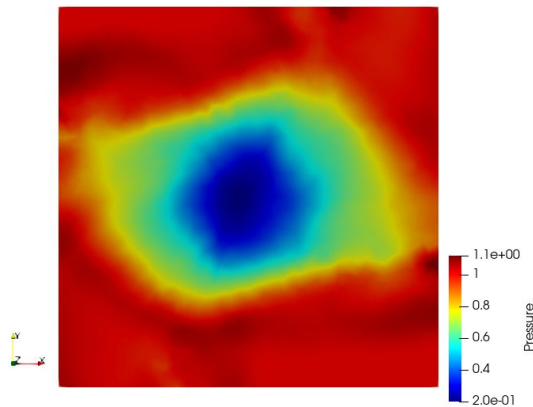


Рис. 10. Профиль давления в Case 6.

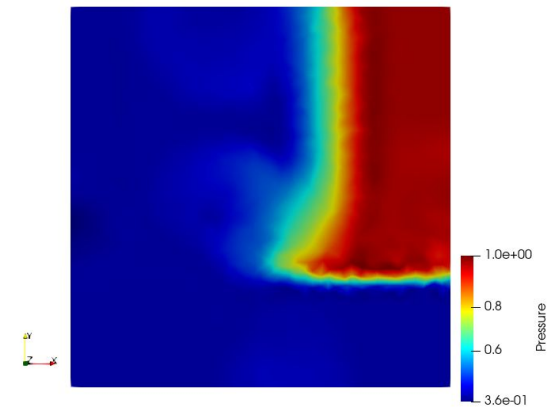


Рис. 11. Профиль давления в Case 15.

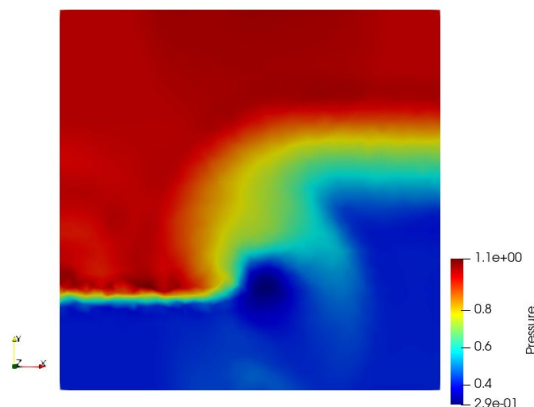


Рис. 12. Профиль давления в Case 17.

Как мы видим, решатель LU-SGS продемонстрировал на неявной схеме Годунова полную работоспособность, результаты вычислений хорошо соотносятся с оригинальными [9].

4. Заключение

Таким образом, в работе реализован численный алгоритм решения системы уравнений Эйлера газовой динамики на основе неявной схемы Годунова с решателем LU-SGS, выполнены одномерные тестовые расчёты и получены численные оценки точности метода. Также продемонстрирована возможность расширения области применения алгоритма на двумерные задачи. В целом, алгоритм показал свою пригодность для решения реальных задач гидро- и газодинамики.

Литература

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992. 424 с.
2. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47, № 3. С. 271–306.
3. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. Berlin: Springer, 2009. 748 p.
4. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Козелков А.С., Тетерина И.В. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2015. 416 с.
5. Sharov D., Luo H., Baum J.D., Löhner R. Implementation of unstructured grid GMRES+LU-SGS method on shared-memory, cache-based parallel computers // AIAA Paper. 2000. No. 2000-0927. 17 p.
6. Борисов В.Е., Луцкий А.Е. Моделирование перехода между регулярным и маховским отражением ударных волн с помощью неявной схемы на основе методов LU-SGS и BiCGStab // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 68. 36 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-68>.
7. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Использование усреднений для сглаживания решений в разрывном методе Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 89. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-89>.
8. The Department of Astrophysical Sciences of Princeton University [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://web.astro.princeton.edu>.
9. Chikitkin A.V., Rogov B.V., Utyuzhnikov S.V. High-order accurate monotone compact running scheme for multidimensional hyperbolic equations // Applied Numerical Mathematics. 2014. Vol. 93. P. 150–163.
10. Жалнин Р.В. Современные вычислительные методы прикладной математики. Саранск: Изд-во СВМО, 2017. 48 с.

MSC 76M12

Application of the LU-SGS method for solving unsteady gas dynamics problems using implicit schemes

R. V. Zhalnin, I. S. Kazakova

National Research Ogarev Mordovia State University

Abstract: The article presents an overview of methods for developing the computational algorithm for solving one-dimensional Euler system of gas dynamics equations. Bases of the algorithm are implicit Godunov scheme, LU-SGS solver and minmod limiter. The article presents results of approbation of the algorithm on serie of one-dimensional problems, namely order of accuracy of the realized scheme and profiles of gas dynamics parameters. It was also demonstrated probability of application of the LU-SGS solver on two-dimensional problems by solving model tests.

Keywords: Euler equations of gas dynamics, implicit Godunov scheme, Lax-Friedrichs fluxes, minmod limiter, LU-SGS method, Riemann problem

References

1. A.A. Samarskiy, Yu.P. Popov, Difference methods for solving problems of gas dynamics, M, Nauka, 1992, 424 p. (In Russian).
2. S.K. Godunov, A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics, *Matematicheskii Sbornik*, 1959, Vol. 47, No. 3, P. 271–306. (In Russian).
3. E.F. Toro, Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction, Berlin, Springer, 2009, 748 p.
4. K.N. Volkov, Yu.N. Deryugin, V.N. Emel'yanov, A.S. Kozelkov, I.V. Teterina, Difference schemes in problems of gas dynamics on unstructured grids, M., Fizmatlit, 2015, 416 p. (In Russian).
5. D. Sharov, H. Luo, J.D. Baum, R. Löhner, Implementation of unstructured grid GMRES+LU-SGS method on shared-memory, cache-based parallel computers, *AIAA Paper*, 2000, No. 2000-0927, 17 p.
6. V.E. Borisov, A.E. Lusky, Simulation of transition between regular and Mach shock waves reflections by an implicit scheme based on the LU-SGS and BiCGStab methods, *KIAM Preprint*, 2016, No. 68, 36 p. (In Russian). URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-68>.
7. M.E. Ladonkina, O.A. Neklyudova, V.F. Tishkin, Application of averaging to smooth the solution in DG method, *KIAM Preprint*, 2017, No. 89, 32 p. (In Russian). URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-89>.
8. The Department of Astrophysical Sciences of Princeton University [Electronic resource]. URL: <https://web.astro.princeton.edu>.

9. A.V. Chikitkin, B.V. Rogov, S.V. Utyuzhnikov, High-order accurate monotone compact running scheme for multidimensional hyperbolic equations, *Applied Numerical Mathematics*, 2014, Vol. 93, P. 150–163.
10. R.V. Zhalnin, Modern numerical methods of applied mathematics, Saransk, Izd-vo SVMO, 2017, 48 p. (In Russian).

УДК 517.938.5

Классификация надстроек над декартовыми произведениями меняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности*

Зинина С. Х.

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва

Аннотация: В работе вводится класс декартовых произведений меняющих ориентацию грубых преобразований окружности, изучается их динамика. Подробно описывается структура множества периодических точек, приводится теорема о топологической сопряженности диффеоморфизмов рассматриваемого класса. В теории гладких динамических систем весьма полезной является конструкция, позволяющая по данному диффеоморфизму f многообразия построить поток на многообразии с размерностью, на единицу большей, этот поток носит название надстройки над f . Вводится понятие надстройки над диффеоморфизмами рассматриваемого класса, описываются всевозможные виды и число орбит надстройки; доказывается теорема о топологии многообразия, на котором задана надстройка. Для топологической эквивалентности надстроек над диффеоморфизмами нашего класса необходима и достаточна топологическая сопряженность диффеоморфизмов, над которыми берутся надстройки.

Ключевые слова: диффеоморфизмы окружности, меняющие ориентацию диффеоморфизмы окружности, декартово произведение меняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности, надстройка над диффеоморфизмом, топологическая классификация диффеоморфизмов

В 1937 г. А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин в работе [1] ввели понятие грубой системы дифференциальных уравнений на плоскости, которая имеет конечное число состояний равновесия и предельных циклов, причем все они являются гиперболическими и не существует траекторий, идущих из седла в седло. В 1939 г. А. Г. Майером [2] было введено понятие грубости для динамических систем с дискретным временем на окружности, в рамках доказательства грубости и типичности диффеоморфизмов Морса-Смейла на окружности были изучены грубые преобразования окружности, описана их динамика и получена топологическая классификация. В частности, им были рассмотрены меняющие ориентацию преобразования окружности и доказано, что они имеют четное число периодических точек, половина из которых является стоковыми, половина – источниковыми, при этом в точности две точки являются неподвижными, а все остальные имеют период 2. Класс топологической сопряженности такого диффеоморфизма полностью определяется числом периодических точек и типом неподвижных точек.

Из работы [3] известно, что декартовы произведения меняющих ориентацию грубых преобразований окружностей топологически сопряжены тогда и только тогда, когда сопряжены диффеоморфизмы на каждой компоненте декартового произведения. В работе [4] получена полная топологическая классификация n -мерных декарто-

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90069 и фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» проект № 19-7-1-15-1.

вых произведений грубых преобразований окружности. Все отображения такого типа заданы на n -мерном торе. Установлено, что необходимым и достаточным условием сопряженности таких гомеоморфизмов является покомпонентная сопряженность. Заметим, что этот результат принципиально отличается от результата, полученного в работе [7], где рассматривались декартовы произведения рациональных поворотов, для которых необходимым и достаточным условием топологической сопряженности является период периодических орбит.

В теории гладких динамических систем полезной является конструкция, позволяющая по данному диффеоморфизму f многообразия построить поток на многообразии с размерностью на единицу большей, этот поток носит название надстройки над f . В работе [5] рассмотрены надстройки над диффеоморфизмами Морса-Смейла с тремя периодическими орбитами, которые, в свою очередь, являются потоками Морса-Смейла без неподвижных точек с тремя периодическими траекториями.

Несложно показать, что надстройки над топологически сопряженными диффеоморфизмами являются топологически эквивалентными потоками. Обратное в общем случае неверно. Из работы [6] следует, что существуют эквивалентные потоки, являющиеся надстройками над топологически несопряженными грубыми сохраняющими ориентацию диффеоморфизмами. В то же время, надстройки над меняющими ориентацию диффеоморфизмами окружностей эквивалентны тогда и только тогда, когда топологически сопряжены диффеоморфизмы окружностей.

Рассмотрим класс диффеоморфизмов двумерного тора следующего вида:

$$f_{q_1, \nu_1, q_2, \nu_2} = f_{q_1, \nu_1} \times f_{q_2, \nu_2} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2.$$

Предложение 1. *Для любого диффеоморфизма $f_{q_1, \nu_1, q_2, \nu_2}$ множество $Per(f_{q_1, \nu_1, q_2, \nu_2})$ состоит из $4q_1q_2$ периодических точек, из которых $2q_1q_2$ седловых, q_1q_2 стоковых и q_1q_2 источников. Четыре точки из $4q_1q_2$ являются неподвижными, а остальные $4q_1q_2 - 4$ точки имеют период 2. При этом:*

- 1) *если $\nu_1 + \nu_2 = -2$, то все 4 неподвижные точки являются источниками;*
- 2) *если $\nu_1 + \nu_2 = -1$, то две неподвижные точки являются источниками, две – седловыми;*
- 3) *если $\nu_1 = \nu_2 = 0$, то одна неподвижная точка является источниковой, одна – стоковой и две – седловыми;*
- 4) *если $\nu_1\nu_2 = -1$, то все неподвижные точки являются седловыми;*
- 5) *если $\nu_1 + \nu_2 = 1$, то две неподвижные точки являются стоковыми, две – седловыми;*
- 6) *если $\nu_1 + \nu_2 = 2$, то все 4 неподвижные точки являются стоковыми.*

Верно следующее предложение.

Предложение 2 (теорема 1.1 из [3]). *Два диффеоморфизма $f_{q_1, \nu_1, q_2, \nu_2}$ и $f_{q'_1, \nu'_1, q'_2, \nu'_2}$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда либо $q_1 = q'_1$, $q_2 = q'_2$, $\nu_1 = \nu'_1$, $\nu_2 = \nu'_2$, либо $q_1 = q'_2$, $q_2 = q'_1$, $\nu_1 = \nu'_2$, $\nu_2 = \nu'_1$.*

Пусть дан диффеоморфизм $\phi : M^n \rightarrow M^n$ и ξ^t — поток на многообразии $M^n \times \mathbb{R}$, порожденный векторным полем, состоящим из единичных векторов, параллельных $\mathbb{R}$ и направленных в $+\infty$ такой, что $\xi^t(x, r) = (x, r + t)$. Определим диффеоморфизм $g : M^n \times \mathbb{R} \rightarrow M^n \times \mathbb{R}$ формулой $g(x, r) = (\phi(x), r - 1)$. Положим $G = \{g^k, k \in \mathbb{Z}\}$ и $M_\phi = (M^n \times \mathbb{R})/G$. Обозначим через $p_\phi : M^n \times \mathbb{R} \rightarrow M_\phi$ естественную проекцию и через ϕ^t поток на многообразии M_ϕ , заданный формулой $\phi^t(x) = p_\phi(\xi^t(p_\phi^{-1}(x)))$. Поток ϕ^t называется *надстройкой над диффеоморфизмом ϕ* .

Пусть $\phi = f_{q_1, \nu_1, q_2, \nu_2} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ и $\phi' = f_{q'_1, \nu'_1, q'_2, \nu'_2} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ диффеоморфизмы торов и $\phi^t : M_\phi \rightarrow M_\phi$, $\phi'^t : M_{\phi'} \rightarrow M_{\phi'}$ – надстройки над данными диффеоморфизмами.

Для потоков ϕ^t и ϕ'^t верна следующая теорема.

Теорема 1. *Надстройки ϕ^t и ϕ'^t топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда топологически сопряжены диффеоморфизмы ϕ и ϕ' .*

Другими словами, надстройки над декартовыми произведениями меняющих ориентацию грубых преобразований окружностей топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда сопряжены соответствующие диффеоморфизмы торов.

Кроме того, несущее многообразие рассматриваемых потоков гомеоморфно замкнутому 3-многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]/\varphi$, где $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – алгебраический автоморфизм тора, заданный матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $(x, 1) \sim (\varphi(x), 0)$.

Литература

1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // Доклады АН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247–250.
2. Майер А.Г. Грубое преобразование окружности в окружность // Ученые записки Горьк. гос. ун-та. 1939. Т. 12. С. 215–229.
3. Гуревич Е.Я., Зинина С.Х. О топологической классификации градиентно-подобных систем на поверхностях, являющихся локальными прямыми произведениями // Журнал Средневолжского математического общества. 2015. Т. 17, № 1. С. 37–47.
4. Голикова И.В., Зинина С.Х. Топологическая сопряженность n -кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности // Известия Высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 6. С. 851–862. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-6-851-862>
5. Шубин Д.Д. Топология несущих многообразий несингулярных потоков с тремя нескрученными орбитами // Известия Высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, вып. 6. С. 863–868. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-6-863-868>
6. Голикова И.В., Починка О.В. Надстройки над грубыми преобразованиями окружности // Огарёв-Online. 2020. № 13. С. 1–11.
7. Куренков Е.Д., Рязанова К.А. On periodic translations on torus // Динамические системы. 2017. Т. 7(35), № 2. С. 113–118.

MSC 37D05, 37D15

Classification of suspensions over Cartesian products of orientation-changing diffeomorphisms of the circle

S. Kh. Zinina

National Research Mordovia State University

Abstract: The paper introduces a class of Cartesian products of orientation-changing rough transformations of a circle, and studies their dynamics. The structure of the set of periodic points is described in detail, and a theorem on the topological conjugacy of diffeomorphisms of the class under consideration is given. In the theory of smooth dynamical systems, a construction is very useful that allows, according to a given diffeomorphism of a f manifold, to construct a flow on a manifold with a dimension one greater, this flow is called a superstructure over f . The concept of a superstructure over diffeomorphisms of the class under consideration is introduced, various types and the number of orbits of the superstructure are described; a theorem on the topology of the manifold on which the superstructure is given is proved. For the topological equivalence of the superstructures over the diffeomorphisms of our class, the topological conjugacy of the diffeomorphisms over which the superstructures are taken is necessary and sufficient.

Keywords: diffeomorphisms of a circle, orientation-changing diffeomorphisms of a circle, Cartesian product of orientation-changing diffeomorphisms of a circle, superstructure over a diffeomorphism, topological classification of diffeomorphisms

References

1. A.A. Andronov, L.S. Pontryagin, Rough systems, *Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1937, Vol. 14, No. 5, P. 247–250.
2. A.G. Mayer, Rough transformation of a circle into a circle, *Scientific notes of Gorky State University*, 1939, Vol. 12, P. 215–229.
3. E.Ya. Gurevich, S.Kh. Zinina, On the topological classification of gradient-like systems on surfaces that are local direct products, *Middle Volga Mathematical Society Journal*, 2015, Vol. 17, no. 1, P. 37–47.
4. I.V. Golikova, S.Kh. Zinina, Topological conjugacy of n -multiple Cartesian products of rough circle transformations, *News of Higher educational institutions. Applied nonlinear dynamics*, 2021, Vol. 29, No. 6, P. 851–862. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-6-851-862>
5. D.D. Shubin, Topology of bearing manifolds of nonsingular flows with three non-twisted orbits, *Izvestia of Higher Educational Institutions. Applied nonlinear dynamics*, 2021, Vol. 29, no. 6, P. 863–868. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-6-863-868>
6. I.V. Golikova, O.V. Pochinka, Superstructures over rough circle transformations, *Ogarev-Online*, 2020, No. 13, P. 1–11.
7. E.D. Kurenkov, K.A. Ryazanova, On periodic translations on torus, *Dynamical systems*, 2017, Vol. 7(35), No. 2, P. 113–118.

УДК 004.032.26

Особенности разработанной системы защиты информации с применением биометрических технологий

Исмагилова А. С., Лушников Н. Д.

Башкирский государственный университет

Аннотация: В статье рассмотрено применение метода синтеза параметров сверточной нейронной сети, представленной в виде уникальных идентификаторов пользователя персонального компьютера. Для полноценной защиты информационных ресурсов авторами реализовано обучение тренировочной модели с помощью категориальной кросс-энтропии. Основной целью исследования является изучение новых аспектов математического моделирования системы защиты информации. Задача данного исследования – программная реализация математической модели многофакторной аутентификации с применением биометрических технологий, необходимая для совершенствования комплексной системы защиты информации.

Ключевые слова: математическая модель, система защиты информации, учетная запись, пользователь, безопасность, искусственный интеллект, идентификация, биометрия.

1. Разработка математической модели системы защиты информации

Компании тратят большие суммы денег на кибербезопасность, часто пренебрегая физической защитой. Такие инвестиции не гарантируют абсолютную защиту от несанкционированного доступа. Для оптимизации системы защиты информации и, соответственно, решения представленной проблемы, авторами было принято решение разработать программный комплекс многофакторной аутентификации с применением биометрических технологий.

Ранее использовались отдельные математические алгоритмы, которые на выходе показывали наименьшую точность распознавания образцов базы данных. Такая база данных обладает наименьшим количеством образцов.

В основе программного комплекса реализованы математические модули фотоидентификации, видеоидентификации, аудиоидентификации, а также система шифрования входных биометрических данных пользователя с использованием таких математических методов, как экспоненциальная функция и геометрическая прогрессия [1].

Первым фактором аутентификации пользователя является фотоидентификация, в основе которого заложено формирование массива данных лица пользователя, состоящего из 128 точек.

В целевой папке сохранены файлы изображения пользователя учетной записи. После запуска программного комплекса система видеонаблюдения в течение 5-7 секунд создаст снимок изображения и автоматически сохранит его в целевой папке для дальнейшей сверки. После всех выполненных действий производится расчет евкли-

дова расстояния по исходным данным. В библиотеке `dlib` рекомендуется использовать граничное значение евклидова расстояния между дескрипторами лиц, равное 0.6 [2].

Далее производится автоматический запуск математического модуля видеоидентификации, в котором необходимо отличить настоящего пользователя от объекта, олицетворяющего его (фото, видео). Точность обработки данных – 99.4%.

Авторам удалось создать и реализовать многопоточный программный комплекс для одновременного воспроизведения нескольких математических модулей.

Стоит обратить внимание на модуль аудиоидентификации, примененный впервые в области защиты информации. Данное решение дополнено считыванием аудиобразцов целевой папки с помощью евклидова расстояния по 12 характеристикам голоса. Сохраненные в целевой папке аудиофайлы автоматически обрабатываются. Результат обработки данных также представлен в виде двух изображений показателей голоса по каждому параметру мощности [3].

Параметры аудиоидентификации вычисляются по формуле (1):

$$f_n = f_0 \cdot 2^{n/12},$$

где f_n – частота голосового фрагмента, которая удалена от тона на n полутонов, f_0 – частота голосового фрагмента, которая используется в качестве стандартизированных данных, n – количество полутонов.

В результате реализации программного комплекса владельцу учетной записи будет предоставлен доступ. Другому пользователю, который осуществил запуск операционной системы, в доступе будет отказано при несовпадении всех биометрических показателей. При несоответствии одного биометрического параметра пользователю системы будет предоставлена возможность дважды ввести логин и пароль с использованием голосового помощника (рис 1). Данный инструмент разработан с выводом результатов во вкладку браузера (тестирование поиска информации) [4].

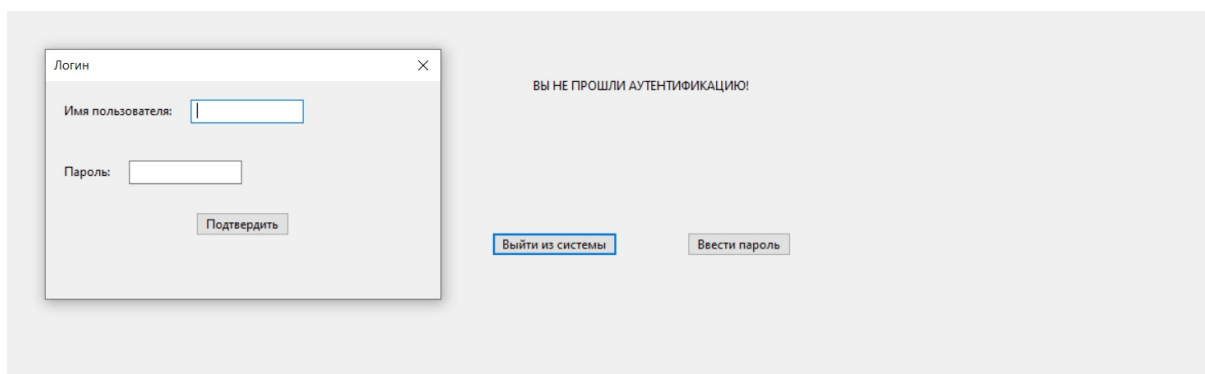


Рис. 1. Форма прохождения аутентификации с помощью голосового помощника.

Главным достоинством математической модели является высокая точность обработки входных данных и синхронизированная работа программных модулей. В основе софта заложен сохраненный файл весов обучающей нейронной сети [5].

Недостатком математической модели является время обработки данных программного модуля распознавания пользователя по голосу. Это обусловлено качеством и корректностью работы программы во время представления голосового об-

разца в виде массива вещественных чисел. Конфигурацию данного параметра пользователь может выбрать самостоятельно [6].

2. Особенности системы защиты информации биометрических данных пользователя

Данный программный комплекс направлен на предоставление максимального уровня защищенности пользователя учетной записи. В связи с этим возникает не менее актуальная проблема: хранение и доступность биометрических данных пользователя.

В настоящее время основными задачами криптографии являются обеспечение конфиденциальности, целостности, аутентификации, невозможности отказа, неотслеживаемости. В отличие от организационных и других способов защиты информации, под криптографическими понимаются такие, которые используют математические методы преобразования защищаемой информации. Криптография с открытым ключом значительно расширила класс задач, решаемых с помощью криптографических методов [7]. В результате появилась потребность как в интерактивных, многофазовых обменах данными, так и в протоколе аутентификации, который помогает обеспечить контроля доступа к данным. Протоколы аутентификации, построенные на основе протоколов с нулевым разглашением знания, используют два ключа (секретный и открытый). Когда говорится о том, что протокол аутентификации построен на основе протокола с нулевым разглашением секрета, то имеется в виду, что в ходе протокола не происходит никакой утечки данных. Специальный набор символов в шифровании предназначен для обеспечения целостности и аутентификации источника данных [8].

Зашифрованные данные могут подвергаться как целенаправленным искажениям злоумышленников, так и искажениям, причиной которых может являться низкий уровень криптостойкости. Искажения могут привести к потере части или даже всех данных, так как расшифрование искаженных зашифрованных данных может привести к непредсказуемым результатам. В данном программном комплексе рассмотрены, изучены и применены шифры, которые не распространяют искажения при расшифровании [9].

Аутентификация пользователя может быть выполнена следующим образом:

1. Запрос на ввод идентификатора со стороны системы защиты.
2. Ввод пользователем своего идентификатора (имени).
3. Запрос на ввод пароля со стороны системы защиты.
4. Ввод пользователем пароля *password*.
5. Вычисление системой защиты значения односторонней функции y , соответствующей значению аргумента $x = password$.
6. Сравнение системой защиты значения $f(password)$ со значением образа (s) пароля, соответствующего пользователю с идентификатором имени.

Если $f(password) = s$, то система защиты предоставляет пользователю права доступа (полномочия), соответствующие идентификатору (bvtb). В противном в журнале событий операционной системы регистрируется событие попытки несанкционированного доступа и персональное устройство автоматически выключается. Зная образ s , вычислительно невозможно определить пароль *password*. Если в системе защиты предусмотрены механизмы противодействия перехвату пароля с помощью программных или аппаратных закладок, а также через побочные электромагнитные

излучения и наводки (ПЭМИН), акустический и оптический канал, то данный способ аутентификации пользователей обеспечивает высокую надежность защиты от несанкционированного доступа [10].

Для предоставления доступа ограниченному кругу лиц к целевой папке, содержащее файлов необходимо зашифровать. Шифр должен обладать соответствующим уровнем криптостойкости.

Биометрические данные можно представить следующим образом (2):

$$y_i = x_i + d \pmod{n}, \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

где y_i – зашифрованные данные, x_i – изначально представленные биометрические данные, n – количество произведенных итераций, i – порядковый номер.

Тогда процесс расшифрования будет реализован с помощью (3):

$$x_i = y_i + n - d \pmod{n}, \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

где x_i – изначально представленные биометрические данные, y_i – зашифрованные данные, n – количество произведенных итераций, i – порядковый номер.

Для того, чтобы система защиты могла идентифицировать легального пользователя учетной записи, в памяти персонального устройства хранятся образы паролей, вычисленные по специальному криптографическому алгоритму [11].

Представленные решения шифрования данных являются наиболее упрощенными средствами шифрования. Существуют шифры, в которых используется целый набор символов шифртекста (4):

$$\varphi_i = A \Rightarrow B_i, i = 1, 2, \dots, s$$

где φ_i – результат шифрования данных, A, B – лица, которым предоставлен доступ к данным, s – количество произведенных итераций, i – порядковый номер.

Тогда открытый текст $x_1 \dots x_s x_{s+1} \dots x_{2s} \dots$ в процессе шифрования преобразуется в шифртекст (5):

$$\varphi_i(x_i) \dots \varphi_s(x_s) \varphi_1(x_{s+1}) \dots \varphi_s(x_{2s})$$

где φ_i, φ_s – результат шифрования данных, A, B – лица, которым предоставлен доступ к данным, s – количество произведенных итераций, i – порядковый номер.

Таким образом, в ходе исследования были рассмотрены, изучены, а также применены аналитические данные голосового образца, евклидово расстояние, шифрование и криптостойкость. Были проведены апробационные работы на персональном компьютере. Результатом исследования является созданный авторами программный комплекс системы защиты информации. Данное решение предоставляет пользователю операционной системы устройства необходимый уровень защищенности информационных ресурсов [12].

В совокупности использование программного обеспечения и обученной нейронной сети позволяет автоматизировать процессы во многих областях [13].

Представленный авторами результат шифрования является необходимым компонентом для программного комплекса многофакторной аутентификации. В совокупности с нейронными сетями и искусственным интеллектом, данный программный модуль представляет собой новый инструмент в области криптографии.

В дальнейшем авторами будут заложены такие математические методы, как геометрическая прогрессия и экспоненциальная функция [14].

Представленный программный продукт является удобным помощником для пользователя любой системы. Данное программное решение является универсальным продуктом при наличии собственного устройства, использовании сайтов, образовательных модулей и систем контроля, управления доступом. Помимо этого, стоит отметить, что интегрированный в программный код голосовой помощник является хорошим гидом абсолютно для всех пользователей, включая людей с ограниченными возможностями (особенно касается слабовидящих людей) [15].

Литература

1. Акилин Г.А., Грицкевич Е.В. Особенности имитационного моделирования информационных систем, использующих биометрическую идентификацию по лицу // Сборник статей по материалам международного научного конгресса «Интерэкспо Гео-Сибирь». 2019. С. 61-65.
2. Гринчук О.В., Цурков В.И. Обучение мультимодальной нейронной сети для определения подлинности изображений // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2020. № 4. С. 103-109.
3. Девыцина С.Н., Елецкая Т.А., Балабанова Т.Н., Гахова Н.Н. Разработка интеллектуальной системы биометрической идентификации пользователя // Научные ведомости. Серия: Экономика. Информатика. 2019. Т. 46, №1. С. 148-160.
4. Исмагилова А.С. Многофункциональное ПО для защиты учетных записей пользователей с использованием биометрических технологий / А.С. Исмагилова, Н.Д. Лушников // Защита информации. Инсайд. 2021. № 2 (98). С. 28-31.
5. Караваев Д.А. Вейвлет-подобная архитектура комплекснозначной сверточной нейронной сети для синтеза комплексных сигналов // Вестник кибернетики. 2020. № 2. С. 20-31.
6. Кручинина Е.В. Видеоидентификация – ключ в мире адресных услуг // Системы безопасности. 2016. №6. С. 110-111.
7. Крылова И.Ю., Рудакова О.С. Биометрические технологии как механизм обеспечения информационной безопасности в цифровой экономике // Молодой ученый. 2018. № 45 (231). С. 74-79.
8. Мамаев В. Многофакторная биометрическая идентификация // Системы безопасности. 2017. №5. С. 78-79.
9. Немков Р.М. Исследование сверточной нейронной сети, обученной с помощью метода применения нестандартных рецептивных полей при распознавании изображений // Известия Южного федерального университета. 2015. № 7 (168). С. 79-90.
10. Осовский С. Нейронные сети для обработки информации: учебное пособие / С. Осовский. М., Телеком, 2017. 448 с.
11. Пчеловодова Н. Российский биометрический рынок в 2019-2022 годах. Результаты масштабного исследования J'son & Partners Consulting // Системы безопасности. 2019. №2. С. 88-91.

12. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020660303. Управление доступом при помощи нейронных сетей. 2020 / Исмагилова А.С., Лушников Н.Д. - Башкирский государственный университет.
13. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021614672. Аутентификация учетных записей пользователей с помощью биометрических технологий. 2021 / Исмагилова А.С., Лушников Н.Д. - Башкирский государственный университет.
14. Четырбок П.В., Шостак М.А. Обучение модульной нейронной сети для многозадачного искусственного интеллекта // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. 2021. № 4. С. 70-74.
15. Чупакова А.О., Гудин С.В. Разработка и обучение модели искусственной нейронной сети для создания систем поддержки принятия решений // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2020. № 3. С. 61-73.

MSC 68T10 90-04 90-10

Learning neural network for multi-factor authentication using biometric technologies

A. S. Ismagilova, N. D. Lushnikov

Bashkir State University

Abstract: The article considers and applies a method for synthesizing the parameters of convolutional neural network represented in the form of unique personal computer user identifiers. For full-fledged protection of information resources the authors have implemented training of the training model using categorical cross-entropy. The main purpose of the study is to explore new aspects of mathematical modeling of the information protection system. The task of this study is the software implementation of the mathematical model of multifactor authentication using biometric technology, which is necessary to improve the integrated information security system.

Keywords: mathematical model, information protection system, account, user, security, artificial intelligence, identification, biometrics.

References

1. G.A. Akilin, E.V. Gritskevich, Osobennosti imitacionnogo modelirovaniya informacionnyh sistem, ispol'zuyuschih biometricheskuyu identifikaciju po licu, *Sbornik statej po materialam mezhdunarodnogo nauchnogo kongressa «Interekspos Geo-Sibir»*, 2019, P. 61-65.
2. O.V. Grinchuk, V.I. Tsurkov, Obuchenie mul'timodal'noj nejronnoj seti dlya opredeleniya podlinnosti izobrazhenij, *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2020, № 4, P. 103-109.

3. S.N. Devitsyna, T.A. Eletskaia, T.N. Balabanova, N.N. Gakhova, Razrabotka intellektual'noy sistemy biometricheskoy identifikatsii pol'zovatelya, *Nauchnye vedomosti. Seriya: Ekonomika. Informatika*, 2019, 46, № 1, P. 148-160.
4. A.S. Ismagilova, N.D. Lushnikov, Mnogofunktsional'noe PO dlya zashchity uchetnykh zapisей pol'zovatelei s ispol'zovaniem biometricheskikh tekhnologiy, *Zashchita informatsii. Insajd*, 2021, № 2 (98), P. 28-31.
5. D.A. Karavaev, Vejvlet-podobnaya arhitektura kompleksnoznachnoy svertochnoj nejronnoj seti dlya sinteza kompleksnykh signalov, *Vestnik kibernetiki*, 2020, № 2, P. 20-31.
6. E.V. Kruchinina, Videoidentifikatsiya – klyuch v mire adresnykh uslug, *Sistemy bezopasnosti*, 2016, № 6, P. 110-111.
7. I.Y. Krylova, O.S. Rudakova, Biometricheskie tekhnologii kak mekhanizm obespecheniya informatsionnoy bezopasnosti v cifrovoj ekonomike, *Molodoj uchenyy*, 2018, № 45 (231), P. 74-79.
8. V. Mamaev, Mnogofaktornaya biometricheskaya identifikatsiya, *Sistemy bezopasnosti*, 2017, № 5, P. 78-79.
9. R.M. Nemkov, Issledovanie svertochnoj nejronnoj seti, obuchennoy s pomoshch'yu metoda primeneniya nestandartnykh receptivnykh polei pri raspoznavanii izobrazhenij, *Izvestiya Yuzhnogo federal'nogo universiteta*, 2015, № 7 (168), P. 79-90.
10. S. Osovsky, Nejronnye seti dlya obrabotki informatsii: uchebnoe posobie, M., Telekom, 2017, 448 p.
11. N. Pchelovodova, Rossijskij biometricheskij rynek v 2019-2022 godakh. Rezul'taty masshtabnogo issledovaniya J'Son & Partners Consulting, *Sistemy bezopasnosti*, 2019, № 2, P. 88-91.
12. Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2020660303. Upravleniye dostupom pri pomoshchi neyronnykh setey. 2020 / A.S. Ismagilova, N.D. Lushnikov - Bashkirskiy gosudarstvennyy universitet.
13. Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2021614672. Autentifikatsiya uchetykh zapisей pol'zovatelei s pomoshch'yu biometricheskikh tekhnologiy. 2021 / A.S. Ismagilova, N.D. Lushnikov - Bashkirskiy gosudarstvennyy universitet.
14. P.V. Chetyrbok, M.A. Shostak, Obuchenie modul'noj nejronnoj seti dlya mnogozaadachnogo iskusstvennogo intellekta, *Vestnik Adygejskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 4: Estestvenno-matematicheskie i tekhnicheskie nauki*, 2021, № 4, P. 70-74.
15. A.O. Chupakova, S.V. Gudin, Razrabotka i obuchenie modeli iskusstvennoj nejronnoj seti dlya sozdaniya sistem podderzhki prinyatiya reshenij, *Vestnik Astrahanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika*, 2020, № 3, P. 61-73.

УДК 519.853.4, 004.032.26

Использование нейросетевой аппроксимации целевой функции при решении задач глобальной оптимизации*

Карпенко С. Н., Лебедев И. Г., Надумин Д. В.

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Аннотация: В работе рассматривается задача поиска глобального минимума многоэкстремальной функции. Для решения этой задачи был выбран алгоритм имитации отжига. Для ускорения процесса поиска минимума используется аппроксимация целевой функции нейросетью. Представлены результаты работы комбинированного алгоритма глобальной оптимизации, объединяющего алгоритм имитации отжига, использующий нейронную сеть для аппроксимации функций, и метод Нелдера-Мида для точного решения задачи оптимизации. В данной работе проводились эксперименты с серией двумерных функций из генератора GKLS. Результаты показывают сокращение количество вычислений целевой функции при сохранении высокой точности поиска.

Ключевые слова: методы оптимизации, глобальная оптимизация, нейронные сети, машинное обучение.

1. Введение

Нейронная сеть представляет собой математическую модель, построенную по принципу организации и функционирования биологических нейронных сетей – сетей нервных клеток живого организма. Это понятие возникло при изучении процессов, протекающих в мозге, и при попытке смоделировать эти процессы.

С точки зрения математики, обучение нейронных сетей – это многопараметрическая задача нелинейной оптимизации. С точки зрения развития вычислительной техники и программирования, нейронная сеть – способ решения проблемы эффективного параллелизма.

Нейронные сети применяются для решения многих прикладных задач. Наиболее известными сферами применений нейронных сетей являются: распознавание образов и классификация, прогнозирование, аппроксимация. Нейронные сети могут аппроксимировать непрерывные функции: с помощью линейных операций и каскадного соединения можно из произвольного нелинейного элемента получить устройство, вычисляющее любую непрерывную функцию с некоторой наперед заданной точностью.

История нейронных сетей намного длиннее, чем принято считать. Сама идея «способной к мышлению системы» возникла еще в Древней Греции, и популярность нейронных сетей менялась с течением времени.

В 1943 году Уоррен Маккалок и Уолтер Питтс опубликовали работу «Логическое исчисление идей, относящихся к нервной деятельности» [1]. Целью данного исследования было изучение работы человеческого мозга. В 1958 году, Фрэнк Розенблатт

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 0729-2020-0055) и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего» (проект № 075-02-2021-1394).

в своем исследовании «Персептрон: вероятностная модель хранения и организации информации в головном мозге» [2] описал модель персептрона. В 1974 году, первым ученым на территории США, описавшим в своей диссертации [3] использование алгоритма обратного распространения ошибки в нейронных сетях, стал Пол Вербос, хотя развитием этой идеи занимались многие исследователи. В 1989 году, Янн Лекун опубликовал статью [4], в которой было описано практическое использование ограничений обратного распространения ошибки и интеграция в архитектуру нейронной сети для обучения алгоритмов.

2. Постановка задачи глобальной оптимизации

Задача многомерной многоэкстремальной оптимизации может быть определена как проблема поиска наименьшего значения действительной функции $\phi(y)$

$$\phi(y^*) = \min\{\phi(y) : y \in D\},$$

$$D = \{y \in R^N : a_i \leq y_i \leq b_i, 1 \leq i \leq N\}, \quad (1)$$

где $a, b \in R^N$ – заданные векторы.

Численное решение задачи (1) заключается в построении оценки $y_k^* \in D$, отвечающей некоторому понятию близости к точке y^* (например, $\|y^* - y_k^*\| \leq \epsilon$, где $\epsilon > 0$ это некоторая заданная точность) на основе конечного числа k вычислений оптимизируемой функции. Относительно класса рассматриваемых задач предполагается выполнение двух важных условий:

- 1) целевая функция $\phi(y)$ может быть задана алгоритмически, как результат работы некоторой подпрограммы или библиотеки;
- 2) целевая функция $\phi(y)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\phi(y_1) - \phi(y_2)| \leq L\|y_1 - y_2\|, \quad y_1, y_2 \in D, \quad 0 < L < \infty. \quad (2)$$

Второе предположение соответствует ограниченности изменения значений функции при ограниченной вариации аргумента. Это предположение можно интерпретировать (применительно к прикладным задачам) как отражение ограниченности мощностей, порождающих изменения в моделируемой системе.

Задачи многоэкстремальной оптимизации имеют существенно более высокую трудоемкость решения по сравнению с другими типами оптимизационных задач, т. к. глобальный оптимум является интегральной характеристикой решаемой задачи и требует исследования всей области поиска. Как результат, поиск глобального оптимума сводится к построению некоторого покрытия (сетки) в области параметров, и выборе наилучшего значения функции на данной сетке. Вычислительные затраты на решение задачи растут экспоненциально с ростом размерности [5–8].

3. Метод имитации отжига

Алгоритм имитации отжига является общим алгоритмическим методом решения задачи глобальной оптимизации. Он основывается на имитации физического процесса, который происходит при кристаллизации вещества, в том числе при отжиге металлов.

Введём следующие обозначения: Y – множество всех состояний системы, y_i – состояние на i -ом шаге алгоритма; t_i – температура на i -ом шаге.

При помощи моделирования такого процесса ищется такая точка или множество точек, на котором достигается минимум некоторой числовой функции $\phi(y^i)$, $y^i = (y_1, \dots, y_n) \in Y$. Решение ищется последовательным вычислением точек пространства Y [6], [9].

Определим три функции:

1. Функция энергии (оптимизируемая): $E : Y \rightarrow R$.
2. Функция изменения температуры с течением времени: $T : N \rightarrow R$.
3. Функция, порождающая новое состояние: $\phi : Y \rightarrow Y$.

На входе задаются минимальная t_{min} и начальная t_{max} температуры. Задаём произвольное первое состояние y_1 и $t_{min} = t_{max}$.

Пока $t_i > t_{min}$:

- 1) $y_c = \phi(y_{i-1})$,
- 2) $\Delta E = E(y_c) - E(y_{i-1})$,
- 3) Если $\Delta E \leq 0$, то $y_i = y_c$. Если $\Delta E > 0$, то переход осуществляется с вероятностью $P(\Delta E) = e^{-\Delta E/t_i}$,

- 4) Понижаем температуру $t_{i+1} = T(i)$.

Возвращаем последнее состояние y .

Особенностью метода имитации отжига является возможность выхода из локального минимума оптимизируемой функции за счет принятия изменений, временно ухудшающих результат, что отражает суть процесса нагрева расплава для предотвращения его быстрого остывания. Еще одно преимущество – даже в условиях нехватки вычислительных ресурсов для нахождения глобального минимума метод отжига выдает один из локальных минимумов.

4. Метод Нелдера-Мида

Метод Нелдера-Мида является методом безусловной оптимизации [10, 11] функции нескольких переменных $\phi(y^1, \dots, y^n)$, не использующий градиентов функции. Он относится к группе методов прямого поиска, так как в нем не используются производные. Метод является развитием симплексного метода.

Идея метода заключается в следующем: в пространстве R^N выбираются $(n + 1)$ пробных векторов, в каждом из которых можно вычислить значение целевой функции. Вершина A с наихудшим значением целевой функции отражается через центр тяжести других вершин многогранника, в результате чего из оставшихся вершин строится новый многогранник, называемый отраженным, и одна точка, расположенная на линии проекции на соответствующем расстоянии от центра тяжести. При этом предполагается что функция определена во всех точках области определения.

Метод Нелдера-Мида относится к методам локальной оптимизации, т. е. он сходится, вообще говоря, к локальному экстремуму функции.

5. Математический аппарат нейронной сети прямого распространения

Согласно универсальной теореме аппроксимации (теореме Цыбенко), доказанной Джорджем Цыбенко в 1989 году, искусственная нейронная сеть с прямым распространением может аппроксимировать любую непрерывную функцию многих переменных с любой точностью [12] при условии достаточного количества нейронов скрытого слоя и удачного подбора весов и смещений.

На входе нейронная сеть принимает набор значений переменной. Далее эти значения умножаются на некоторые весовые коэффициенты. После чего в качестве взвешенной по весовым коэффициентам суммы подаются на вход каждого из нейронов скрытого слоя, где к этой сумме прибавляется смещение (*bias*). В результате получаем число, которое подаётся на вход активационной функции. Результат активационной функции и есть выходное значение одного нейрона.

Взвешенная сумма представлена ниже:

$$z = \sum_{i=1}^n y_i \cdot w_i + bias, \quad (3)$$

где *bias* – смещение, w_i – весовой коэффициент, y_i – входное значение.

Далее (3) подаётся в качестве входного значения в активационную функцию. Существует несколько видов активационных функций. В данной работе применялась сигмоидальная функции, область значений которой от 0 до 1.

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}} \quad (4)$$

6. Комбинированный алгоритм глобальной оптимизации

Нами разработан комбинированный алгоритм глобальной оптимизации, использующий нейронную сеть для аппроксимации функций, метод имитации отжига для поиска глобального оптимума и метод Нелдера-Мида для уточнения найденного решения.

В данной работе была выбрана нейронная сеть прямого распространения (feedforward neural network) [1–4, 12] из библиотеки Keras [13].

В ходе исследования параметры нейронной сети были подобраны следующим образом: 5 слоёв по 32 нейрона в каждом слое. В качестве активационной функции выбрана сигмоида. Весовые коэффициенты имеют нормальное распределение со средним равным 0 и стандартным отклонением равным 0.2, что позволяет задавать их значения в диапазоне $[-1, 1]$. Смещение нейрона (*bias*) инициализируется как 0. В выходном слое только один нейрон.

Сам комбинированный алгоритм можно разбить на три пункта:

1. Создание обучающей выборки для нейронной сети.
2. Обучение нейронной сети.
3. Пока не выполнен критерий остановки, либо пока не выполнено ограничение на количество вычислений целевой функции повторяем следующее:
 - а) Оптимизация нейросетевой аппроксимации с помощью алгоритма имитации отжига.
 - б) Оптимизация целевой функции с помощью локального метода, где в качестве первоначального значения используется найденная глобальным методом точка.
 - в) Если разница между найденным значением и глобальным минимумом меньше 0.01, то комбинированный алгоритм сошёлся.
 - д) Иначе добавляем в обучающую выборку 10 случайных точек и найденную локальным методом точку.
 - е) После чего, заново обучаем нейронную сеть и уходим на следующую итерацию.

7. Описание программной реализации

Программная реализация выполнена на языке Python с помощью библиотек Keras [13], Numpy [14], Matplotlib [15], SciPy [16].

Работа выполнялась в среде Jupyter Notebook. Программа разбита на 5 блоков:

1. Импортируются все библиотеки, в том числе пользовательские функции (в частности, функция нормализации значений) и генератор задач GKLS.

2. Определена функция задания нейросети, принимающая в качестве аргумента размерность задачи. Функция возвращает объект нейронной сети.

3. Задаётся обучающая выборка, состоящая из 225 значений в области определения функций генератора GKLS.

4. Задаются параметры нейросети и критерии остановки комбинированного алгоритма. Количество эпох обучения равно 6000. Размер выборки для обучения (batch size) на каждой эпохе (каждой итерации) равен одной трети от всего размера обучающей выборки.

5. Выполнение комбинированного алгоритма. В случае повторения обучения нейросети batch size также задаётся равным одной трети от всей выборки с учётом добавленных точек.

8. Эксперименты

Эксперименты проводились на компьютере со следующими характеристиками:

1. Процессор Intel Core i3-9100F, 4100 MHz.

2. ОЗУ 16 Gb (2x8 Gb) DDR4.

3. Видеокарта GeForce GTX 1050 2 Gb.

Задача экспериментов состояла в том, чтобы уменьшить количество вычислений целевой функции.

На рис. 1 представлена поверхность одной из функций, порожденных генератором GKLS, а на рис. 2 – её аппроксимация нейросетью.

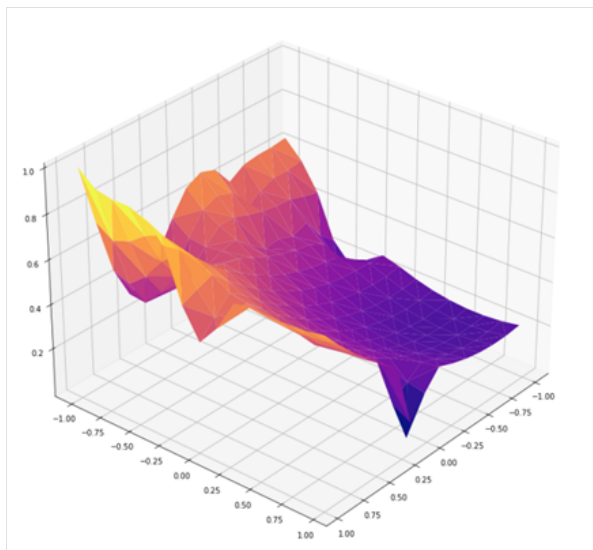


Рис. 1. Поверхность функции.

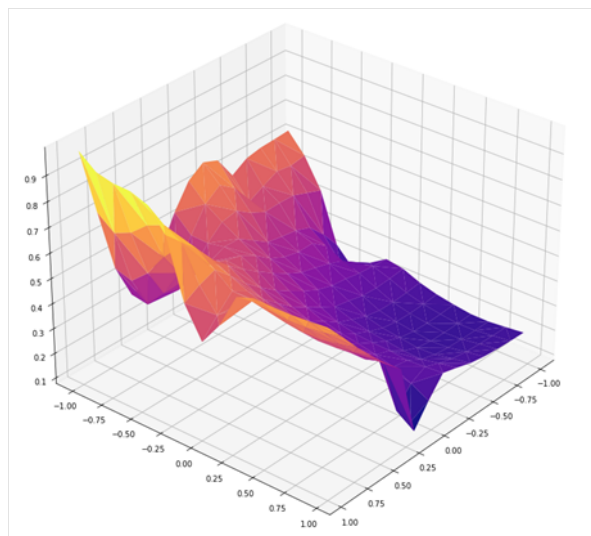


Рис. 2. Аппроксимация.

Эксперименты проводились на 10-ти двумерных задачах из генератора GKLS. В

работах [6, 10] описан GKLS-генератор, позволяющий порождать задачи многоэкстремальной оптимизации с заранее известными свойствами: количеством локальных минимумов, размерами их областей притяжения, точкой глобального минимума, значением функции в ней и т. п.

В таблице 1 отражено среднее число вычислений целевой функции, которые выполнили метод имитации отжига и разработанный нами комбинированный алгоритм, при решении серии задач. Также приведена средняя точность нахождения решения. Максимальное число итераций алгоритма имитации отжига составляло 10000, остальные параметры соответствуют значениям по умолчанию.

Таблица 1. Результаты работы имитации отжига и комбинированного алгоритма

	Среднее количество вычислений целевой функции	Точность нахождения решений
Имитация отжига	4255.9	$1.8 \cdot 10^{-8}$
Комбинированный алгоритм	293.4	$3.3 \cdot 10^{-5}$

Результаты экспериментов показывают значительное уменьшение количества вычислений целевой функции. При этом сохраняется высокая точность нахождения минимума.

Литература

1. Warren S. McCulloch, Walter Pitts // California State University. Режим доступа: <https://home.csulb.edu/~cwallis/382/readings/482/mcculloch.logical.calculus.ideas.1943.pdf>
2. F. Rosenblatt // Cornell Aeronautical Laboratory. Режим доступа: <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.335.3398&rep=rep1type=pdf>
3. Paul Werbos // National Science Foundation. Режим доступа: https://www.researchgate.net/publication/35657389_Beyond_regression_new_tools_for_prediction_and_analysis_in_the_behavioral_sciences
4. Y. LeCun, B. Boser // AT & T Bell Laboratories. Режим доступа: <http://yann.lecun.com/exdb/publis/pdf/lecun-89e.pdf>
5. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: «Наука», 1971. 384 с.
6. Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
7. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. М.: «Наука», 1978. 240 с.

8. Стронгин Р.Г., Гергель В.П., Гришагин В.А., Баркалов К.А. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации. М.: Издательство Московского университета, 2013. 280 с.
9. Kirkpatrick S., Gelatt Jr.C.D., Vecchi M.P. Optimization by Simulated Annealing // Science. 1983. 220 (4598). P. 671–680.
10. Gaviano M., Lera D., Kvasov D.E., Sergeyev Y.D. Software for generation of classes of test functions with known local and global minima for global optimization // ACM Transactions on Mathematical Software. 2003. Vol. 29. P. 469-480.
11. Городецкий С.Ю., Гришагин В.А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация: учебное пособие. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2007. 489 с.
12. Cybenko G.V. Approximation by Superpositions of a Sigmoidal function // Mathematics of Control Signals and Systems. 1989. Т. 2, № 4. С. 303–314.
13. Официальный сайт библиотеки Keras. Режим доступа: <https://keras.io/>
14. Официальный сайт библиотеки NumPy. Режим доступа: <https://numpy.org/>
15. Официальный сайт библиотеки Matplotlib. Режим доступа: <https://matplotlib.org/>
16. Официальный сайт библиотеки SciPy. Режим доступа: <https://scipy.org/>

MSC 90C26, 82C32

Using neural network approximation of the objective function in global optimization problems

S. N. Karpenko, I. G. Lebedev, D. V. Nadumin
N. I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

Abstract: The paper considers the problem of finding the global minimum of a multiextremal function. To solve this problem, the simulation annealing algorithm was used. To speed up the process of finding the minimum, the approximation of the objective function by a neural network is applied. The results of algorithm that combines the simulation annealing algorithm using a neural network to approximate objective function and the Nelder-Meade method to refine the solution of the optimization problem are presented. The paper presents the results of the experiments carried out with a series of multiextremal test problems. The results show a reduction in the number of calculations of the objective function while maintaining high search accuracy.

Keywords: optimization methods, global optimization, neural networks, machine learning.

References

1. Warren S. McCulloch, Walter Pitts, California State University. Access mode: <https://home.csulb.edu/~cwallis/382/readings/482/mcculloch.logical.calculus.ideas.1943.pdf>
2. F. Rosenblatt, Cornell Aeronautical Laboratory. Access mode: <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.335.3398&rep=rep1type=pdf>
3. Paul Werbos, National Science Foundation. Access mode: https://www.researchgate.net/publication/35657389_Beyond_regression_new_tools_for_prediction_and_analysis_in_the_behavioral_sciences
4. Y. LeCun, B. Boser, AT & T Bell Laboratories. Access mode: <http://yann.lecun.com/exdb/publis/pdf/lecun-89e.pdf>
5. Yu.B. Hermeyer, Introduction to the theory of operations research, M., "Science 1971, 384 p.
6. Ya.D. Sergeev, D.E. Kvasov, Diagonal methods of global optimization, M., Fizmatlit, 2008, 352 p.
7. R.G. Strongin, Numerical methods in multi-extreme problems, M., "Science 1978, 240 p.
8. R.G. Strongin, V.P. Gergel, V.A. Grishagin, K.A. Barkalov, Parallel computing in global optimization problems, M., Moscow University Press, 2013, 280 p.
9. S. Kirkpatrick, Jr.C.D. Gelatt, M.P. Vecchi, Optimization by Simulated Annealing, *Science*, 1983, 220 (4598), P. 671–680.

10. M. Gaviano, D. Lera, D.E. Kvasov, Y.D. Sergeyev, Software for generation of classes of test functions with known local and global minima for global optimization, *ACM Transactions on Mathematical Software*, 2003, Vol. 29, P. 469-480.
11. S.Y. Gorodetsky, V. A. Grishagin, Nonlinear programming and multi-extreme optimization: a textbook, Nizhny Novgorod, Publishing House of the Nizhny Novgorod State University, 2007, 489 p.
12. G.V. Cybenko, Approximation by Superpositions of a Sigmoidal function. *Mathematics of Control Signals and Systems*, 1989, v. 2, № 4, P. 303—314.
13. The official website of the Keras Library. Access mode: <https://keras.io/>
14. The official website of the NumPy library. Access mode: <https://numpy.org/>
15. The official website of the Matplotlib library. Access mode: <https://matplotlib.org/>
16. The official website of the SciPy library. Access mode: <https://scipy.org/>

УДК 533.9+517.2

Математическое моделирование процесса обработки металлических изделий

Константинова А. А., Якупов З. Я., Галимова Р. К.

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.
Туполева-КАИ

Аннотация: В статье представлена математическая модель обработки детали под воздействием различных факторов. В основе модели лежат закон сохранения массы и уравнение теплопроводности. Численный расчет основных характеристик процесса выполнен с использованием пакета MATLAB.

Ключевые слова: математическое моделирование, обработка детали, закон сохранения массы, уравнение теплопроводности.

В настоящее время активно проводятся разработки и исследования новых технологий обработки поверхностей металлических изделий. Одним из таких способов является обработка металлической поверхности парогазовым разрядом [1–3].

Работа посвящена разработке математической модели процесса обработки детали. Это актуально для использования на этапах подготовки и планирования экспериментов, для описания результатов технологии, а также для контроля изменения параметров технологических блоков [4–6].

В предыдущих работах [7, 8] были определены факторы, которые существенно влияют на результат обработки поверхностей металлов и жидкостей электрическим разрядом в паровоздушной среде. В представляемой работе определяются зависимости результатов технологии обработки различных веществ от этих факторов.

Математическая модель процесса обработки металла представляет собой систему уравнений для физических величин, таких как температура электролита, плотность жидкости и скорость убыли массы электролита из некоторого объема [9]. При моделировании рассматриваем произвольный макроскопический объем жидкости непосредственно под областью разряда, ограниченный поверхностью. Предполагается, что с жидкостью в этом объеме не происходят химические реакции и фазовые переходы. Тогда изменение массы жидкости в объеме происходит за счет убыли ее из этого объема малыми порциями и с малыми скоростями. В качестве механизмов убыли массы жидкости можно рассмотреть испарение на границе раздела электролит-газ (воздух) и перемешивание слоев жидкости [10].

Для описания процессов, протекающих в окрестности границы раздела разряд-электролит, воспользуемся законом сохранения массы (уравнением неразрывности) для сплошной среды:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla (\rho \vec{v}), \quad (1)$$

где ρ – плотность среды, t – время протекания процесса, $\vec{v}$ – вектор скорости убыли массы электролита в некотором объеме.

Скорость колебания объема жидкости в электролитической ячейке вблизи металлического электрода при горении парогазового разряда описывается с использо-

ванием закона сохранения импульса (уравнение Эйлера):

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\nabla P + \rho \vec{g}, \quad (2)$$

где P – давление жидкости в рассматриваемом объеме.

Уравнение (2) выражает второй закон Ньютона для единицы объема среды и позволяет оценить скорость убыли массы электролита в объеме электролитической ячейки, связанную с важным параметром технологического процесса – скоростью подачи электролита в ячейку для поддержания постоянного уровня границы раздела жидкость-газ (воздух).

Для рассмотрения распределения температуры в электролитической ячейке и ее изменения во времени используем уравнение теплопроводности:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = Q + \nabla (a \nabla T), \quad (3)$$

где C – удельная теплоемкость тела, T – температура тела, a – коэффициент теплопроводности, характеризующий скорость выравнивания температуры тела в неравномерно нагретом теле, Q – тепловой поток. Оценка изменения во времени температуры электролита позволяет решать вопрос об интенсивности охлаждения электролита.

Подстановка в уравнениях (1)-(3) всех параметров, характеризующих состояние водного раствора салициловой кислоты (либо электролитов другого состава), позволяет построить в MATLAB первичную модель изменения параметров процесса обработки детали парогазовым разрядом.

Литература

1. Галимова Р.К., Якупов З.Я. Исследование технологического процесса обработки поверхностей изделий парогазовым разрядом между твердым металлическим и жидким неметаллическим электродами // Fundamental and applied sciences today: Proceedings of the Conference. North Charleston, 2013. Vol. 2. P. 147 – 149.
2. Галимова Р.К., Юсупова А.Р. Проблема планирования в техно-логическом эксперименте//Fundamental science and technology – promising developments VI: Proceedings of the Conference. North Charleston, 2015. Vol.2. 297 p.
3. Галимова Р.К., Зайннеев А.А. Экспериментально-статистическое моделирование технологического процесса// Fundamental science and technology – promising developments VI: Proceedings of the Conference. North Charleston, 2015. Vol. 2. North Charleston, SC, USA: CreatSpace, 2015. 297 p.
4. Павлова А.А., Шакиров А.Ш., Галимова Р.К. Оценивание кислотности раствора в процессе получения зольей методом наименьших модулей // Материалы VIII Международной научной молодежной школы-семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Саранск: СМВО, 2018. С. 82-85.
5. Павлова А.А., Иутин Р.В., Якупов З.Я. Усреднение показателя шероховатости поверхности за время обработки детали методом наименьших квадратов // Материалы VIII Международной научной молодежной школы-семинара

- «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Саранск: СМВО, 2018. С. 61-65.
6. Иутин Р.В., Галимова Р.К., Якупов З.Я. Трехфакторная модель процесса уменьшения шероховатости металлических поверхностей // Материалы VIII Международной научной молодежной школы-семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Саранск: СМВО, 2018. С. 82-85.
 7. Takseitov R.R., Galimova R.K., Yakupov Z.Ya. Calculation of portable properties of some real gas mixtures at high temperatures// Journal of physics: series of conferences. 2020. 1588 (1). 012065.
 8. Галимова Р.К., Якупов З.Я. Исследование решений уравнения Лапласа в технологических процессах с использованием парогазовых разрядов с жидкостными электродами//Журнал Средневолжского Математического Общества. 2015. Т. 17, № 1. С.135 – 139.
 9. Галимова Р.К., Якупов З.Я. Уравнения эллиптического типа в моделировании технологических процессов//Теория функций, её приложения и смежные вопросы: Материалы XII международной Казанской летней научной школы-конференции. Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казан. матем. общества, изд-во Академии наук РТ, 2015. Т.51. С. 144 – 146.
 10. Галимова Р. К. Характеристики плазменной электротермической установки с жидкими электродами (электролиты с добавлением неорганических и органических примесей). Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. СПб. 1997. 16 с.

MSC 62H12

Mathematical modeling of the processing of metal products

A. A. Konstantinova, Z. Ya. Yakupov, R. K. Galimova

Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev

Abstract: The article presents the mathematical model for processing a component under the influence of various factors. The model is based on the law of mass conservation and the heat conduction equation. Numerical calculation of the main characteristics of the process was performed using the MATLAB package.

Keywords: mathematical modeling, component processing, mass conservation law, heat equation.

References

1. R.K. Galimova, Z.Ya. Yakupov, Investigation of the technological process of surface treatment of products by a vapor-gas discharge between solid metal and liquid non-metal electrodes, *Fundamental and applied sciences today: Proceedings of the Conference*, North Charleston, 2013, Vol. 2, P. 147 – 149.
2. R.K. Galimova, A.R. Yusupova, The problem of planning in a technological experiment, *Fundamental science and technology – promising developments VI: Proceedings of the Conference*, North Charleston, 2015, Vol. 2, 297 p.
3. R.K. Galimova, A.A. Zaineev, Experimental-statistical modeling of the technological process, *Fundamental science and technology – promising developments VI: Proceedings of the Conference*, North Charleston, 2015, Vol. 2, 297 p.
4. A.A. Pavlova, A.Sh. Shakirov, R.K. Galimova, Estimation of the acidity of the solution in the process of obtaining sols by the method of least modules, *Proceedings of the VIII International Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Complexes"*, Saransk, SMVO, 2018, P. 82-85.
5. A.A. Pavlova, R.V. Iutin, Z.Ya. Yakupov, Averaging the surface roughness index during the processing of a part by the least squares method, *Proceedings of the VIII International Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Complexes"*, 2018, Saransk, SMVO, 2018, P. 61-65.
6. R.V. Iutin, R.K. Galimova, Z.Ya. Yakupov, Three-factor model of the process of reducing the roughness of metal surfaces, *Proceedings of the VIII International Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Complexes"*, 2018, Saransk, SMVO, 2018, P. 82-85.
7. R.R. Takseitov, R.K. Galimova, Z.Ya. Yakupov, Calculation of portable properties of some real gas mixtures at high temperatures, *Journal of physics: series of conferences*, 2020, 1588 (1), 012065.

8. R.K. Galimova, Z.Ya. Yakupov Investigation of solutions of the Laplace equation in technological processes using steam-gas discharges with liquid electrodes, *Journal of the Middle Volga Mathematical Society*, 2015, V. 17, No. 1, P. 135 – 139.
9. R.K. Galimova, Z.Ya. Yakupov, Elliptic-type equations in the modeling of technological processes, *Theory of functions, its applications and related issues: Proceedings of the XII International Kazan Scientific Summer School-Conference. Proceedings of the Mathematical Center. N.I. Lobachevsky*, Kazan, Kazan Publishing House. math. Society, publishing house of the Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan, 2015, T. 51., P. 144 - 146.
10. R.K. Galimova, Characteristics of a plasma electrothermal installation with liquid electrodes (electrolytes with the addition of inorganic and organic impurities), Abstract of the dissertation for the degree of candidate of technical sciences, SPb, 1997, 16 p.

УДК 519.633.6+536.21+538.945

Математическое моделирование равновесной намагниченности в осесимметричных жестких сверхпроводниках

Кузьмичев Н. Д., Шушпанов А. А., Васютин М. А.

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва

Аннотация: В данной работе представлены результаты численного моделирования для жестких сверхпроводников 2-го рода. Для результатов, схожих с гранульными образцами, форма исследуемых образцов была выбрана шарообразная. Расчет проводился на основе уравнений электродинамики и моделей критического состояния сверхпроводников. Распределение тока в образцах рассчитывается итерационно с помощью численного интегрирования «уравнения движения тока». Основной акцент в работе сделан на рассмотрении равновесных и неравновесных зон в сверхпроводнике. Получены петли намагниченности для мелких гранул разного размера, а также намагниченность приповерхностных слоев.

Ключевые слова: жёсткие сверхпроводники второго рода, критическое состояние, численное интегрирование

Для сверхпроводников с плотной однородной структурой моделирование поведения в магнитном поле оказывается более простой задачей, нежели для гранулярных керамических образцов. Сложность заключается в наличии тонкой области порядка $\lambda \sim 10^{-8}$ м, называемой лондоновской глубиной проникновения. Магнитные вихри не закрепляются в приповерхностной области сверхпроводящего материала, а их количество пропорционально внешнему полю. В итоге полученная область обладает магнитным полем, всегда направленным против внешнего. При малых размерах гранул (сопоставимых с размером глубины проникновения) магнитный момент приповерхностной области начинает существенно сказываться на процессах перемагничивания образца, в частности вносится асимметрия в форму петель намагниченности и магнитного момента относительно оси абсцисс.

В данной работе проведен расчет петель намагниченности с учетом равновесной области.

Рассматривается изотропный локальный случай $\mathbf{B}(\mathbf{H}) = \mu_0 \mathbf{H}$ и вольтамперную характеристику $\mathbf{E} = E(J)\mathbf{J}/J$, где $\mathbf{H}$ – напряженность внешнего магнитного поля и $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля, созданная внутри сверхпроводника изменяющимся магнитным потоком. Удельное сопротивление ρ аппроксимируем степенной функцией

$$\rho = E(J)/J = E_c(J/J_c)^n/J, \quad (1)$$

где $n \geq 1$. Границы образца: $b \geq y \geq -b$, $r = (x^2 + y^2)^{0.5} \leq a(y)$, где $a(y)$ – функция границы. Основное уравнение движения плотности тока, интегральное по координатам и дифференциальное по времени, приведено в работах [1, 2] и имеет вид:

$$\frac{dJ(\mathbf{r}, t)}{dt} = \mu_0^{-1} \int_0^a dr \int_0^b dy Q_{cyl}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[E(J) - \frac{r'}{2} \dot{B}_a \right]. \quad (2)$$

Здесь $B_a = B_a(t)$ — индукция внешнего приложенного магнитного поля, меняющаяся от времени t по заданному закону, например, гармоническому или линейному, а $Q_{cyl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — ядро интегрального уравнения, выраженное через эллиптические функции [2, 3].

Петли намагниченности состоят из пяти участков: рост внешнего поля от 0 до H_{max} (начальная намагниченность), спад с H_{max} до 0, рост поля в противоположном направлении от 0 до H_{max} (в проекции на ось y дальнейший спад от 0 до $-H_{max}$), спад внешнего поля с H_{max} до 0 и рост в прямом направлении до H_{max} . На 1, 2 и 5 участках внешнее поле направлено вдоль оси y , на участках 3, 4 — против. В отличие от прошлых результатов моделирования [2, 3] на участках 2 и 4 направление изменения внешнего поля не совпадает с его абсолютным направлением, что должно отразиться на методе расчета. Для этого на первом участке в программе сохраняются мгновенные значения токов в ячейках, попадающих в приповерхностную область. При дальнейших вычислениях эти данные используются на участках 2 и 5 (с прямым знаком), 3 и 4 (с обратным знаком).

В качестве функции зависимости критической плотности тока от магнитного поля будем использовать трехпараметрическую функцию, предложенную в работах [4, 6]:

$$J_c(B) = J_{c0} \frac{1 - (|B|/B_{c2})^\alpha}{1 + (|B|/B_0)^\alpha}, \quad (3)$$

где $B_{c2} = \mu_0 H_{c2}$, где H_{c2} — второе критическое поле сверхпроводника. Для удобства, значения напряженности магнитных полей будут нормированы по $J_{c0} \cdot a_0$, магнитный момент — по $J_{c0} \cdot a_0^4$. Величины параметров функции, использованных при моделировании: $B_0 = 0.5\mu_0 J_{c0} \cdot a_0$, $\alpha = 0.5$, $B_{c2} = 20\mu_0 J_{c0} \cdot a_0$.

Расчеты проводились на шарообразном образце радиусом a_0 , плотность сетки составляет 15 ячеек/ a_0 , показатель степени n в уравнении (1) составляет 51.

На рис. 1 показаны результаты расчета петель магнитного момента для выбранного образца.

Использовалась модель (3) с параметрами $B_0 = 0.5\mu_0 J_{c0} \cdot a_0$, $\alpha = 0.5$, $B_{c2} = 20\mu_0 J_{c0} \cdot a_0$. С ростом относительной глубины равновесной области (l_0/a_0) наблюдается увеличение асимметрии этих петель относительно прямой $m = 0$.

Таким образом, в результате проведенных расчетов были получены петли магнитных моментов для сферических сверхпроводящих образцов для различных ширины приповерхностной зоны. В процессе моделирования можно также получить данные о распределении локальных плотностях тока, магнитного поля внутри образца, а также его магнитный отклик. Полученные результаты можно использовать для моделирования гранулярных структур различной плотности.

Литература

1. Brandt E.H. Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. I. Flux penetration and magnetization curves // Phys. Rev. B. 1998. Vol. 58. P. 6506–6522.
2. Кузьмичев Н.Д., Шушпанов А.А., Васютин М.А. Математическое моделирование магнитных свойств эллипсоидов вращения жёстких сверхпроводников второго рода в модели Бина // Журнал Средневолжского математического общества. 2019. Т. 21, № 3. С. 353–362.

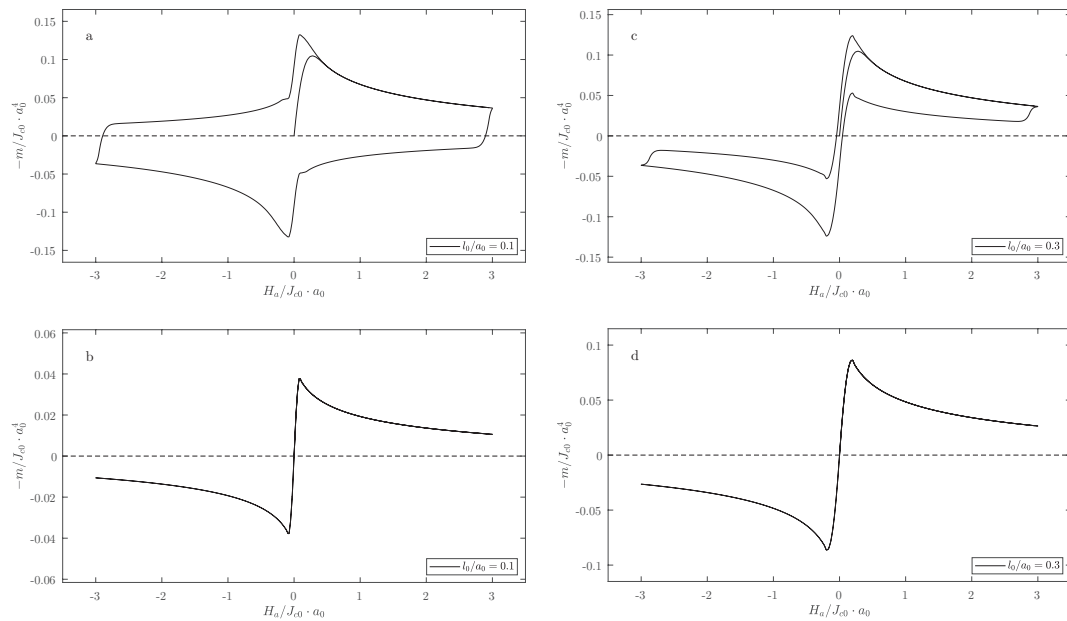


Рис. 1. Петли магнитного момента сферического образца с учетом равновесных областей разной толщины (а, с) – верхний ряд. Толщины равновесных областей на рисунке приведены в относительных единицах и указаны на рисунке ($l_0/a_0 = 0.1$ (а, b) и $l_0/a_0 = 0.3$ (с, d)). На рис. b и d (нижний ряд) приведены магнитные моменты указанных равновесных областей.

3. Кузьмичев Н.Д., Шушпанов А.А., Васютин М.А. Математическое моделирование магнитных свойств осесимметричных сверхпроводников второго рода в модели Кима // Журнал Средневолжского математического общества. 2020. Т. 22, № 4. С. 456–462.
4. Urban E. W. Flux Flow and a New Critical-Current Formula // Journal of Applied Physics. 1971. Т. 42, №. 1. С. 115-127.
5. Вальков В.В., Хрусталева Б.П. Намагничивание гранулированных ВТСП в сильных магнитных полях // ЖЭТФ. 1995. Т. 107, Вып. 4. С. 1221.
6. Koblishka M.R., Gokhfeld D.M., Chang C., Hauet T., Hartmann U. Pinning force scaling of electrospun Bi-2212 nanowire networks // Solid State Commun. 2017. Vol. 264. P. 16–18 .
7. Gokhfeld D.M. Secondary Peak on Asymmetric Magnetization Loop of Type-II Superconductors // J Supercond Nov Magn. 2013. Vol. 26. P. 281–283.
<https://doi.org/10.1007/s10948-012-1741-8>

MSC 74F15

Mathematical modeling of surface layer magnetization in axisymmetric hard superconductors

N. D. Kuzmichev, A. A. Shushpanov, M. A. Vasyutin

National Research Ogarev Mordovia State University

Abstract: In this paper, we present the results of numerical simulation for hard superconductors of the 2nd kind. For results similar to granular samples, the shape of the studied samples was chosen to be spherical. The calculation was carried out on the basis of the equations of electrodynamics and models of the critical state of superconductors. The current distribution in the samples is calculated iteratively, by means of numerical integration of the "current motion equation". The main emphasis in the work is on the consideration of equilibrium and nonequilibrium zones in a superconductor. The magnetization loops for small granules of different sizes, as well as the magnetization of near-surface layers, are obtained.

Keywords: hard II-type superconductors, critical state, numerical integration

Литература

1. E.H. Brandt, Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. I. Flux penetration and magnetization curves, *Phys. Rev. B.*, 1998, Vol. 58, P. 6506–6522.
2. N.D. Kuzmichev, A.A. Shushpanov, M.A. Vasyutin, Mathematical modeling of the magnetic properties of spheroids of hard second kind superconductors in the Bean model, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 2019, 21:3, P. 353–362.
3. N.D. Kuzmichev, A.A. Shushpanov, M.A. Vasyutin, Mathematical modeling of the magnetic properties of axisymmetric hard superconductors of the second kind in the Kim model, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 2020, 22:4, P. 456–462.
4. E.W. Urban, Flux Flow and a New Critical-Current Formula, *Journal of Applied Physics*, 1971, V. 42, №. 1, P. 115-127.
5. V.V. Valkov, B.P. Khrustalev, Magnetization of granular HTSCs in strong fields, *JETP*, 1995, V.107, 1221.
6. M.R. Koblishka, D.M. Gokhfeld, C. Chang, T. Hauet, and U. Hartmann, Pinning force scaling of electrospun Bi-2212 nanowire networks, *Solid State Commun*, 2017, Vol. 264, 16–18.
7. D.M. Gokhfeld, Secondary Peak on Asymmetric Magnetization Loop of Type-II Superconductors, *J Supercond Nov Magn*, 2013, Vol. 26, P. 281–283.
<https://doi.org/10.1007/s10948-012-1741-8>

УДК 004.41

Применение временных рядов для анализа результатов соревнований спортсменов-биатлонистов

Куряев Р. В., Фирсова С. А.

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва

Аннотация: В настоящей работе представлена разработка программной системы для нахождения статистических показателей результатов соревнований спортсменов-биатлонистов, на основе которой с помощью анализа временных рядов прогнозируется точность стрельбы. В качестве примера работы системы были получены статистические прогнозы для спортсменов молодежной сборной Республики Мордовия по биатлону (ГАУ РМ «СШОР по зимним видам спорта»).

Ключевые слова: программная система, цифровизация спорта, биатлон, точность стрельбы, метод скользящего среднего, временные ряды.

Развитие мирового спорта влечет за собой требования к более высоким показателям выступлений спортсменов, например, в биатлоне точная стрельба и умение правильно распределять нагрузку в течение всей гонки являются одними из самых важных факторов, приводящих спортсмена к победе. Путь к победе в современном спорте является отражением двух составляющих — правильно выстроенного тренировочного процесса и мотивации спортсмена.

Процесс цифровизации спорта затрагивает и рассматриваемую тему, а именно, на профильных сайтах можно отслеживать результаты соревнований спортсменов, используя различные сервисы и прикладные программы: анализировать причины неудачных выступлений, а с помощью математического моделирования — прогнозировать результаты предстоящих соревнований [1–3].

В данной работе рассматривается разработка программной системы для нахождения статистических показателей результатов соревнований спортсменов-биатлонистов, на основе которых проводится прогнозирование точности стрельбы с помощью анализа временных рядов. В качестве примера работы системы были получены статистические прогнозы для спортсменов юношеской сборной по биатлону Республики Мордовия (ГАУ РМ «СШОР по зимним видам спорта») [4].

Проектирование системы осуществлялось с использованием UML-диаграмм. Для реализации серверной части системы был выбран язык программирования PHP, такой выбор связан с простотой его использования и отличной работы с парадигмой клиент-сервер. Для реализации клиентской части сервиса был выбран классический набор фронтенд-разработки JavaScript, HTML, CSS, хранение данных производилось в БД MySQL.

В качестве исходных данных были взяты результаты соревнований по биатлону в шести видах: масс-старт, спринт, гонка преследования, индивидуальная гонка, эстафета, смешанная эстафета. Эти данные публикуются в открытом доступе на сайте Союза биатлонистов России (<https://biathlonrus.com>) в трех документах: итоговом протоколе соревнований, аналитике гонки, аналитике стрельбы.

Вначале в программной системе рассчитываются средние показатели точности стрельбы спортсмена из положений стоя и лежа (рис. 1), затем выводятся статисти-

ческие показатели динамики стрельбы (рис. 2).

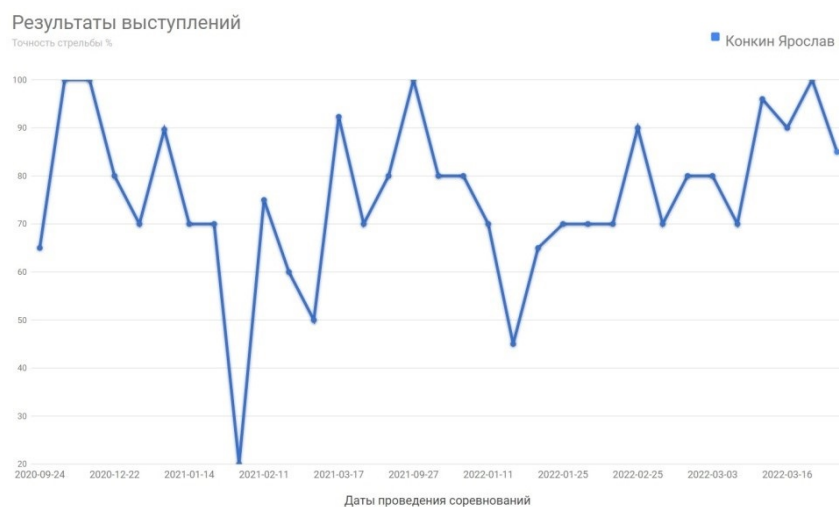


Рис. 1. График точности стрельбы по датам проведения соревнований

Статистические показатели динамики стрельбы по месяцам выступления спортсменов							
t	Точность %	Абс.Прирост (Цепной)	Абс.Прирост (Базисный)	Темп Роста (Цепной)	Темп Роста (Базисный)	Темп Прироста (Цепной)	Темп Прироста (Базисный)
2020/9	89.2857	-	-	-	-	-	-
2020/12	86.6667	-2.62	-2.62	97.07	97.07	-2.93	-2.93
2021/1	50.0000	-36.67	-39.29	57.69	56	-42.31	-44
2021/2	60.0000	10	-29.29	120	67.2	20	-32.8
2021/3	69.5652	9.57	-19.72	115.94	77.91	15.94	-22.09
2021/9	77.2727	7.71	-12.01	111.08	86.55	11.08	-13.45
2021/12	66.6667	-10.61	-22.62	86.27	74.67	-13.73	-25.33
2022/1	40.0000	-26.67	-49.29	60	44.8	-40	-55.2
2022/2	72.5000	32.5	-16.79	181.25	81.2	81.25	-18.8
2022/3	82.4561	9.96	-6.83	113.73	92.35	13.73	-7.65

Рис. 2. Статистические показатели динамики стрельбы по месяцам выступления

Методы прогнозирования, применяемые в программной системе, включают в себя метод скользящих средних (для различных значений l , рис. 3) и моделирование тенденции развития показателей результативности выступлений спортсменов (в данном примере мы рассматриваем точность стрельбы) с помощью построения линейной, показательной и полиномиальной моделей (рис. 4).

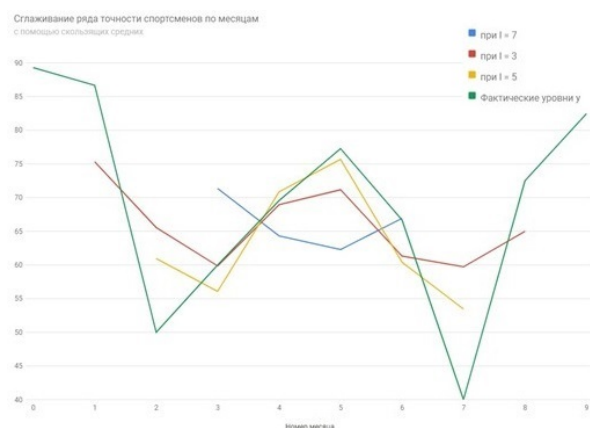


Рис. 3. Скользящие средние стрельбы по месяцам выступления

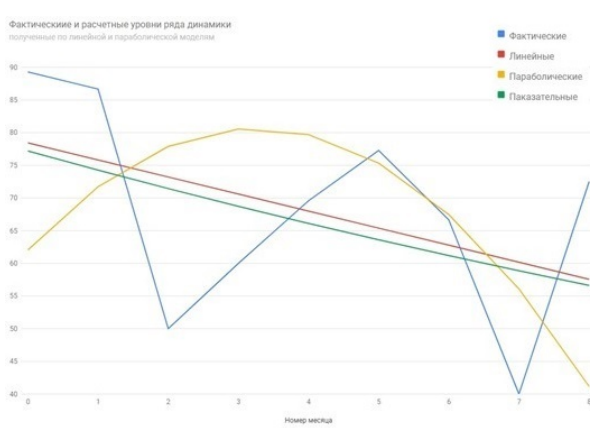


Рис. 4. Моделирование тенденции развития стрельбы

Литература

1. Ермаков А.В., Мякинченко П.Е. Прогнозирование с использованием методов математического моделирования в спорте высших достижений на примере зимних видов спорта // Теория и практика физической культуры. 2021. №2. С. 52-54.
2. Зеленский А.В., Лесникова Ю.Ю. Нейросетевое прогнозирование статистики стрельбы в соревнованиях по биатлону // Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века: Сборник статей по материалам Второй всероссийской научно-практической конференции, проводимой в рамках Пермского естественнонаучного форума «Математика и глобальные вызовы XXI века», Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2017. С. 178-184.
3. Крутиков А.К. Прогнозирование результатов Всемирной зимней Универсиады 2019 с использованием искусственных нейронных сетей // Научное обозрение. Технические науки. 2019. №2. С. 29-33.
4. Куряев Р.В., Фирсова С.А., Нелин О.А. Реализация программной системы для нахождения статистических показателей результатов соревнований спортсменов-биатлонистов (на примере юношеской сборной по биатлону Республики Мордовия) // Тенденции развития науки и образования. 2022. №82-2. С. 34-42. DOI 10.18411/trnio-02-2022-43

MSC 62M10

The use of time series to analyze the results of biathlon athletes' competitions

R. V. Kuryaev, S. A. Firsova

National Research Ogarev Mordovia State University

Abstract: In this paper, we consider a software system developed by the authors for finding statistical indicators of the results of biathlon athletes' competitions, on the basis of which the accuracy of shooting is predicted using time series analysis. As an example of the system's operation, statistical forecasts were obtained for athletes of the youth biathlon team of the Republic of Mordovia (GAU RM «SSHOR for winter sports»).

Keywords: software system, digitalization of sports, biathlon, shooting accuracy, moving average method, time series.

References

1. A.V. Ermakov, P.E. Myakinchenko, Forecasting using mathematical modeling methods in high-performance sports on the example of winter sports, *Theory and practice of physical culture*, 2021, No. 2, P. 52-54.
2. A.V. Zelensky, Yu.Yu. Lesnikova, Neural network forecasting of shooting statistics in biathlon competitions, *Artificial intelligence in solving urgent social and economic problems of the XXI century: A collection of articles based on the materials of the Second All-Russian scientific and practical conference held within the Perm Natural Science Forum "Mathematics and global challenges of the XXI century"*, Perm: Perm State National Research University, 2017, P. 178-184.
3. A. K. Krutikov, Forecasting the results of the World Winter Universiade 2019 using artificial neural networks, *Scientific Review. Technical sciences*, 2019, No. 2, P. 29-33.
4. R.V. Kuryaev, S.A. Firsova, O.A. Nelin, Implementation of a software system for finding statistical indicators of the results of biathlon athletes' competitions (on the example of the youth biathlon team of the Republic of Mordovia), *Trends in the development of science and education*, 2022, No. 82-2, P. 34-42. – DOI 10.18411/trnio-02-2022-43

УДК 519.63

Методика расчета задач радиационной газовой динамики методом частиц

Лазарев А. А., Дерюгин Ю. Н.

ФГУП «РФЯЦ - ВНИИЭФ»

Аннотация: В работе представлена численная методика решения уравнений движения радиационного газа, в основу которой положен метод частиц, а также ее программная реализация с использованием технологий параллельных вычислений. Апробация методики проведена для автомодельных решений задач газовой динамики и теплопереноса.

Ключевые слова: численное моделирование, метод частиц, газовая динамика, радиационный газ.

В настоящее время исследования лазерного термоядерного синтеза во многом основываются на расчетном моделировании процессов, протекающих в лазерных мишенях.

В работе представлена трехмерная методика расчета движения трехтемпературного излучающего газа. Приводятся основные уравнения радиационной газовой динамики и методика их численного решения, построенная на основе метода частиц. Метод частиц в ячейках является одним из методов расщепления, в соответствии с которым расчетный шаг расщепляется на два этапа: эйлеров и лагранжев. На эйлеровом этапе определяется изменение параметров среды за счет сил давления и теплопроводности. На этом этапе в начале решаются уравнения газовой динамики методом сглаженных частиц SPH [1]. Затем, с использованием метода частиц в ячейках определяются новые значения температур компонент. Здесь в расчетной области строится адаптивная сетка, на которой по частицам, находящимся в ячейке, определяются параметры потока. На адаптивной сетке с использованием неявных аппроксимаций решаются уравнения ионно-электронной и электронно-фотонной релаксации, после чего решаются последовательно уравнения фотонной, электронной и ионной теплопроводности. На лагранжевом этапе моделируется конвективный перенос, учитывающий обмен массой, импульсом и энергией между ячейками.

Приводится описание программной реализации методики и распараллеливание вычислений.

Возможности методики иллюстрируются на задачах, имеющих аналитическое решение, которые приведены в [3].

Литература

1. Monaghan J.J. Smoothed Particle Hydrodynamics // Rep. Progr. Phys. 2005. 68(8). 1703.
2. Харлоу Ф.Х. Численные методы частиц в ячейках для задач гидродинамики // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 316-342.
3. Волосевич П.П., Леванов Е.И. Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса. М.: Издательство МФТИ, 1977.

MSC 65D25

The method of calculating of the radiation gas dynamics problems by the particle method

A. A. Lazarev, Yu. N. Deryugin

FSUE «RFNC - VNIIEF»

Abstract: The paper presents a numerical method for solving the equations of radiation gas motion, which is based on the particle method, and its software implementation using parallel computing technologies. The methodology was tested for self-similar solutions to problems of gas dynamics and heat transfer.

Keywords: numerical modeling, particle method, gas dynamics, radiation gas.

References

1. J.J. Monaghan, Smoothed Particle Hydrodynamics, Rep. Progr. Phys., 2005, 68(8), 1703.
2. F.H. Harlow, Numerical methods of particles in cells for problems of hydrodynamics, *Computational methods in hydrodynamics*, Moscow, Mir, 1967, P. 316-342.
3. P.P. Volosevich, E.I. Levanov, Self-similar solutions to problems of gas dynamics and heat transfer, Moscow, MIPT Publishing House, 1977.

УДК 532.529:541.182

Динамика коагуляции частиц в жидкости

Мартынов С. И.

Сургутский государственный университет

Аннотация: В статье представлены результаты численного моделирования динамики коагуляции частиц в вязкой жидкости. Учтены силы парного взаимодействия, определяемые из потенциальной энергии частиц с одним минимумом, и силы гидродинамического взаимодействия. Моделирование проведено с использованием разработанного программного комплекса для численного решения уравнений гидродинамики в приближении малых чисел Рейнольдса и динамики частиц. В работе представлены результаты численного моделирования динамики структур для двух выражений потенциальной энергии взаимодействия.

Ключевые слова: гидродинамическое взаимодействие частиц, потенциальная энергия, динамика, коагуляция.

В настоящей работе моделируется динамика образования коагуляционной структуры в жидкости в результате действия сил притяжения и отталкивания между частицами и их гидродинамического взаимодействия. Структурирование в жидкости и управление этим процессом представляет собой актуальную задачу, связанную как с практикой создания и использования новых наноматериалов с управляемыми свойствами, так и с теоретическими проблемами моделирования таких процессов [1]. Механизм коагуляции частиц рассматривается, как правило, с точки зрения кинетики этого процесса. В то же время именно динамика процесса определяет, какого рода структура частиц появляется в результате коагуляции. Так в работах [2, 3] рассматривается динамика образования цепочечных структур во внешнем магнитном или электрическом поле. В настоящей работе рассматривается динамика коагуляции системы из 24 случайно расположенных частиц. Учитывались парные взаимодействия всех частиц с силами притяжения и отталкивания. В первой системе силы взаимодействия на порядок больше, чем во второй, причем силы отталкивания проявляются на расстоянии в два раза меньшем, чем для второй.

Для моделирования динамики системы частиц со стержнями записываются уравнения движения каждой частицы с учетом всех сил, действующих на нее со стороны всех других частиц, в том числе и силы гидродинамического взаимодействия, а также, в случае необходимости, уравнения вращательного движения с учетом моментов, действующих на частицы. Система уравнений имеет следующий вид:

$$\mathbf{F}_k^i + \mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^h = 0, \quad \mathbf{T}_k^i + \mathbf{T}_k^e + \mathbf{T}_k^h = 0.$$

Здесь $\mathbf{F}_k^h$ – силы, $\mathbf{T}_k^h$ – моменты сил со стороны жидкости, $\mathbf{F}_k^i$, $\mathbf{T}_k^i$ – внутренние, $\mathbf{F}_k^e$, $\mathbf{T}_k^e$ – внешние силы и моменты сил, действующие на частицу с номером k .

При компьютерном моделировании применялся метод подобию [4]. Задавались модельные параметры: размер частиц $\hat{a}$, вязкость несущей жидкости $\hat{\eta}$, величина сил $\hat{F}$, действующих между частицами. Реальные параметры связаны с модельными соотношениями, получаемыми из условия подобию гидродинамических процессов. В первом случае сила парного взаимодействия между частицами, находящимися на расстоянии $\hat{h}$ друг от друга, считалась равной $\frac{10(1 - 1.5\hat{a}/\hat{h})}{\hat{h}^2}$, а во втором –

$$\frac{10(1 - 3\hat{a}/\hat{h})}{\hat{h}^2}.$$

Результаты моделирования представлены на рис. 1 и рис. 2.

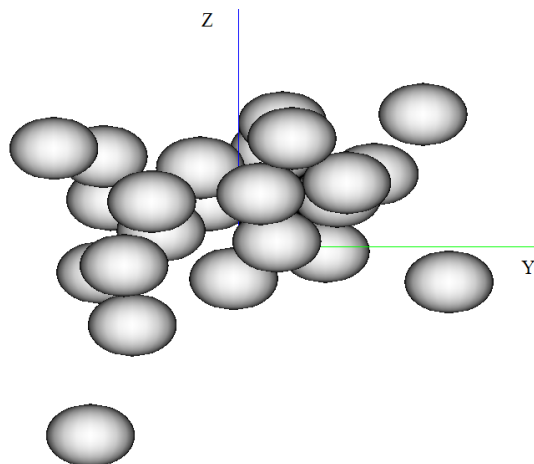


Рис. 1. Образование первой коагуляционной структуры через промежуток времени $\hat{t} = 46$ с.

На рис. 1 изображена получаемая коагуляционная структура в плоскости YZ для первого случая сил взаимодействия между частицами.

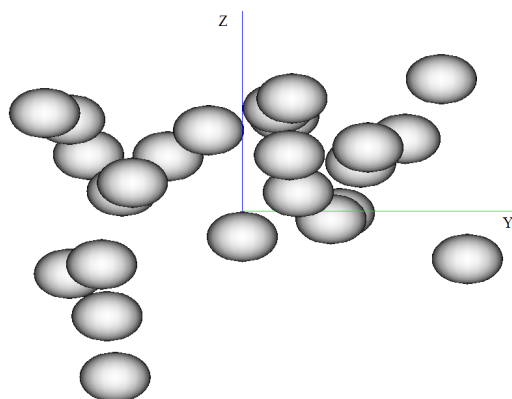


Рис. 2. Образование второй коагуляционной структуры через промежуток времени $\hat{t} = 91$ с.

На рис. 2 изображена получаемая коагуляционная структура в плоскости YZ для второго случая сил взаимодействия между частицами.

Как видно из приведенных рисунков, в рассмотренных случаях образуются разные структуры: в первом случае формируется изотропная хлопьеобразная структура, а во втором – кластер, состоящий из коротких цепочек частиц. Таким образом, результаты работы показывают, что форма структуры существенно зависит от силы взаимодействия между частицами.

Литература

1. Lima E.O., Pereira P. C. N., Löwen H., Apolinario S. W. S. Complex structures generated by competing interactions in harmonically confined colloidal suspensions

// Journal of Physics: Condensed Matter. 2018. Vol. 30, No. 32. 325101.

2. Fertig D., Boda D., Szalai I. A systematic study of the dynamics of chain formation in electrorheological fluids // AIP Advances. 2021. Vol. 11, Issue 2.
3. Manikas K., Vogiatzis G.G., Hütter M., Patrick D. Anderson P.D. Structure formation in suspensions under uniform electric or magnetic field // Multiscale and Multidisciplinary Modeling, Experiments and Design. 2021. Vol. 4. P. 77–97.
4. Martynov S.I., Tkach L.Yu. Simulation of Particle Aggregate Dynamics in a Viscous Fluid // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015. Vol. 55, issue 2. P. 282-290.

MSC 76D07, 76D09, 76D17

Dynamics of coagulation of particles in a fluid

S. I. Martynov

Surgut State University

Abstract: The article presents the results of numerical simulation of the dynamics of particle coagulation in a viscous liquid. The forces of pair interaction, determined from the potential energy of particles with one minimum, and the forces of hydrodynamic interaction were taken into account. The simulation was carried out using the developed software package for the numerical solution of hydrodynamic equations in the approximation of small Reynolds numbers and particle dynamics. The paper presents the results of numerical simulation of the dynamics of structures for two expressions of the potential energy of interaction.

Keywords: hydrodynamic interaction of particles, potential energy, dynamics, coagulation.

References

1. E.O. Lima , P.C.N. Pereira, H. Löwen, S.W.S. Apolinario, Complex structures generated by competing interactions in harmonically confined colloidal suspensions, *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2018, Vol. 30, No. 32, 325101.
2. D. Fertig, D. Boda, I. Szalai, A systematic study of the dynamics of chain formation in electrorheological fluids, *AIP Advances*, 2021, Vol. 11, Issue 2.
3. K. Manikas, G.G. Vogiatzis, M. Hütter, D. Patrick, P.D. Anderson, Structure formation in suspensions under uniform electric or magnetic field, *Multiscale and Multidisciplinary Modeling, Experiments and Design*, 2021, Vol. 4, P. 77–97
4. S.I. Martynov, L.Yu. Tkach, Simulation of Particle Aggregate Dynamics in a Viscous Fluid, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, Vol. 55, Issue 2, P. 282-290.

УДК 519.673

Моделирование дымовой трубы с высоким числом Рейнольдса при помощи методов вычислительной гидродинамики

Мухаметов А. Н., Абдуллов Т. С., Якупов З. Я.

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ

Аннотация: В работе исследуется метод измерения потока в дымовой трубе при наличии турбулентного потока. Метод основан на ультразвуковом измерении потока, который используется в качестве автоматической системы измерения дымовых газов. Рассмотрена типичная конфигурация дымовой трубы и воздушных потоков с применением методов вычислительной гидродинамики (CFD), с помощью программного обеспечения OpenFoam. Показано сильное влияние вихревого (турбулентного) потока на погрешность измерения расхода согласно ГОСТ Р 8-611. Сравниваются различные конфигурации (количество, ориентация и положение) ультразвуковых лучей на предварительно сформированные профили потока при помощи CFD, согласно ГОСТ Р 57700.8-2018 и ГОСТ Р 57700.17-2018.

Ключевые слова: измерение расхода в дымовых трубах, измерение выбросов, турбулентный поток, ультразвуковой расходомер, CFD.

1. Введение

Измерение расхода в дымовых трубах является важной частью определения годовых массовых выбросов загрязняющих веществ, направляемых в атмосферу. Постановление правительства РФ от 16.11.2020 г. № 1847 устанавливает пределы допускаемой погрешности измерения скорости газопылевых потоков – 25 %. Чтобы соответствовать требованиям об учете показателей выбросов, на дымовые трубы устанавливают расходомеры. Неравномерный диаметр трубы, местные сопротивления и сложная геометрия влияют на полученные показания расходомеров. В данной работе анализируются профили скорости при различной ориентации измерительного луча, рассчитывается погрешность измерения расхода ультразвуковым расходомером.

2. Ультразвуковое измерение расхода

Установка прибора ультразвукового измерения представлена на рис. 1. Ультразвуковой датчик устанавливается на стенке трубы один выше по течению, другой ниже. Согласно [1] для определения времени распространения ультразвукового сигнала из датчика выше по течению τ_{AB} к нижнему датчику и от нижнего датчика τ_{BA} к расположенному выше, используются следующие формулы:

$$\tau_{AB} = \frac{l}{(c^2 - w^{-2} \sin^2 \phi)^{0.5} + w \cos \phi};$$
$$\tau_{BA} = \frac{l}{(c^2 - w^{-2} \sin^2 \phi)^{0.5} - w \cos \phi};$$

Здесь l – длина координаты вдоль луча, c – скорость звука в газе, w – средняя скорость потока и ϕ – угол установки расходомера относительно потока.

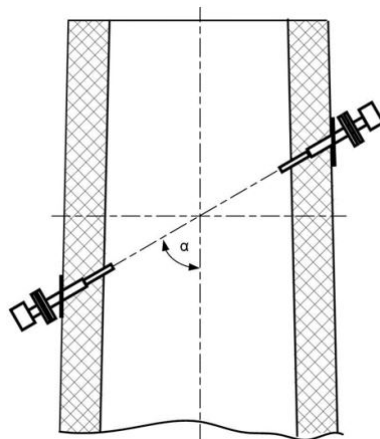


Рис. 1. Ультразвуковой расходомер в трубе

Время τ_{AB} короче, чем время τ_{BA} с момента отправления сигнала, следовательно различие во времени коррелирует со скоростью потока. Зная об отклонениях геометрических параметров от их номинальных значений, вследствие производственных допусков и допущениями в принятой модели расчета средней скорости газа в измерительном сечении, применяется корректирующий или калибровочный коэффициент. В общем случае объемный расхода газа при рабочих условиях с учетом калибровочного коэффициента может быть вычислен по формуле:

$$q_v = K_f \frac{l}{2 \cos \phi} \left(\frac{1}{\tau_{AB}} - \frac{1}{\tau_{BA}} \right).$$

Здесь K_f – корректирующий или калибровочный коэффициент.

3. CFD-моделирование потока

В простейшем случае полностью развитого турбулентного потока осевой профиль потока может быть предсказан [2]. Однако присутствие нарушений потока выше по течению, может исказить профиль и привести к возникновению неосевых компонентов скоростей. Именно это приводит к погрешности определения расхода, поскольку не существует способа вычислить общий калибровочный коэффициент для столь большого разнообразия всевозможных полей потока. В данном случае количество расходомеров может быть увеличено, а скорость потока может быть оценена по средневзвешенной скорости на измеряемом отрезке пути.

В данном исследовании рассматривается вертикальная дымовая труба. Радиусы основания и выходного отверстия составляют 4.9 м и 3.5 м соответственно. Высота всей исследуемой модели составляет более 85 м. Входное отверстие представляет собой разветвленный тройник с прямоугольным сечением (рис. 2).

Приняты следующие граничные условия: поле скоростей равно 3 м/с и 6 м/с на входных отверстиях, атмосферное давление на выходном отверстии, применены простеночные функции на стенках, а значения кинетической энергии турбулентности и удельной скорости рассеивания турбулентности рассчитан относительно интенсивности турбулентности равной 3.8 %. Тепловые эффекты, влияющие на поток, не учитываются.

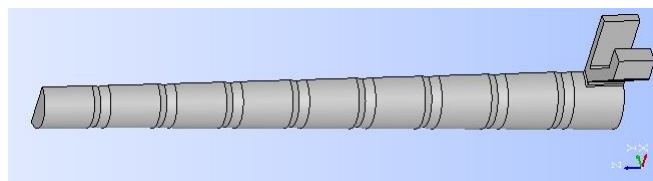


Рис. 2. Геометрия исследуемой дымовой трубы

Для CFD-моделирования используется бесплатный пакет с открытым исходным кодом OpenFoam. Данное программное обеспечение содержит инструменты для всех этапов создания CFD: геометрия, генератор сетки, решатель и инструменты пост-процессинга для анализа данных и их визуализации.

Вычислительная сетка представляет из себя неструктурированную сетку. Для достижения полной сходимости решения были проверены несколько параметров плотности сетки. Была выбрана сетка № 3.

Таблица 1. Параметры сетки

№	кол-во ячеек	y+ для 3 м/с	размер ячеек у стенки	размер ячеек в центре
1	2.5 М	1	0.11 мм	50 мм
2	3.5 М	1	0.11 мм	40 мм
3	6 М	1	0.11 мм	20 мм

При предварительном исследовании предусматривает измерения профиля потока в двух режимах – «а» (ожидается наиболее равномерный профиль потока, т. е. максимально возможная скорость потока с наименьшим количеством препятствий на пути потока) и «б» (с наиболее низким расходом и максимальным количеством препятствий). Другими словами, цель состояла в том, чтобы проверить максимально возможный диапазон различных профилей потока, которые могут появиться во время эксплуатации трубы и сравнить их.

Исследованы результаты для высоты плоскости измерения скорости в диапазоне от 17.5 м до 83 м над основанием трубы. Руководство по эксплуатации на ультразвуковые расходомеры регламентируют прямолинейные участки до расходомера в диапазоне от $5D_N$ до $20D_N$, где D_N – это гидравлический диаметр. В данном случае руководство по эксплуатации, регламентирует $8 D_N$, что соответствует высоте в 70 м.

4. Погрешность измерения ультразвукового расходомера

Для выбора оптимального места установки расходомера исследовались такие параметры как: асимметрия потока, коэффициент амплитуды и отклонение скорости потока. Диапазон отклонений измеренных параметров от теоретического профиля скорости имеет следующие значения: для асимметрии потока от 25 % до 5 %, коэффициент амплитуды изменяется от 32 % до 2 %, а скорость потока от 46 % до 11 %, для высот 12.5 м и 70 м соответственно. В данной работе рассматриваются ультразвуковые лучи, наклоненные под углом в 60° к горизонтальной плоскости, как показано на рис. 3. Симметричное расположение завихрения показанное на рис. 4 указывает что конфигурация расположения измерительного луча перпендикулярно входному каналу дает наибольшее отклонение по всем трём показателям и по

всей длине измерительного канала. На рис. 5 показаны графики с профилями скорости при разных конфигурациях установки измерительного луча, при скорости 3 м/с. Погрешность рассчитывается без использования калибровочного коэффициента для полностью развитого профиля. Этот фактор может немного улучшить значение погрешности, но он не влияет на сравнение профилей [3].

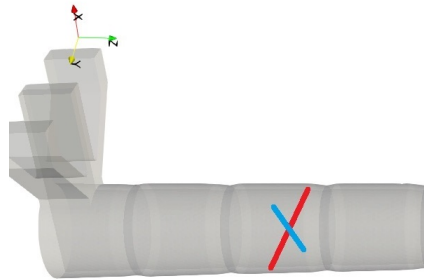


Рис. 3. Расположение измерительных лучей

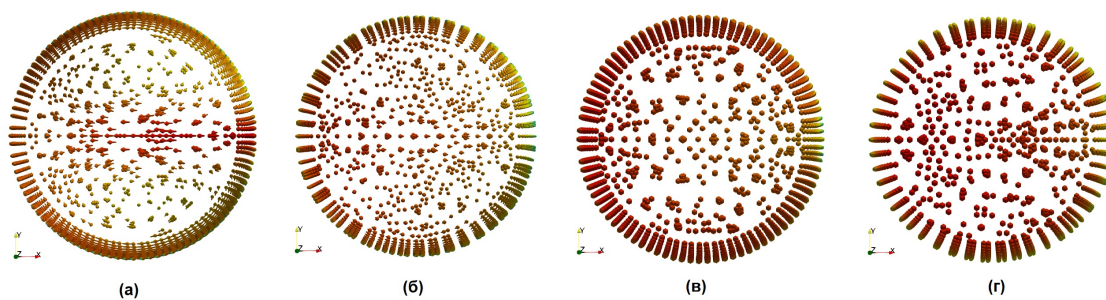


Рис. 4. Структура завихрений на высотах (а) 17.5 м, (б) 38.5 м, (в) 53 м, (г) 68 м

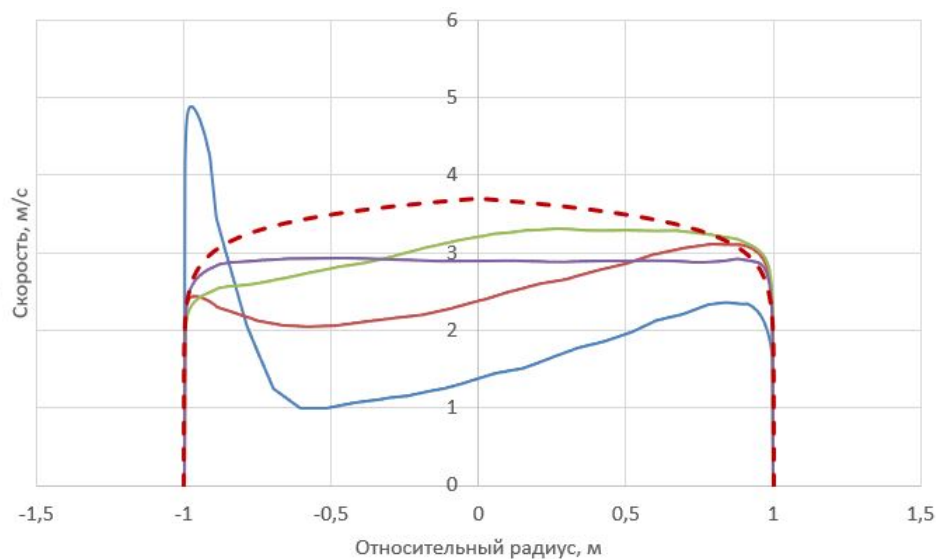


Рис. 5. График профилей скорости, пунктирной линией указан теоретический профиль скорости

На рис. 6 можно наблюдать как изменение высоты сказывается на распределение скоростей. Результаты изменения погрешности от высоты показаны на рис. 7. Значе-

ния рассчитаны через относительный радиус и относительную скорость на каждой из высот с учетом изменения профиля скорости от изменения внутреннего радиуса дымовой трубы. Указанные значения являются максимальными значениями при скоростях 3 м/с и 6 м/с.

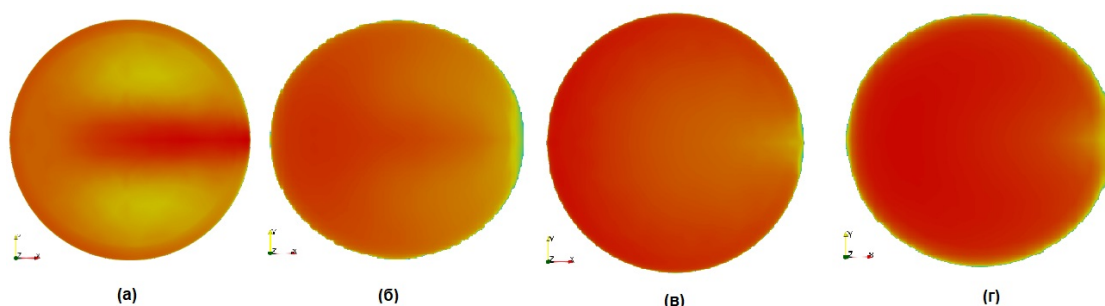


Рис. 6. Распределение скоростей на высотах (а) 17.5 м, (б) 38.5 м, (в) 53 м, (г) 68 м

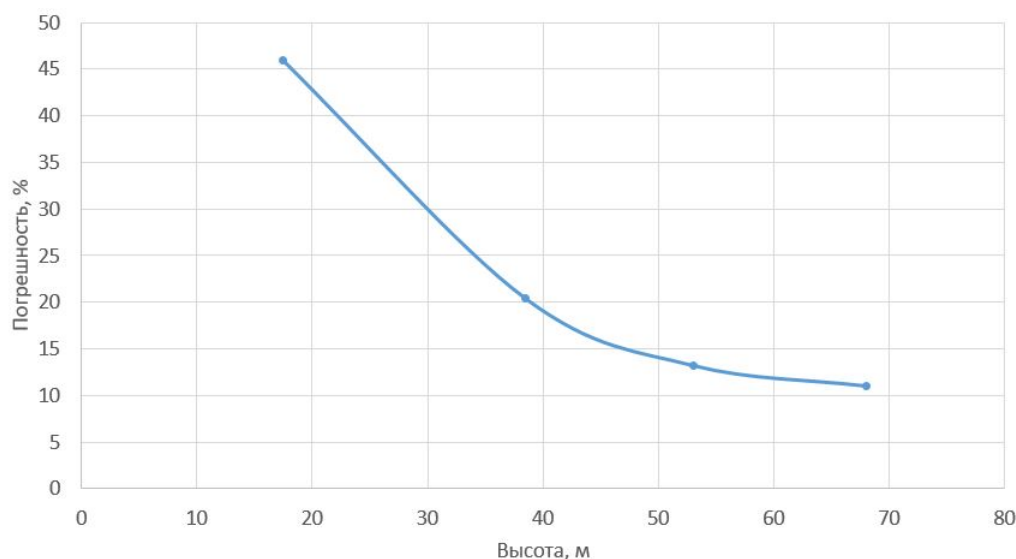


Рис. 7. График зависимости погрешности от высоты

5. Заключение

При помощи CFD-моделирования исследован метод измерения расхода в дымовой трубе на предмет дополнительной погрешности при наличии турбулентных завихрений потока, с ультразвуковым расходомером. Программное обеспечение OpenFoam использовалось для расчета полей скоростей в дымовой трубе при скорости газа на входе 3 м/с и 6 м/с. Исследована погрешность измерения расхода в дымовой трубе. Показана возможность выбрать лучшее место установки расходомера с использованием предварительного исследования профилей скорости. Оценка погрешности измерения расхода при различных ориентациях и высотах установки расходомера может улучшить дополнительную погрешность измерения до 35 %.

Литература

1. ГОСТ Р 8.611-2013 Расход и количество газа. Методика(метод) измерений с помощью ультразвуковых преобразователей расхода.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
3. Geršl J., Knotek S., Belligoli Z., Dwight R.P., Robinson R.A., Coleman M.D. Flow rate measurement in stacks with cyclonic flow – Error estimations using CFD modelling // *Measurement*. 2018. Vol. 129. P. 167–183.
4. Мухаметов А.Н., Абудллов Т.С., Якупов З.Я. Расчет многоканальной диафрагмы на измерительном трубопроводе // Физико-математические, естественно-научные и социальные аспекты современного развития науки, техники и общества: материалы I Городской молодёжной научной конференции. Казань. С. 56–58.
5. Ramon S.M., Guilherme S.A., Márcio F.M., Rogério R. Sensitivity analysis for numerical simulations of disturbed flows aiming ultrasonic flow measurement // *Measurement*. 2021. Vol. 185. P. 110–115.

MSC 76D55

Modeling a high Reynolds number chimney using Computational Fluid Dynamics

A. N. Mukhametov, T. S. Abdulloev, Z. Ya. Yakupov

Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev – KAI

Abstract: A method for measuring the flow in a chimney in the presence of turbulent flow is being investigated in the article. The method is based on ultrasonic flow measurement, which is used as an automatic flue gas measurement system. A typical chimney and air flow configuration is considered using computational fluid dynamics (CFD) simulations using the OpenFoam software. A strong influence of vortex (turbulent) flow on the flow measurement error according to GOST R 8-611 is shown. Different configurations (number, orientation and position) of ultrasonic beams are compared on pre-formed flow profiles using CFD, according to GOST R 57700.8-2018 and GOST R 57700.17-2018.

Keywords: chimney flow measurement, emission measurement, turbulent flow, ultrasonic flow meter, CFD

References

1. GOST R 8.611-2013 Consumption and quantity of gas. Technique (method) of measurements with the help of ultrasonic flow transducers.
2. L.G. Loitsyansky, Mechanics of fluid and gas, M ., Nauka, 1973.
3. J. Geršl, S. Knotek, Z. Belligoli, R.P. Dwight, R.A. Robinson, M.D. Coleman, Flow rate measurement in stacks with cyclonic flow – Error estimations using CFD modelling, *Measurement*, 2018, Vol. 129, P. 167–183.

4. A.N. Mukhametov, T.S. Abudllov, Z.Ya. Yakupov, Calculation of a multichannel diaphragm on a measuring pipeline, *Physical-mathematical, natural-science and social aspects of the modern development of science, technology and society: materials of the I City Youth Scientific Conference*, Kazan, P. 56-58.
5. S.M. Ramon, S.A. Guilherme, F.M. Márcio, R. Rogério, Sensitivity analysis for numerical simulations of disturbed flows aiming ultrasonic flow measurement, *Measurement*, 2021, Vol. 185, P. 110–115.

УДК 512.64

Об алгебро-геометрических свойствах циклических подпространств линейных операторов

Никонов В. И.

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва

Аннотация: В работе исследуются алгебраические и геометрические свойства циклических подпространств относительно линейных операторов, возникающих при исследовании линейных систем управления. Полученные свойства выражены в терминах минимальных аннулирующих многочленов суммы и пересечения соответствующих циклических подпространств. Использование полученных результатов позволяет выбрать искомое управляющее воздействие для решения задач частичной устойчивости.

Ключевые слова: линейный оператор, циклическое подпространство, минимальный аннулирующий многочлен.

В работе представлены результаты исследований, начатых в [1, 2]. Опираясь на [3, 4], исследованы взаимосвязи базисов двух циклических подпространств с минимальными аннулирующими многочленами этих подпространств относительно заданного линейного оператора.

При исследовании различных характеристик линейных систем управления возникает задача выбора управляющего воздействия таким образом, чтобы параметры системы удовлетворяли требуемым характеристикам. Изучение свойств системы управления позволяет выбрать управляющее воздействие так, чтобы динамика системы определялась заданными характеристиками.

Однако, при решении задач частичной устойчивости, управляемости, стабилизации возникают определенные трудности. Так, например, при решении задач частичной устойчивости, если система уже является устойчивой относительно каких-то переменных и в предположении, что система не является вполне управляемой, то нет необходимости воздействовать на все компоненты фазового вектора системы. Возникает задача определения тех компонент фазового вектора, воздействие на которые позволяет все же добиться устойчивости данной системы.

Рассмотрим линейный оператор

$$\mathcal{D} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}.$$

где $\mathcal{L}$ — конечномерное линейное пространство.

Пусть $x \neq 0$ — произвольный элемент линейного пространства $\mathcal{L}$. Тогда в силу конечномерности пространства $\mathcal{L}$ найдется такое число $s \in N$, такое что векторы $x, \mathcal{D}x, \dots, \mathcal{D}^{s-1}x$ — линейно независимы, а вектор $\mathcal{D}^s x$ является линейной комбинацией предыдущих векторов: $\mathcal{D}^s x = -\gamma_s \mathcal{D}^{s-1}x - \dots - \gamma_2 \mathcal{D}x - \gamma_1 x$. Таким образом,

$$\sigma(\lambda) = \lambda^s + \gamma_s \lambda^{s-1} + \dots + \gamma_2 \lambda + \gamma_1,$$

где $0 \leq s \leq \dim \mathcal{L}$, является минимальным аннулирующим многочленом вектора x относительно линейного оператора $\mathcal{D}$.

Тогда справедливо соотношение

$$\sigma(\mathcal{D})x = 0.$$

Пусть a и b заданные ненулевые элементы линейного пространства $\mathcal{L}$.

Рассмотрим циклические подпространства U_a и U_b оператора $\mathcal{D}$, порождаемые элементами a и b :

$$U_a = \langle a, \mathcal{D}a, \dots, \mathcal{D}^{m-1}a \rangle, \dim U_a = m,$$

$$U_b = \langle b, \mathcal{D}b, \dots, \mathcal{D}^{n-1}b \rangle, \dim U_b = p.$$

Таким образом, минимальные аннулирующие многочлены элементов a и b имеют, соответственно, вид

$$\sigma_a(\lambda) = \lambda^m + \alpha_m \lambda^{m-1} + \dots + \alpha_2 \lambda + \alpha_1,$$

$$\sigma_b(\lambda) = \lambda^p + \beta_p \lambda^{p-1} + \dots + \beta_2 \lambda + \beta_1.$$

Рассмотрим подпространства $U_a + U_b$ и $U_a \cap U_b$.

Предложение 1. Если $\dim(U_a \cap U_b) = k > 0$, то в подпространстве $U_a + U_b$ подпространство

$$U_a \cap U_b = \langle \mathcal{D}^{m-k}a, \mathcal{D}^{m-k+1}a, \dots, \mathcal{D}^{m-1}a \rangle = \langle \mathcal{D}^{p-k}b, \mathcal{D}^{p-k+1}b, \dots, \mathcal{D}^{p-1}b \rangle,$$

является инвариантным подпространством линейного оператора $\mathcal{D}$.

Следствие 1. Исходя из условий леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} U_a + U_b &= \left\langle \underbrace{a, \mathcal{D}a, \dots, \mathcal{D}^{m-k-1}a}_{m-k}, \underbrace{\mathcal{D}^{m-k}a, \mathcal{D}^{m-k+1}a, \dots, \mathcal{D}^{m-1}a}_k, \underbrace{b, \mathcal{D}b, \dots, \mathcal{D}^{p-k-1}b}_{p-k} \right\rangle = \\ &= \left\langle \underbrace{a, \mathcal{D}a, \dots, \mathcal{D}^{m-k-1}a}_{m-k}, \underbrace{\mathcal{D}^{p-k}b, \mathcal{D}^{p-k+1}b, \dots, \mathcal{D}^{p-1}b}_k, \underbrace{b, \mathcal{D}b, \dots, \mathcal{D}^{p-k-1}b}_{p-k} \right\rangle, \\ \dim(U_a + U_b) &= m - k + k + p - k = m + p - k. \end{aligned}$$

Очевидно, что подпространство

$$U_a \cap U_b = \langle \mathcal{D}^{m-k}a, \mathcal{D}^{m-k+1}a, \dots, \mathcal{D}^{m-1}a \rangle$$

является инвариантным циклическим подпространством относительно оператора $\mathcal{D}$ порождаемым элементом $c = \mathcal{D}^{m-k}a$. При этом

$$U_a \cap U_b = \langle c, \mathcal{D}c, \dots, \mathcal{D}^{k-1}c \rangle.$$

Тогда минимальный аннулирующий многочлен этого циклического подпространства имеет вид:

$$\sigma_c(\lambda) = \lambda^k + \delta_k \lambda^{k-1} + \dots + \delta_2 \lambda + \delta_1.$$

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{B}$ сужение линейного оператора $\mathcal{D}$ на подпространство $U_a + U_b$, т.е. $\mathcal{B}x = \mathcal{D}x, x \in U_a + U_b$. Тогда в базисе

$$e_1 = \mathcal{D}^{m-k}a, \dots, e_k = \mathcal{D}^{m-1}a, e_{k+1} = a, e_{k+2} = \mathcal{D}a, \dots, e_m = \mathcal{D}^{m-k-1}a,$$

$$e_{m+1} = b, e_{m+2} = \mathcal{D}b, \dots, e_{m+p-k} = \mathcal{D}^{p-k-1}b,$$

матрица линейного оператора $\mathcal{B}$ имеет вид:

$$B_e = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\delta_1 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & -\kappa_1 \\ 1 & \cdots & 0 & -\delta_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -\kappa_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\delta_k & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -\kappa_k \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом, характеристический многочлен оператора $\mathcal{B}$ имеет вид:

$$\chi_B(\lambda) = \lambda^{m+p-2k} \sigma_c(\lambda) = \lambda^{m+p-k} + \delta_k \lambda^{m+p-k-1} + \dots + \delta_2 \lambda^{m+p-2k+1} + \delta_1 \lambda^{m+p-2k}.$$

Следствие 2. Если $U_a \cap U_b = 0$, то $U_a + U_b = U_a \oplus U_b$. При этом матрица оператора $\mathcal{B}$ в базисе

$$e_1 = a, \mathcal{D}a, \dots, e_m = \mathcal{D}^{m-1}a, e_{m+1} = b, e_{m+2} = \mathcal{D}b, \dots, e_{m+p} = \mathcal{D}^{p-1}b,$$

имеет вид:

$$B_e = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\alpha_m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\beta_2 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\beta_p \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен оператора $\mathcal{B}$ представим в виде:

$$\chi_B(\lambda) = \sigma_a(\lambda) \sigma_b(\lambda).$$

Литература

1. Никонов В.И. К частичной устойчивости линейных систем относительно заданной компоненты фазового вектора // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 23, № 1. С. 43–57.

2. Никонов В.И. Геометрический аспект устойчивости линейных систем относительно части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 2. С. 95–99.
3. Воротников В. И., Румянцев В. В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. Научный мир, 2001. 320 с.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц М.: Наука, 1967. 576 с.

MSC 47A15

On algebro-geometric properties of cyclic subspaces of linear operators

V. I. Nikonov

National Research Ogarev Mordovia State University

Abstract: The algebraic and geometric properties of cyclic subspaces with respect to linear operators, which arise in the study of linear control systems, are investigated. The resulting properties are expressed in terms of the minimal annihilating polynomials of the sum and intersection of the corresponding cyclic subspaces. The use of the obtained results allows one to choose the desired control action for solving problems of partial stability.

Keywords: linear operator, cyclic subspace, minimal annihilating polynomial.

References

1. V.I. Nikonov, On the partial stability of linear systems with respect to a given component of the phase vector, *Journal of the Middle Volga Mathematical Society*, 2017, 23, 1, P. 43-57.
2. V.I. Nikonov, Geometric aspect of stability of linear systems with respect to part of the variables, *Journal of the Middle Volga Mathematical Society*, 2011, 13, 2, P. 95-99.
3. V.I. Vorotnikov, V.V. Rumyantsev, Stability and control with respect to the coordinates of the phase vector of dynamical systems: theory, methods and applications, Scientific world, M, 2001, 320 p.
4. F.R. Gantmakher, The theory of matrice, Nauka, M, 1967, 576 p.

УДК 004.89

Разработка модели распознавания разнородных объектов на основе вложенных методов машинного обучения

Новикова К. Н., Новикова С. В.

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.
Туполева-КАИ

Аннотация: В статье предложен метод идентификации объектов в случае, когда их тип (природа, происхождение) заранее не известны. В существующих системах идентификации или распознавания, как правило происхождение или общий тип объектов заранее известен. К примеру, в систему подаются зашифрованные цифровые кардиограммы, и система должна выявить патологию. Или на вход системы подаются изображения отпечатков пальцев, и задача модели состоит в определении их владельцев. Ситуации, когда тип идентифицируемого объекта не известен, практически не встречаются. В данной работе предложена двухуровневая интеллектуальная модель, позволяющая на первом этапе своего функционирования выявить тип объекта (например, является ли объект изображением, зашифрованной кардиограммой, показаниями телеметрии и пр.), а на втором определить непосредственно его вид (если объект – кардиограмма, необходимо определить патологию). Первый уровень включает кластеризующую модель, работающую по алгоритму k-средних. Второй уровень образует ансамбль моделей типа сверточных нейронных сетей CNN. Структура сверточных сетей определяется индивидуально для каждого выделенного на предыдущем уровне кластера (типа объекта).

Ключевые слова: разнотипные объекты, идентификация объектов, кластеризация объектов, модели машинного обучения, вложенные модели.

1. Введение

В настоящее время задача распознавания (идентификации) объектов по входному набору признаков встречается во множестве областей науки и техники. В первую очередь это касается распознавания изображений, когда набором определяющих тип (класс) объекта характеристик является трехмерная матрица пикселей RGB [1]. Также в литературе описаны методы распознавания состояния двигателей внутреннего сгорания по вектору выходных характеристик [2], идентификации состояния пациентов по набору биометрических показателей [3], идентификация состояния окружающей среды по комплексу мониторинговых и метеорологических показателей [4] и др.

Однако в описанных методах, как правило, все объекты и классы, подлежащие распознаванию, изначально относятся к одной, заранее заданной области. Например, в задаче распознавания дорожных знаков заранее известно, что на входы модели будут подаваться изображения дорожного полотна и прилегающих непосредственно к дороге изображений, но мы не ожидаем увидеть, например, изображения отпечатков пальцев. В задачах распознавания состояния пациента заранее известен набор входных характеристик биометрических показателей человека с областями их воз-

можных значений и т. п.

2. Задача исследования

В данной работе предлагается метод разработки модели, способной идентифицировать конкретные объекты (назовем их *виды объектов*) произвольной природы с высокой точностью, при этом заранее не известны ни возможные области происхождения объектов (назовем их *типы объектов*), ни количество таких областей-типов. Единственным требованием к данным, поступающим на вход разрабатываемой модели, является единая размерность векторов характеристик идентифицируемых элементов, что может быть достигнуто применением специальных методов предобработки и масштабирования данных [5].

3. Разработка метода решения задачи идентификации разнородных объектов

Для решения задачи предлагается строить двухуровневую вложенную интеллектуальную модель, на первом уровне которой осуществляется «грубая обработка» данных, позволяющая выявить конкретные наборы типов объектов, а на втором уровне происходит точное распознавание класса объекта внутри выделенных на предыдущем этапе типов.

Так как на первом этапе количество и вид определяемых типов не известны, а сами типы будут выявляться из набора подаваемого на вход смешанного набора данных, задачу первого этапа можно рассматривать как задачу кластеризации. В качестве модели кластеризации предлагается использовать. В качестве модели кластеризации предлагается использовать метод k-means, который относится к методам машинного обучения (ML – machine learning). В отличие от методов иерархической кластеризации, он позволяет проводить обучение и дообучение на вновь поступивших в систему данных без полной перестройки всей модели, в то время как иерархические кластеризующие деревья при появлении даже одного нового вектора требуют проводить всю кластеризацию заново. Нейронные сети Кохонена являются также хорошими кандидатами на роль кластеризующего алгоритма первого уровня вложенной модели, однако они проигрывают алгоритму k-средних в быстродействии без значительного выигрыша в точности. В литературе описано, что сети Кохонена плохо справляются с кластеризацией векторов большой размерности, как, например, графические изображения [6]. Тогда как алгоритм k-means не чувствителен к размерности кластеризуемых объектов [7].

На втором этапе в распоряжении исследователей уже существуют выделенные группы – типы объектов. Поэтому для распознавания объекта внутри выделенного типа целесообразно использовать модели, хорошо зарекомендовавшие себя в задачах идентификации и классификации. Такими моделями, безусловно, являются сверточные нейронные сети (Convolutional Neural Network – CNN), также, как и алгоритм k-средних, относящиеся к группе методов ML. Несмотря на то, что подавляющее число областей их применения так или иначе касается распознавания графических изображений [8], сети данной топологии широко применяются и в других областях. Например, модели машинного обучения CNN используются для распознавания аудиосигналов [9], состояния объектов окружающей среды [10], и даже прогнозирования успешности шахматных позиций [11]. Подобная универсальность позволяет рекомен-

довать данную модель для второго уровня разрабатываемой системы при условии изначальной неопределенности природы входных векторов для идентификации.

Таким образом, модель глубокого машинного обучения для распознавания разнородных объектов можно представить как вложенную двухуровневую систему следующего вида (рис. 1).

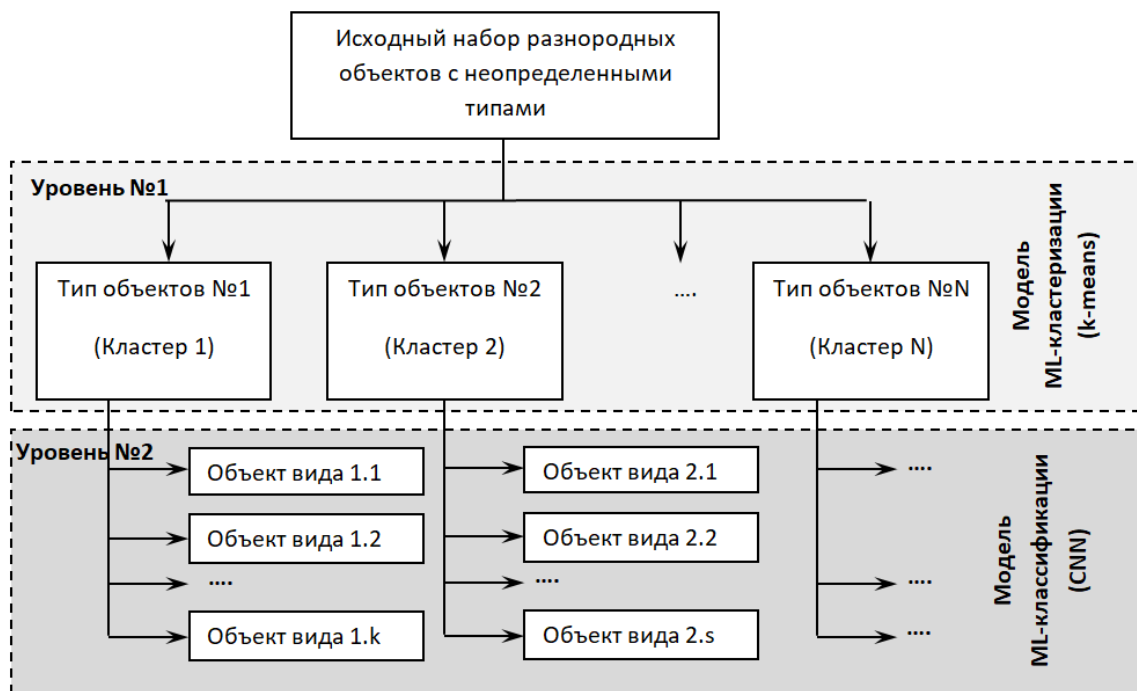


Рис. 1. Структура двухуровневой вложенной модели глубокого машинного обучения для распознавания объектов разнородных типов.

В соответствии с теорией машинного обучения, модель проходит два этапа жизненного цикла – обучение и использование.

На этапе обучения следует выполнить следующие шаги:

Для Уровня №1:

Шаг 1.1. Подготовка исходных данных для обучения: предобработка и масштабирование для приведения к единой размерности.

Шаг 1.2. Добавление к исходным данным для обучения меток типов данных, если в исходном наборе данных таковые отсутствуют.

Шаг 1.3. Соккрытие меток типов данных для исключения их влияния на процесс обучения – кластеризации исходного набора данных.

Шаг 1.4. Самообучение модели глубокого машинного обучения первого уровня (Этапа №1) по алгоритму k-means на имеющемся обучающем наборе данных (без разметки типов).

Шаг 1.5. Добавление скрытых ранее меток типов данных к данным каждого выделенного кластера.

Шаг 1.6. Анализ выделенных в результате кластеризации групп (кластеров). Определение меток классов – типов групп данных на основе меток типов данных. Кластеру присваивается тип данных, метка которого преобладает в присутствующих в кластере данных.

Для Уровня №2:

Шаг 2.1. Для каждого выделенного типа данных построить собственную модель глубокого машинного обучения типа CNN.

Шаг 2.2. Разметить данные каждого кластера (каждого типа), приписав каждому набору метку конкретного вида объекта.

Шаг 2.3. Обучить каждую модель CNN на данных соответствующего типа с предоставленными метками видов объектов внутри типа.

Схематично разработанный алгоритм может быть представлен в виде (рис. 2):

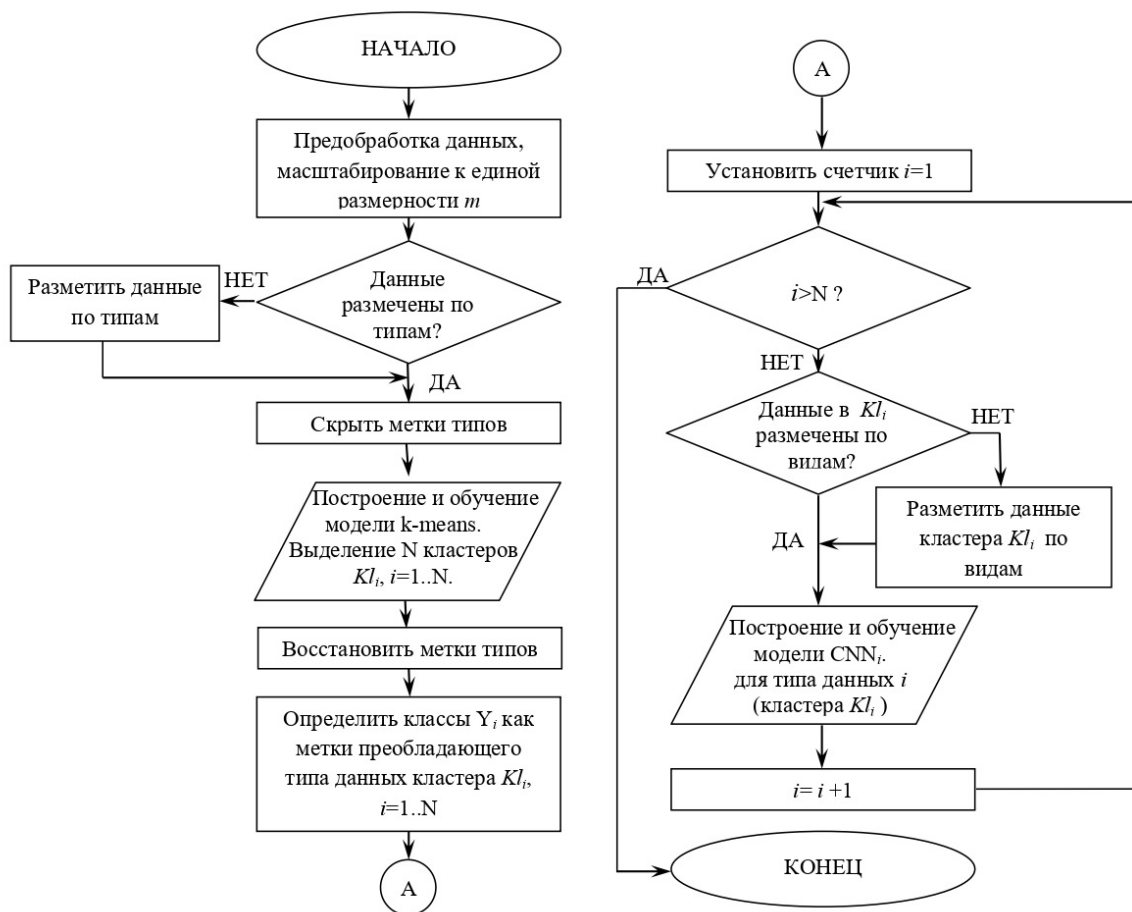


Рис. 2. Структурная схема построения и обучения двухуровневой вложенной модели идентификации разнотипных объектов.

На этапе использования вложенной модели распознавания разнородных объектов:

Шаг 1. Получить входной вектор данных – параметров для идентификации. При необходимости привести его к размерности, предусмотренной в модели, методами предобработки и масштабирования.

Шаг 2. Подать данные на вход обученной модели k-means первого уровня. Проанализировать кластер, в который его распределила модель k-means - определить тип объекта.

Шаг 3. Подать данные на вход модели CNN, обученной для определенного на предыдущем шаге типа объекта.

Шаг 4. Определить вид объекта согласно выходу нейронной сети CNN.

Разработанный алгоритм схематично может быть представлен в виде рис. 3.

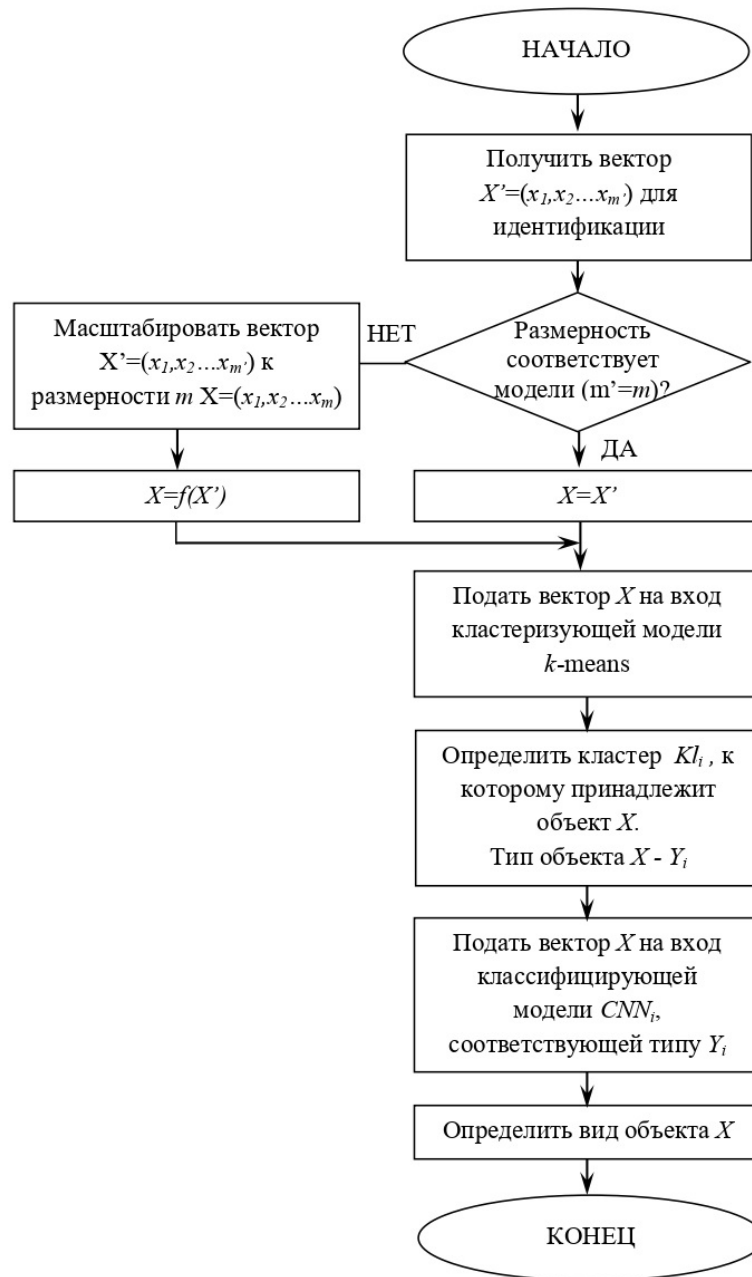


Рис. 3. Структурная схема использования двухуровневой вложенной модели идентификации разнотипных объектов.

4. Практическая реализация разработанной модели

В качестве практически используемых алгоритмов реализации модели для этапа кластеризации разработан вариант алгоритма k-means структуры, представленной на рис. 4.

В качестве алгоритма классификации отобрана нейронная сеть CNN парадигмы AlexNet. Для увеличения точности распознавания на этапе построения модели в стан-

дартный алгоритм были внесены модификации путем добавления слоёв нормализации BatchNormalization. Итоговая структура модифицированной модели приведена на рис. 5.

В процессе разработки второго уровня вложенной интеллектуальной модели сеть данной конфигурации будет строиться для каждого выделенного на первом уровне кластера. При этом параметры сети будут подбираться индивидуально на основании свойств данных, образующих кластер (тип). В процессе функционирования сеть будет определять вид объекта для выделенного типа.

В качестве языка программирования на основании проведенного исследования сравнительных характеристик и анализа альтернатив был выбран язык Python.

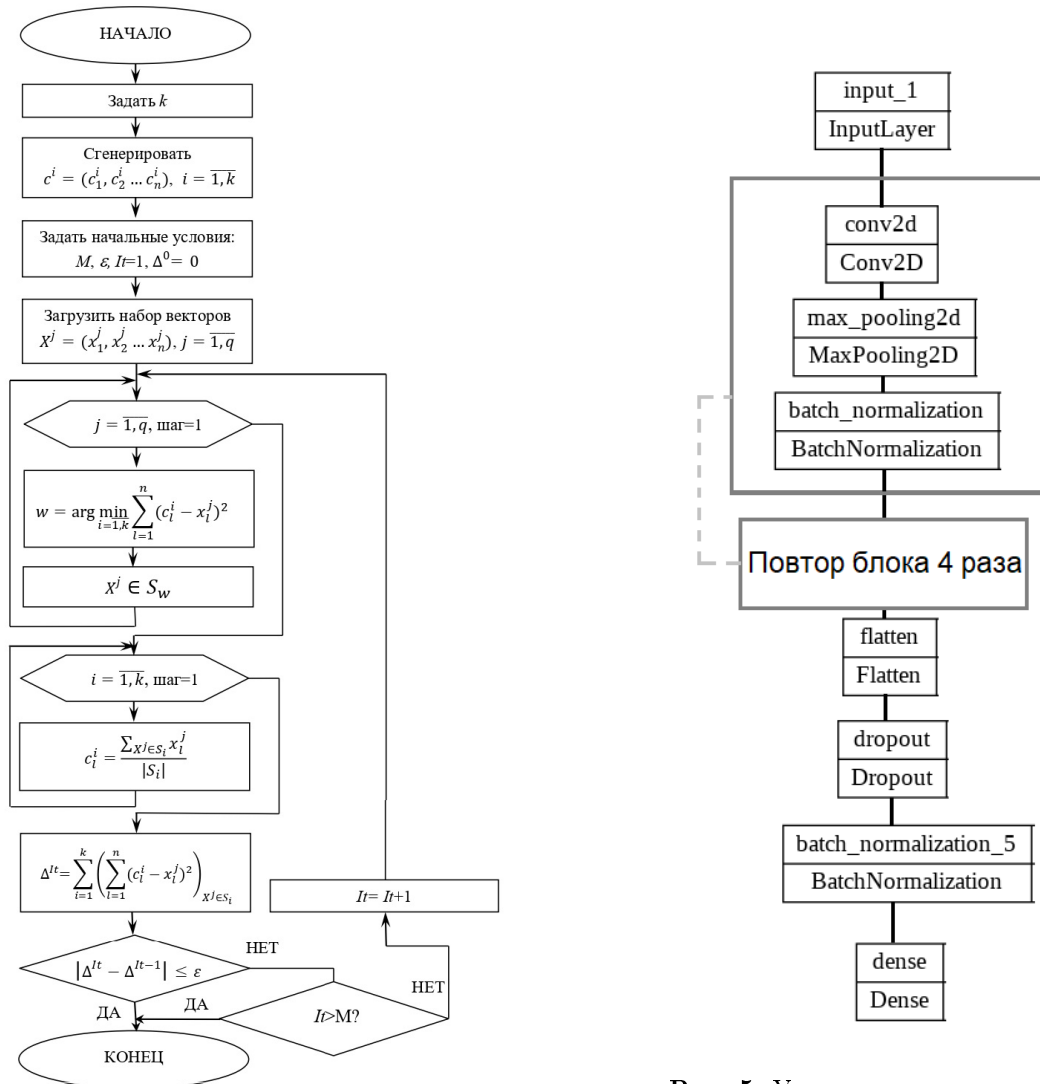


Рис. 4. Структурная схема алгоритма кластеризации на основе метода k-средних.

Рис. 5. Упрощенная структурная схема модели классификации.

5. Вычислительный эксперимент

Для вычислительных экспериментов использовался смешанный набор данных изображений объектов различной природы: средств наземного транспорта (автомобили различных марок, мотоциклы различных видов и т. п.), воздушного транспорта (самолеты различных моделей), флоры (цветы различных сортов) и фауны (собаки, кошки и птицы различных пород), фотографий людей и продуктов питания. В ходе экспериментов модель должна на первом этапе выявить *тип* объекта на изображении, а на втором - его конкретный *вид*. Например, на этапе кластеризации модель определяет изображение как фотографию птицы, а на втором, что это соловей.

5.1. Эксперименты по определению типов данных (кластеризация)

Для проведения эксперимента в программный модуль алгоритма процесса кластеризации было загружено 500 изображений смешанного исходного датасета с объектами 5 различных типов по 100 изображений на каждый тип (метки типов скрыты): «Люди», «Птицы», «Цветы», «Кошки», «Собаки».

В результате работы алгоритма в течение 6 итераций точность выявления типов составила 99% (ошибочно отнесены не к своим типам 4 изображения из 500). Наилучший результат кластеризации алгоритм показал для группы изображений типа «Люди» (рис. 6). Все 100 изображений попали в один кластер, т. е. были отнесены к данному типу. Для типа изображений «Птицы» в кластер попало 99 изображений из 100, недостающее изображение птицы было ошибочно отнесено к типу «Цветы» (рис. 7-8). Для изображений типа «Кошка» и «Собака» 3 изображения типа «Кошка» ошибочно отнесены в кластер «Собака» (рис. 9).

В целом работу алгоритма следует признать удовлетворительной.

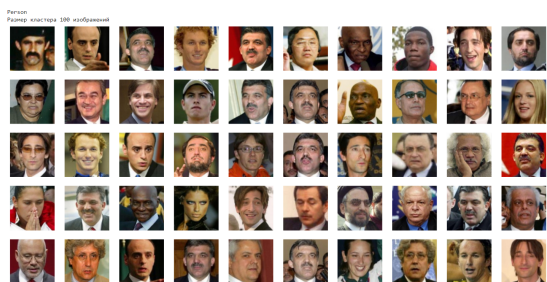


Рис. 6. Результат определения типа «Люди».

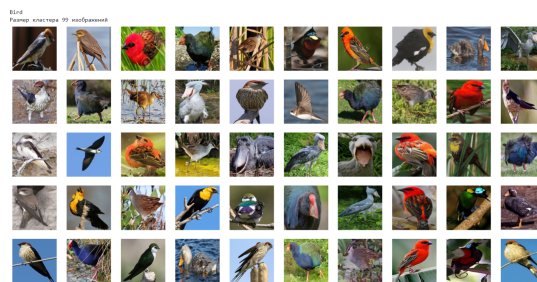


Рис. 7. Результат определения типа «Птицы»: потеряно 1 изображение.

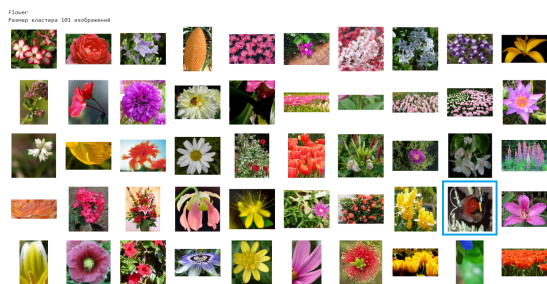


Рис. 8. Результат определения типа «Цветы»: 1 лишнее изображение (в рамке).

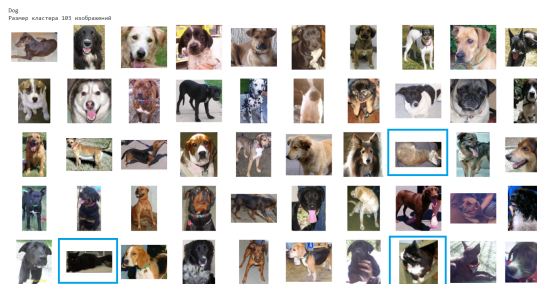


Рис. 9. Результат определения типа «Собака»: 3 лишних изображения (в рамке).

5.2. Эксперименты по определению видов данных (классификация)

Для проведения эксперимента выбран кластер (тип) изображений «Птицы». Для обучения сети были представлены 1500 изображений птиц 10-ти различных видов. В конце обучения точность сети составила 90%, точность при валидации 70%.

Для проведения эксперимента в обученную модель были загружены 10 изображений птиц разных пород из тестового набора. Таким образом, модель делала предсказания для одного изображения из каждого класса (вида) (рис. 10).



Рис. 10. Результат определения вида птиц (ошибочно распознанные виды выделены красной рамкой).

Верно были распознаны 7 из 10 изображений, что составляет 70%.

6. Заключение

Разработанная методика распознавания видов объектов, относящихся к неизвестным заранее типам, продемонстрировала свою эффективность в ходе вычислительных экспериментов.

Предложенная методика заключается в проектировании модели распознавания как двухуровневой вложенной структуры, где на первом уровне производится распознавание типа объекта, а на втором – для каждого выделенного типа определяются отдельные виды.

Первый уровень всегда реализуется в виде кластеризующей модели. В частности, рассмотрена модель k-средних на базе машинного обучения.

Второй уровень образует ансамбль моделей классификации, где для каждого выделенного на предыдущем уровне кластера-типа строится собственная классифицирующая модель. В данной работе приведен пример использования модели сверточной нейронной сети CNN архитектуры AlexNet с модификацией в качестве классификатора для выделенного кластера-типа «Птицы». Для других типов («Люди», «Цветы» и т.п.) классифицирующие модели могут иметь и другую структуру, например, в виде вероятностной нейронной сети RNN или других видов. Выбор в данном случае полностью определяется данными, образующими каждый кластер-тип. В этом смысле предложенная модель распознавания является адаптивной, подстраивая собственную структуру под обрабатываемые данные.

Литература

1. Andreyanov N.V., Sytnik A.S., Shleymovich M.P. Object detection in images using deep neural networks for agricultural machinery. В сборнике: IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. Сер. "International Science and Technology Conference "Earth Science ISTC EarthScience 2022 - Chapter 2." 2022. С. 032002.
2. Савченко О.Ф., Добролюбов И.П. Моделирование процесса идентификации состояния тракторных двигателей. Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2016. 4(6). С. 4-12.
3. Емалетдинова Л.Ю., Катасёв А.С. Нечетко-продукционная каскадная модель диагностики состояния сложного объекта // Программные системы и вычислительные методы. 2013. №1. С. 69-81.
4. Новикова С.В., Тунакова Ю.А., Шагидуллин А.Р., Кремлева Э.Ш., Валиев В.С., Габдрахманова Г.Н., Кузнецова О.Н. Использование нейросетевых технологий для зонирования территории на примере г. Казани // Вестник Технологического университета. 2019. Т. 22, № 5. С. 128-131.
5. Машинное обучение с поддержкой масштабирования: техническая документация Microsoft. [Электронный ресурс]. 03.04.2022. URL: <https://docs.microsoft.com/ru-ru/azure/architecture/data-guide/big-data/machine-learning-at-scale> (дата обращения 16.06.2022)
6. Сосулин Ю. Г., Фам Чунг Зунг Нейросетевое распознавание двумерных изображений // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 8. С. 969-978.
7. Котелина Н.О., Матвийчук Б.Р. Кластеризация изображения методом k-средних // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1. Математика. Механика. Информатика. 2019. №32.
8. Голубинский А.Н., Толстых А.А. Распознавание объектов на телевизионных изображениях с использованием аппарата сверточных нейронных сетей // Вестник ВИ МВД России. 2017. №1.
9. Марьина В.В. Методика выбора нейросетевой структуры для решения задач классификации аудиосигналов. В сборнике: Наука в движении: от отражения к созданию реальности // Материалы III Всероссийской научно-практической конференции студентов и учащихся с международным участием. Под общей редакцией С.В. Юдиной. Москва. 2020. С. 180-182.
10. Тарасов А.С., Никифоров М.Б., Бакамбис Н.И. Применение сверточных сегментационных нейронных сетей для экологического мониторинга земной поверхности // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2021. № 6. С. 3-10. DOI 10.24412/2071-6168-2021-6-3-10.
11. Сальманов И.Р. Анализ и синтез методов оценки шахматных позиций в системах компьютерного моделирования партий на базе сверточных нейронных сетей Образование в России и актуальные вопросы современной науки // Сборник статей V Всероссийской научно-практической конференции. Министерство науки и высшего образования РФ. Пензенский государственный

университет и [др]. Под ред. Гагаева П.А., Белозерцева Е.П. Пенза: Пензен. гос. аграр. ун-т. 2022. С. 391-394

MSC 97R40

Development of a heterogeneous object recognition model based on nested machine learning methods

K. N. Novikova, S. V. Novikova

Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev

Abstract: The article proposes a method for identifying objects in the case when their type (nature, origin) is not known in advance. In existing systems of identification, or recognition, as a rule, the origin, or general type, of objects is known in advance. For instance, encrypted digital cardiograms are fed into the system, and the system must detect pathology. Either fingerprint images are fed into the system, and the task of the model is to determine their owners. The situation when the type of the identified object is not known is practically never encountered. This paper proposes a two-level intellectual model that allows at the first stage of its operation to identify the type of object (for example, whether the object is an image, an encrypted cardiogram, telemetry readings, etc.), and at the second stage to determine its type directly (if the object is a cardiogram, it is necessary to determine pathology). The first level includes a clustering model based on the k-means algorithm. The second level forms an ensemble of CNN type models. The structure of convolutional networks is determined individually for each cluster (object type) selected at the previous level.

Keywords: heterogeneous objects, object identification, object clustering, machine learning models, nested models.

References

1. N.V. Andreyanov, A.S. Sytnik, M.P. Shleymovich, Object detection in images using deep neural networks for agricultural machinery, *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, "International Science and Technology Conference "Earth Science", *ISTC EarthScience 2022, Chapter 2*", 2022, 032002.
2. O.F. Savchenko, I.P. Dobrolyubov, Modelirovanie processa identifikatsii sostoyaniya traktornykh dvigatelej, *Problemy vychislitel'noj i prikladnoj matematiki*, 2016, 4(6), P. 4-12.
3. L.YU. Emaletdinova, A.S. Katasyov, Nechetko-produkcionnaya kaskadnaya model' diagnostiki sostoyaniya slozhnogo ob'ekta, *Programmnye sistemy i vychislitel'nye metody*, 2013, №1, P. 69-81.
4. S.V. Novikova, YU.A. Tunakova, A.R. SHagidullin, E.SH. Kremleva, V.S. Valiev, G.N. Gabdrahmanova, O.N. Kuznecova, Ispol'zovanie nejrosetevykh tekhnologij dlya zonirovaniya territorii na primere g. Kazani, *Vestnik Tekhnologicheskogo universiteta*, 2019, v. 22, № 5, P. 128-131.
5. Mashinnoe obuchenie s podderzhkoj masshtabirovaniya: tekhnicheskaya dokumentatsiya Microsoft. [Electronic resource]. 03.04.2022. URL:

- <https://docs.microsoft.com/ru-ru/azure/architecture/data-guide/big-data/machine-learning-at-scale> (date of the application: 16.06.2022)
6. YU.G. Sosulin , Fam CHung Zung, Nejrosetevoe raspoznavanie dvumernyh izobrazhenij, *Radiotekhnika i elektronika*, 2003, v. 48, № 8, P. 969-978.
 7. N.O. Kotelina, B.R. Matvijchuk, Klasterizaciya izobrazheniya metodom k-srednih, *Vestnik Syktyvkarского университета. Seriya 1. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2019, №32.
 8. A.N. Golubinskij, A.A. Tolstyh, Raspoznavanie ob'ektov na televizionnyh izobrazheniyah s ispol'zovaniem apparata svertochnyh nejronnyh setej *Vestnik VI MVD Rossii*, 2017, №1.
 9. V.V. Mar'ina, Metodika vybora nejrosetevoj struktury dlya resheniya zadach klassifikacii audiosignalov, *Nauka v dvizhenii: ot otrazheniya k sozdaniyu real'nosti. materialy III Vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii studentov i uchashchihsya s mezhdunarodnym uchastiem. Pod obshchej redakciej S.V. YUdinoj. Moskva*, 2020, P. 180-182.
 10. A.S. Tarasov, M.B. Nikiforov, N.I. Bakambis, Primenenie svertochnyh segmentacionnyh nejronnyh setej dlya ekologicheskogo monitoringa zemnoj poverhnosti, *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*, 2021, № 6, P. 3-10. DOI 10.24412/2071-6168-2021-6-3-10.
 11. I.R. Sal'manov, Analiz i sintez metodov ocenki shahmatnyh pozicij v sistemah komp'yuternogo modelirovaniya partij na baze svetochnyh nejronnyh setej, *Obrazovanie v Rossii i aktual'nye voprosy sovremennoj nauki: sbornik statej V Vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii. Ministerstvo nauki i vysshego obrazovaniya RF, Penzenskij gosudarstvennyj universitet i [dr]. Pod red. Gagaeva P.A., Belozerceva E.P.*, Penza, Penzen. gos. agrar. un-t, 2022, P. 391-394

УДК 512.7

Реализация алгоритма поиска базисов Грёбнера идеалов колец многочленов от нескольких переменных на языке C++

Пивкин А. А., Сухарев Л. А.

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва

Аннотация: В статье рассматривается реализация алгоритма Бухбергера построения базиса Грёбнера идеала кольца многочленов от нескольких переменных над полем комплексных чисел на языке программирования C++. Известная теорема Гильберта о базисе идеала кольца многочленов от нескольких переменных обеспечивает существование конечного базиса такого идеала. В случае задания идеала конечным набором многочленов с помощью алгоритма Бухбергера можно построить базис Грёбнера этого идеала. В работе подробно изложена компьютерная реализация одной из версий алгоритма при условии лексикографического упорядочивания многочленов. В частности рассмотрены: представление многочленов от нескольких переменных с комплексными коэффициентами в компьютере, задание арифметических операций над ними, исследование зацеплений двух многочленов базиса, реализация операции редуцирования и минимизация базиса Грёбнера. Приведены примеры работы программы и комментарии основных моментов программного кода.

Ключевые слова: базис Грёбнера, алгоритм Бухбергера.

В настоящей работе мы будем придерживаться обозначений и терминологии, используемых в [1]. Кольцо многочленов от n переменных над полем $\mathbb{C}$ стандартно обозначим через $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, а его идеал I , порожденный многочленами $f_1, \dots, f_k$, обозначим $\langle f_1, \dots, f_k \rangle$, при этом запись $I = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$ означает, что идеал I состоит из всевозможных линейных комбинаций многочленов $f_1, \dots, f_k$ с коэффициентами из кольца многочленов $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Для программной реализации на языке программирования C++ построения базиса Грёбнера идеала I требуются задание арифметических операций и вычисление зацеплений двух многочленов.

Каждому одночлену поставим в соответствие пару, состоящую из набора его степеней и коэффициента. Поскольку многочлен – это сумма одночленов, то в качестве структуры для многочлена будем использовать ассоциативный контейнер `map`, который работает по принципу «ключ – значение» [2]. Это означает, что, во-первых, при добавлении новых элементов в контейнер он будет отсортирован по возрастанию, т. е. одночлены будут упорядочены лексикографически; а во-вторых, если возникает необходимость добавить существующий элемент, то достаточно изменить его значение `map`.

Реализуем операции сложения и умножения над многочленами с комплексными коэффициентами следующим образом:

```
map<vector<int>, complex<double> > operator+(const map<vector<int>,
complex<double> > & f, const map<vector<int>, complex<double> > & g) {

    map<vector<int>, complex<double> > h = g;
```

```

vector<vector<int>>del;
for (auto &x : f) {
    h[x.first] += x.second;
    if (fabs(h[x.first].real()) + fabs(h[x.first].imag()) == 0.0)
        del.push_back(x.first);
}
for (auto& x : del) {
    h.erase(x);
}
return h;
}

map<vector<int>, complex<double>> operator*(const map<vector<int>,
complex<double>& f, const map<vector<int>, complex<double>& g) {

    map<vector<int>, complex<double>> h;
    for (auto &x : f)
        for (auto &y : g)
            h[x.first + y.first] += x.second * y.second;

    return h;
}

```

Поскольку при сложении двух многочленов после приведения подобных некоторые одночлены будут иметь коэффициент, равный нулю, то эти одночлены не подлежат хранению, поэтому в реализации сложения создается массив `del`, в который записываются удаляемые наборы степеней с нулевыми коэффициентами.

Вычисление зацеплений в алгоритме Бухбергера сводится к нахождению S -многочлена двух многочленов, который определяется формулой

$$S(f, g) = \frac{LCM(LM(f), LM(g))}{LT(f)} \cdot f - \frac{LCM(LM(f), LM(g))}{LT(g)} \cdot g.$$

Коэффициенты при f и g всегда являются одночленами, поэтому никакого деления проводить не требуется [1], [3]. Определим функцию S , которая в качестве параметров принимает два многочлена f и g , и возвращает их S -многочлен.

```

map<vector<int>, complex<double>> S(map<vector<int>,
complex<double>& f, map<vector<int>, complex<double>& g) {

    map<vector<int>, complex<double>> q1, q2;
    vector<int>lcm = LCM(f.rbegin()->first, g.rbegin()->first);
    q1[lcm - f.rbegin()->first] = 1.0 / f.rbegin()->second;
    q2[lcm - g.rbegin()->first] = -1.0 / g.rbegin()->second;
    q1 = f * q1;
    q2 = g * q2;
    return (q1 + q2);
}

```

}

Реализация операции редукции представлена функцией `reduction`:

```
void reduction( vector<map<vector<int>, complex<double>>& basis,
map<vector<int>, complex<double>>& f)
{
    auto it = f.rbegin();
    bool flag = false;
    for (; it != f.rend(); )
    {
        for (int i = 0; i < basis.size(); i++) {
            if (division(basis[i].rbegin()->first ,it->first)) {
                map<vector<int>, complex<double>> q;
                q[it->first - basis[i].rbegin()->first] +=
                    -it->second /basis[i].rbegin()->second;
                f = f + (q * basis[i]);
                flag = true;
                break;
            }
        }
        if (f.size() == 0) {
            break;
        }
        if (flag)
        {
            it = f.rbegin();
            flag = false;
        }
        else
            it++;
    }
}
```

В качестве параметров функции `reduction` передается текущий набор многочленов `basis` и многочлен `f`, который необходимо редуцировать. Первый цикл проходит по всем одночленам многочлена f , а второй проходит по набору многочленов. Если одночлен редуцируемого многочлена делится на старший одночлен некоторого многочлена, то производим операцию редукции, а затем проходим по всем одночленам многочлена f с самого начала.

Реализация алгоритма Бухбергера при этом проведена следующим образом:

```
void Buchberger_algorithm(vector<map<vector<int>, complex<double>>&
basis) {
    int k = 0;
    while (k < basis.size())
    {
```

```
int j = 0;
while (j < basis.size())
{
    if (j == k) {
        j++;
        continue;
    }
    if (!check(basis[k], basis[j])) {
        j++;
        continue;
    }
    map<vector<int>, complex<double> S_fg;
    S_fg = S(basis[k], basis[j]);
    j++;
    if (!S_fg.size())
        continue;
    reduction(basis, S_fg);
    if (S_fg.size())
        basis.push_back(S_fg);
}
k++;
}
```

Функция `Buchberger_algorithm`, используемая в построении базиса Грёбнера, в качестве входных параметров принимает набор многочленов `basis`. Двойным циклом по всему набору многочленов она проверяет с помощью функции `check(f, g)` имеют ли два многочлена зацепление. Если имеют, то функция находит их S -многочлен и редуцирует его. Если он не редуцируется к нулю, то функция добавляет его в набор базисных многочленов.

Также в программе реализована возможность пошагового вывода работы алгоритма.

Ниже приведены примеры работы программы.

Пример 1.

Идеал: $I = \langle x_1^2 - 1, x_1x_2 - x_2, x_1x_3 + x_3 \rangle$.

Файл `input.txt`:

```
Число_переменных: 3
Число_многочленов: 3
Вывод: true
(1;0)x1^2+(-1;0);
(1;0)x1 x2 +(-1;0)x2;
(1;0)x1 x3 +(1;0)x3;
```

Файл `output.txt`:

Многочлены $(1; 0) x_1^2 + (-1; 0)$ и $(1; 0) x_1 x_2 + (-1; 0) x_2$ имеют зацепление $F_{1_2} = (1; 0) x_1 x_2 + (-1; 0) x_2$

—> редукция с помощью многочлена $f_2 = (1; 0) x_1 x_2 + (-1; 0) x_2$ —> 0
S-многочлен редуцируется к нулю.

Многочлены $(1; 0) x_1^2 + (-1; 0)$ и $(1; 0) x_1 x_3 + (1; 0) x_3$ имеют зацепление $F_{1_3} = (-1; 0) x_1 x_3 + (-1; 0) x_3$

—> редукция с помощью многочлена $f_3 = (1; 0) x_1 x_3 + (1; 0) x_3$ —> 0
S-многочлен редуцируется к нулю.

Многочлены $(1; 0) x_1 x_2 + (-1; 0) x_2$ и $(1; 0) x_1^2 + (-1; 0)$ имеют зацепление $F_{2_1} = (-1; 0) x_1 x_2 + (1; 0) x_2$

—> редукция с помощью многочлена $f_2 = (1; 0) x_1 x_2 + (-1; 0) x_2$ —> 0
S-многочлен редуцируется к нулю.

Многочлены $(1; 0) x_1 x_2 + (-1; 0) x_2$ и $(1; 0) x_1 x_3 + (1; 0) x_3$ имеют зацепление $F_{2_3} = (-2; 0) x_2 x_3$

Больше зацеплений нет.

Добавим $f_4 = (-2; 0) x_2 x_3$ в набор.

Многочлены $(1; 0) x_1 x_2 + (-1; 0) x_2$ и $(-2; 0) x_2 x_3$ имеют зацепление $F_{2_4} = (-1; 0) x_2 x_3$

—> редукция с помощью многочлена $f_4 = (-2; 0) x_2 x_3$ —> 0
S-многочлен редуцируется к нулю.

Многочлены $(1; 0) x_1 x_3 + (1; 0) x_3$ и $(1; 0) x_1^2 + (-1; 0)$ имеют зацепление $F_{3_1} = (1; 0) x_1 x_3 + (1; 0) x_3$

—> редукция с помощью многочлена $f_3 = (1; 0) x_1 x_3 + (1; 0) x_3$ —> 0
S-многочлен редуцируется к нулю.

Многочлены $(1; 0) x_1 x_3 + (1; 0) x_3$ и $(1; 0) x_1 x_2 + (-1; 0) x_2$ имеют зацепление $F_{3_2} = (2; 0) x_2 x_3$

—> редукция с помощью многочлена $f_4 = (-2; 0) x_2 x_3$ —> 0
S-многочлен редуцируется к нулю.

Многочлены $(1; 0) x_1 x_3 + (1; 0) x_3$ и $(-2; 0) x_2 x_3$ имеют зацепление $F_{3_4} = (1; 0) x_2 x_3$

—> редукция с помощью многочлена $f_4 = (-2; 0) x_2 x_3$ —> 0
S-многочлен редуцируется к нулю.

Многочлены $(-2; 0) x_2 x_3$ и $(1; 0) x_1 x_2 + (-1; 0) x_2$ имеют зацепление $F_{4_2} = (1; 0) x_2 x_3$

—> редукция с помощью многочлена $f_4 = (-2; 0) x_2 x_3$ —> 0
S-многочлен редуцируется к нулю.

Многочлены $(-2; 0) x_2 x_3$ и $(1; 0) x_1 x_3 + (1; 0) x_3$ имеют зацепление $F_{4_3} = (-1; 0) x_2 x_3$

—> редукция с помощью многочлена $f_4 = (-2; 0) x_2 x_3$ —> 0

S-многочлен редуцируется к нулю.

Базис Гребнера:

(1; 0) $x_1^2 + (-1; 0)$
 (1; 0) $x_1 x_2 + (-1; 0) x_2$
 (1; 0) $x_1 x_3 + (1; 0) x_3$
 (-2; 0) $x_2 x_3$

Минимальный редуцированный базис Грёбнера

(1; 0) $x_1^2 + (-1; 0)$
 (1; 0) $x_1 x_2 + (-1; 0) x_2$
 (1; 0) $x_1 x_3 + (1; 0) x_3$
 (1; 0) $x_2 x_3$

Таким образом минимальный редуцированный базис Грёбнера имеет вид:

$$\{x_1^2 - 1, x_1x_2 - x_2, x_1x_3 + x_3, x_2x_3\}.$$

Пример 2.

Идеал: $I = \langle x_1^2 + 2i x_4, x_1x_2 - x_2, x_1x_3 + x_3, x_1x_3 + 4i x_3^4 \rangle.$

Файл input.txt:

Число_переменных: 4
 Число_многочленов: 4
 Вывод: false
 (1;0) $x_1^2 + (0;2) x_4$;
 (1;0) $x_1 x_2 + (-1;0) x_2$;
 (1;0) $x_1 x_3 + (1;0) x_3$;
 (1;0) $x_1 x_3 + (0;4) x_3^4$;

Файл output.txt:

Минимальный редуцированный базис Грёбнера

(1; 0) $x_1^2 + (0; 2) x_4$
 (1; 0) $x_1 x_2 + (-1; 0) x_2$
 (1; 0) $x_1 x_3 + (1; 0) x_3$
 (1; 0) $x_2 x_4 + (0; -0.5) x_2$
 (1; 0) $x_3 x_4 + (0; -0.5) x_3$
 (1; 0) $x_3^4 + (0; 0.25) x_3$
 (1; 0) $x_2 x_3$

Таким образом минимальный редуцированный базис Грёбнера имеет вид:

$$\{x_1^2 - 2ix_4, x_1x_2 - x_2, x_1x_3 + x_3, x_2x_4 - 0.5ix_2, x_3x_4 - 0.5x_3, x_3^4 + 0.25x_3, x_2x_3\}.$$

Стоит отметить, что известны более эффективные алгоритмы поиска базисов Гребнера идеалов, например, F4 [4] и F5 [5]. В качестве явного преимущества представленная в настоящей работе программная реализация алгоритма Бухбергера поиска базиса Грёбнера идеала кольца многочленов от нескольких переменных с комплексными коэффициентами имеет простоту изложения, доступного для понимания студентами.

Суть работы состоит в изложении методологического подхода, позволяющего связать задачу фундаментальной алгебры с ее решением с помощью компьютерных средств и современного программного обеспечения.

Литература

1. Аржанцев И.В. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений. Москва: МЦНМО, 2003. 68 с.
2. Галовиц Я. C++17 STL. Стандартная библиотека шаблонов. Санкт-Петербург: Питер, 2018. 432 с.
3. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. Пер. с англ. Москва: Мир, 2000. 687 с.
4. Faugere J.-C. A new efficient algorithm for computing Grobner bases (F4) // Journal of Pure and Applied Algebra. North-Holland: Elsevier. 1999. V. 139. P. 61–88.
5. Faugere J.-C. A new efficient algorithm for computing Gröbner bases without reduction to zero (F5) // Proceedings of the 2002 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. New York: ACM. 2002. P. 75–83.

MSC 13A15

Implementation of the algorithm for finding Groebner bases of polynomial rings ideals from several variables in C++

A. A. Pivkin , L. A. Sukharev

National Research Ogarev Mordovia State University

Abstract: The article is devoted to the implementation of the Buchberger algorithm for constructing the Groebner basis of the polynomial ring ideal of several variables over a field of complex numbers in the C++ programming language. Hilbert's well-known theorem on the basis of the polynomials ring ideal in several variables ensures the existence of a finite basis for such an ideal. The well-known Buchberger algorithm constructs the Groebner basis of this ideal. In the case of specifying an ideal by a finite set of polynomials. The paper describes in detail the computer implementation of one version of the algorithm under the condition of lexicographic ordering of polynomials. In particular, the following are considered: the representation of polynomials from several variables with complex coefficients in a computer, the assignment of arithmetic operations on them, the study of the meshing of two basis polynomials, the implementation of the reduction operation and the minimization of the Grobner basis. Examples of the program's operation and comments on the main points of the program code are given.

Keywords: Gröbner basis, Buchberger's algorithm.

References

1. I.V. Arzhantsev, Gröbner Bases and Systems of Algebraic Equations, 3rd edn, Moscow, MCCMO, 2003. (in Russian)
2. Ya. Galovits, C++17 STL. Standard Template Library, St. Petersburg, Peter, 2018, 432 p.
3. D. Cox, J. Little, D. O'Shea, Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Undergraduate Texts in Mathematics, Moscow, Mir, 2000.
4. J.-C. Faugere, A new efficient algorithm for computing Grobner bases (F4), *Journal of Pure and Applied Algebra. North-Holland: Elsevier*, 1999, V. 139, P. 61–88.
5. J.-C. Faugere, A new efficient algorithm for computing Gröbner bases without reduction to zero (F5), *Proceedings of the 2002 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. New York: ACM*, 2002, P. 75–83.

УДК 519.624

Метод итеративной регуляризации для нахождения обобщённой неподвижной точки нерастягивающего отображения на множестве гильбертова пространства

Рязанцева И. П.

Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева

Аннотация: Для нерастягивающего оператора A вводится понятие обобщённой неподвижной точки на выпуклом замкнутом множестве Ω гильбертова пространства H . Задача нахождения такой точки относится к классу некорректных, поэтому предположим, что рассматриваемая задача разрешима, а оператор A и множество Ω возмущены. Для нахождения её решения строится операторный метод регуляризации с точными данными, в котором используется оператор проектирования на множество Ω . Установлены условия, при которых решение построенной вспомогательной регуляризованной задачи сходится по норме пространства H к нормальной обобщённой неподвижной точке A на Ω . Для поставленной задачи с возмущённым множеством Ω и возмущённым оператором A построен неявный регуляризованный итерационный процесс, и установлены условия, обеспечивающие сильную сходимость в H построенных итерационных приближений к нормальной обобщённой неподвижной точке нерастягивающего оператора. Приведены примеры параметрических функций, обеспечивающих сходимость построенных приближений к нормальной обобщённой неподвижной точке оператора A на множестве Ω .

Ключевые слова: гильбертово пространство, выпуклое замкнутое множество, нерастягивающий оператор, операторный метод регуляризации, регуляризованный итерационный процесс, неподвижная точка, оператор проектирования на выпуклое замкнутое множество, возмущённые данные, теорема Штольца, сходимость.

1. Постановка задачи

Пусть H – вещественное гильбертово пространство, (u, v) – скалярное произведение элементов u и v из H , Ω – выпуклое и замкнутое множество из H , $P_\Omega : H \rightarrow \Omega$ – оператор проектирования в H на Ω , $A : H \rightarrow H$ – нерастягивающий оператор на Ω , т.е.

$$\|Ax - Ay\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in \Omega. \quad (1)$$

Построим операторы $B = E - P_\Omega$, $C = E - AP_\Omega$, где $E : H \rightarrow H$ – единичный оператор в H . Поскольку оператор P_Ω в H является нерастягивающим [1, § 1.3], то с учётом (1) и [1, § 1.3] заключаем, что операторы B и C монотонны на H , обладают свойствами ограниченности и непрерывности, поскольку удовлетворяют условию Липшица.

Отметим, что на множестве Ω оператор $C = E - A$, а B – нулевой оператор.

Определение 1. Точку $\bar{x} \in \Omega$ назовём обобщённой неподвижной точкой оператора A на множестве $\Omega \subseteq H$, если

$$(C\bar{x}, \bar{x} - x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \bar{x} \in \Omega. \quad (2)$$

Поскольку $D(C) = H$, то неравенство (2) эквивалентно следующему неравенству [1, Lemma 1.11.4]

$$(Cx, \bar{x} - x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \bar{x} \in \Omega. \quad (3)$$

Свойство (1) оператора A не гарантирует существование у него неподвижной точки на Ω , а также не обеспечивает сильную сходимость итерационного процесса $x_{n+1} = Ax_n$ к неподвижной точке оператора A [2, гл. 2, § 4].

Пусть множество N обобщённых неподвижных точек оператора A на Ω непусто, тогда из (3) следует выпуклость и замкнутость множества N . Ставится задача построения устойчивого метода нахождения некоторой точки из N .

2. Операторный метод регуляризации для задачи с точными данными

Пусть $0 \in \Omega$, и

$$(Cx, x) \geq 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \geq r > 0, \quad x \in \Omega, \quad C = E - AP_\Omega. \quad (4)$$

Построим в H операторное уравнение

$$B\tilde{x}_n + \beta_n [C\tilde{x}_n + \alpha_n \tilde{x}_n] = 0, \quad \alpha_n > 0, \quad \beta_n > 0, \quad n \geq 1. \quad (5)$$

Из свойств операторов B и C следует существование единственного решения уравнения (5) при всех $n \geq 1$ [1, Theorem 1.7.5; 3, § 18]. Исследуем поведение $\tilde{x}_n$ при $n \rightarrow \infty$.

Выберем некоторый элемент $x \in N \subset \Omega$. Поскольку $Bx = 0$ при всех $x \in \Omega$, то из (5) получаем равенство

$$(B\tilde{x}_n - Bx, \tilde{x}_n - x) + \beta_n [(C\tilde{x}_n - Cx, \tilde{x}_n - x) + (Cx, \tilde{x}_n - x) + \alpha_n (\tilde{x}_n, \tilde{x}_n - x)] = 0, \quad x \in N. \quad (6)$$

Если $\tilde{x}_n \in \Omega$, то (2) и монотонность отображений B и C приводят к неравенству $(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n - x) \leq 0$, т.е.

$$\|\tilde{x}_n\| \leq \|x\|, \quad \tilde{x}_n \in \Omega, \quad x \in N. \quad (7)$$

Пусть теперь $\tilde{x}_n \notin \Omega$. Умножив (5) скалярно на $\tilde{x}_n$, имеем равенство

$$(B\tilde{x}_n, \tilde{x}_n) + \beta_n (C\tilde{x}_n, \tilde{x}_n) + \alpha_n \beta_n \|\tilde{x}_n\|^2 = 0. \quad (8)$$

Поскольку $0 \in \Omega$, и $B(0) = 0$, то первое слагаемое в (8) неотрицательно. Кроме того, $\tilde{x}_n \neq 0$, так как $0 \in \Omega$, а $\tilde{x}_n \notin \Omega$. Предположив существование неограниченной величины $\tilde{x}_n$ при $n \geq 1$, состоящей из точек, не входящих в Ω , и учитывая (4), в (8) приходим к противоречию. Следовательно, приняв во внимание (7), делаем вывод об ограниченности $\tilde{x}_n$ при $n \geq 1$. Значит, $\tilde{x}_n \rightharpoonup \bar{x} \in H$ (для простоты записей обозначения для подсемейства не меняем).

Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 0. \quad (9)$$

Теперь из (5) в силу ограниченности оператора C имеем сходимость $B\tilde{x}_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Так как $B : H \rightarrow H$ – максимальный монотонный оператор [1, Theorem 1.4.6], то из сходимостей $\tilde{x}_n \rightharpoonup \bar{x}$, $B\tilde{x}_n \rightarrow 0$ в силу демизамкнутости оператора B вытекает равенство $B\bar{x} = 0$ [1, § 1.4].

Пусть x – произвольный элемент из Ω , тогда из (6) с учётом монотонности отображений B и C получаем неравенство

$$(Cx, \tilde{x}_n - x) + \alpha_n(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n - x) \leq 0, \quad x \in \Omega. \quad (10)$$

Отсюда, устремляя n к бесконечности, и приняв во внимание первое равенство в (9), а также ограниченность $\tilde{x}_n$ при $n \geq 1$, установим неравенство $(Cx, \bar{x} - x) \leq 0$, $\bar{x} \in \Omega \quad \forall x \in \Omega$, т.е. $\bar{x} \in N$.

Пусть теперь в (10) x – произвольный элемент из $N \subset \Omega$, $\bar{y}_n = P_\Omega \tilde{x}_n \in \Omega$, $n \geq 1$, тогда (10) перепишем в следующей эквивалентной форме

$$(Cx, \bar{y}_n - x) + (Cx, \tilde{x}_n - \bar{y}_n) + \alpha_n(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n - x) \leq 0.$$

В силу определения 1 первое слагаемое в последнем неравенстве неотрицательно. Следовательно, имеет место неравенство

$$\alpha_n(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n - x) \leq \|Cx\| \|\tilde{x}_n - \bar{y}_n\|, \quad x \in N. \quad (11)$$

Используя определение оператора B , равенство (5), ограниченность $\tilde{x}_n$ при $n \geq 1$ и ограниченность оператора C , приходим к соотношениям

$$\|\tilde{x}_n - \bar{y}_n\| = \|\tilde{x}_n - P_\Omega \tilde{x}_n\| = \|B\tilde{x}_n\| \leq \beta_n c_1.$$

Здесь и всюду далее c_k – положительные постоянные, $k = 1, 2, \dots$

Теперь из (11) имеем оценку

$$(\tilde{x}_n, \tilde{x}_n - x) \leq c_2 \frac{\beta_n}{\alpha_n} \quad \forall x \in N. \quad (12)$$

или

$$\|\tilde{x}_n - x\|^2 + (x, \tilde{x}_n - x) \leq c_2 \frac{\beta_n}{\alpha_n}, \quad \forall x \in N.$$

Приняв в последнем неравенстве $x = \bar{x}$, учитывая второе предельное равенство из (9) и слабую сходимость $\tilde{x}_n$ к $\bar{x}$ при $n \rightarrow \infty$, установим сходимость $\|\tilde{x}_n - \bar{x}\|$ к нулю при $n \rightarrow \infty$. Теперь, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в (12), получим неравенство $\|\bar{x}\| \leq \|x\|$ при всех $x \in N$. Значит, $\bar{x}$ – обобщённая неподвижная точка оператора A на множестве Ω с минимальной нормой. Далее эту точку обозначаем через x^* , т.е. x^* – единственный элемент из N , определяемый соотношением

$$\|x^*\| = \min\{\|x\| \mid x \in N\} \quad (13)$$

и называемый нормальной обобщённой неподвижной точкой оператора A на выпуклом замкнутом множестве Ω .

Таким образом, доказано утверждение.

Теорема 1. Пусть $A : H \rightarrow H$ – нестягивающий на Ω оператор, Ω – выпуклое замкнутое множество из H , $0 \in \Omega$, множество N обобщённых неподвижных точек оператора A на Ω непусто, и имеют место условия (4), (9). Тогда последовательность $\{x_n\}$ решений операторного уравнения (5) при $n \rightarrow \infty$ сходится по норме пространства H к единственной нормальной обобщённой неподвижной точке x^* оператора A на множестве Ω .

3. Итеративный метод нахождения обобщённой неподвижной точки оператора на выпуклом замкнутом множестве

Пусть выполнены условия теоремы 1, и данные задачи, поставленной в п. 1, оператор A и множество Ω возмущены. Предположим, что вместо множества Ω известна последовательность выпуклых замкнутых множеств $\{\Omega_n\}$, $n \geq 1$, $\Omega_n \subseteq H$, причём

$$r(\Omega, \Omega_n) \leq \sigma_n, \quad (14)$$

где $r(\Omega, \Omega_n)$ – хаусдорфово расстояние в H между множествами Ω и Ω_n , $\{\sigma_n\}$ – неубывающая последовательность неотрицательных чисел, $\sigma_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Приближения оператора A задаются семейством отображений

$$\{A_n\}, \quad A_n : H \rightarrow H, \quad \Omega_n \subseteq D(A_n) = D(A) = H, \quad n \geq 1,$$

и справедливы неравенства

$$\|A_n x - Ax\| \leq \delta_n g(\|x\|) \quad \forall x \in H, \quad \forall n \geq 1, \quad (15)$$

$$\|A_n x - A_n y\| \leq [1 + h_n] \|x - y\| \quad \forall x, \quad \forall y \in H, \quad (16)$$

здесь $\{\delta_n\}$ и $\{h_n\}$ – последовательности того же класса, что и $\{\sigma_n\}$, $g(s)$ ($s \geq 0$) – неотрицательная неубывающая функция.

Отметим, что в наших предположениях оператор $A_n : H \rightarrow H$ может и не иметь обобщённой неподвижной точки на Ω_n .

Пусть $x \in H$, тогда при условии (14) верно неравенство

$$\|P_\Omega x - P_{\Omega_n} x\| \leq c \sqrt{\sigma_n}, \quad (17)$$

где c – абсолютная положительная постоянная для всех x , принадлежащих ограниченному множеству в H [4, § 3.4].

Задав некоторый произвольный элемент $y_0 \in H$, построим последовательность $\{y_n\}$, где y_n – элемент из H , удовлетворяющий уравнению

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{t_n} + [B_n y_n + \beta_n (C_n y_n + \alpha_n y_n)] = 0, \quad n \geq 1. \quad (18)$$

Здесь $B_n = E - P_{\Omega_n}$, $C_n = E - A_n P_{\Omega_n}$, $\{t_n\}$ – ограниченная последовательность положительных чисел.

Уравнение (18) можно переписать в следующем виде

$$y_n + t_n [B_n y_n + \beta_n (C_n y_n + \alpha_n y_n)] = y_{n-1}. \quad (19)$$

Поскольку операторы B_n и C_n монотонны, то оператор $\Lambda_n = E + t_n [B_n + \beta_n (C_n + \alpha_n E)]$ в наших условиях сильно монотонный и непрерывный. Следовательно, уравнение (19), а значит, и (18) однозначно разрешимы в H .

Установим условия, при которых последовательность $\{y_n\}$ сходится по норме H к нормальной обобщённой неподвижной точке оператора A на множестве Ω .

Пусть хотя бы при достаточно больших n справедливо неравенство

$$(B_n y_n + \beta_n (C_n y_n + \alpha_n y_n), y_n) \geq 0. \quad (20)$$

Умножив (18) скалярно на y_n , имеем равенство

$$(y_n - y_{n-1}, y_n) + t_n (B_n y_n + \beta_n (C_n y_n + \alpha_n y_n), y_n) = 0.$$

Отсюда с учётом предположения (20) хотя бы при достаточно больших n приходим к неравенству

$$(y_n - y_{n-1}, y_n) \leq 0, \quad n \geq K \geq 1.$$

Отсюда заключаем, что верно неравенство $\|y_n\| \leq \|y_{n-1}\|$ при $n > K \geq 1$. Таким образом, установлена ограниченность последовательности $\{y_n\}$, где y_n определяется из (18), т.е.

$$\|y_n\| \leq \bar{C} \quad \forall n \geq 1, \quad \bar{C} > 0. \quad (21)$$

Запишем равенство (5) при $n = m$

$$B\tilde{x}_m + \beta_m [C\tilde{x}_m + \alpha_m \tilde{x}_m] = 0, \quad m \geq 1. \quad (22)$$

Теперь вычтем (22) из (18), результат умножим скалярно на $y_n - \tilde{x}_m$ и придём к следующему равенству

$$\begin{aligned} \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{t_n}, y_n - \tilde{x}_m \right) &+ (B_n y_n - B\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) + (\beta_n C_n y_n - \beta_m C\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) + \\ &+ (\beta_n \alpha_n y_n - \beta_m \alpha_m \tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Введём величину

$$\rho_{n,m} = \frac{\|y_n - \tilde{x}_m\|^2}{2}$$

и найдём оценки слагаемых, входящих в (23).

Учитывая монотонность оператора B_n и оценку (17), имеем

$$\begin{aligned} (B_n y_n - B\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) &= (B_n y_n - B_n \tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) + (B_n \tilde{x}_m - B\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) \geq \\ &\geq -c\sqrt{\sigma_n} \|y_n - \tilde{x}_m\|. \end{aligned} \quad (24)$$

Далее запишем очевидное равенство

$$\begin{aligned} (\beta_n C_n y_n - \beta_m C\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) &= \beta_n (C_n y_n - C_n \tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) - \beta_n (C\tilde{x}_m - C_n \tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) - \\ &- [\beta_m - \beta_n] (C\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m). \end{aligned} \quad (25)$$

Построим оценки для слагаемых из правой части (25). Нерастяжимость оператора P_{Ω_n} , условие (16) и определение оператора C_n обеспечивают справедливость следующих соотношений

$$\begin{aligned} (C_n y_n - C_n \tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) &= \|y_n - \tilde{x}_m\|^2 - (A_n P_{\Omega_n} y_n - A_n P_{\Omega_n} \tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) \geq \\ &\geq \|y_n - \tilde{x}_m\|^2 - (1 + h_n) \|P_{\Omega_n} y_n - P_{\Omega_n} \tilde{x}_m\| \|y_n - \tilde{x}_m\| \geq -2h_n \rho(y_n, \tilde{x}_m). \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $\rho(y_n, \tilde{x}_m) = \|y_n - \tilde{x}_m\|^2/2$.

Свойство нерастяжимости оператора проектирования на множество Ω и включение $0 \in \Omega$ приводят к неравенству

$$\|P_{\Omega} z\| \leq \|z\| \quad \forall z \in H.$$

Далее, используя последнее неравенство, (15) – (17), запишем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \|C_n \tilde{x}_m - C\tilde{x}_m\| &= \|A_n P_{\Omega_n} \tilde{x}_m - A P_{\Omega} \tilde{x}_m\| \leq \|A_n P_{\Omega_n} \tilde{x}_m - A_n P_{\Omega} \tilde{x}_m\| + \\ &+ \|A_n P_{\Omega} \tilde{x}_m - A P_{\Omega} \tilde{x}_m\| \leq (1 + h_n) \|P_{\Omega_n} \tilde{x}_m - P_{\Omega} \tilde{x}_m\| + \\ &+ \delta_n g(\|P_{\Omega} \tilde{x}_m\|) \leq c_3 [(1 + h_n) \sqrt{\sigma_n} + \delta_n] \leq c_4 (\delta_n + \sqrt{\sigma_n}). \end{aligned} \quad (27)$$

Предположим, что последовательность $\{(\beta_{n-1} - \beta_n)/t_n\}$ убывает, тогда при $n \leq m$ справедливо неравенство (формула (68) в [5])

$$\beta_n - \beta_m \leq \frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{t_{n+1}}(T_n - T_m), \quad T_k = \sum_{i=1}^k t_i, \quad \tau_i > 0, \quad i \geq 1. \quad (28)$$

Теперь ограниченность оператора C , ограниченность последовательностей $\{y_n\}$, $\{\tilde{x}_m\}$ и оценка (17) позволяют сделать вывод о справедливости неравенства

$$[\beta_n - \beta_m](C\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) \geq -c_5 \frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{\tau_{n+1}}(T_n - T_m), \quad n \leq m. \quad (29)$$

Оценим последнее слагаемое в (23):

$$\begin{aligned} (\beta_n \alpha_n y_n - \beta_m \alpha_m \tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) &= \beta_n \alpha_n \|y_n - \tilde{x}_m\|^2 + (\beta_n \alpha_n - \beta_m \alpha_m)(\tilde{x}_m, y_n - \tilde{x}_m) \geq \\ &\geq 2\beta_n \alpha_n \rho(y_n, \tilde{x}_m) - c_6 \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\tau_{n+1}}(T_n - T_m), \quad n \leq m, \end{aligned} \quad (30)$$

где $\lambda_k = \beta_k \alpha_k$, т.е. при оценке второго слагаемого мы использовали неравенство (28) для последовательности $\{\lambda_n\}$, которая в наших условиях является убывающей.

Таким образом, используя (24) – (27), (29) и (30), а также неравенство

$$\|y_n - \tilde{x}_m\|^2 \leq \|y_{n-1} - \tilde{x}_m\|^2 + 2(y_n - \tilde{x}_m, y_n - y_{n-1})$$

от (23) приходим к следующему неравенству

$$\|y_n - \tilde{x}_m\|^2 - \|y_{n-1} - \tilde{x}_m\|^2 \leq -2\lambda_n \|y_{n-1} - \tilde{x}_m\|^2 + \mu_n^m, \quad (31)$$

где

$$\mu_n^m = c_7 \left[\sqrt{\sigma_n} + h_n + \delta_n + \left(\frac{\beta_n - \beta_{n-1}}{\tau_n} + \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\tau_n} \right) (T_n - T_m) \right], \quad n \geq 1, \quad n \leq m. \quad (32)$$

Здесь элемент $y_0 \in H$ задаётся.

Теперь, применив к неравенству (31) лемму 1 из [5], приходим к следующей оценке

$$\|y_n - \tilde{x}_m\|^2 \leq \|y_0 - \tilde{x}_m\|^2 \exp(-F_n) + \sum_{i=1}^n \mu_i^m \tau_i \exp(F_i - F_n), \quad n \geq 1, \quad n \leq m, \quad (33)$$

где

$$F_j = \sum_{i=1}^j e_i, \quad e_i = \frac{2\lambda_i \tau_i}{2\lambda_i \tau_i + 1}. \quad (34)$$

Положив в неравенстве (33) $n = m$, получаем оценку

$$\|y_m - \tilde{x}_m\|^2 \leq \|y_0 - \tilde{x}_m\|^2 \exp(-F_m) + \sum_{i=1}^m \mu_i^m \tau_i \exp(F_i - F_m), \quad n \geq 1, \quad n \leq m. \quad (35)$$

Предположим, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m e_i = \infty, \quad (36)$$

где величина e_i определена в (34).

Значит, первое слагаемое в правой части (35) есть бесконечно малая при $m \rightarrow \infty$. Установим условия, при которых и второе слагаемое в правой части неравенства (35) при $m \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Для этого используем теорему Штольца:

$$\begin{aligned} \Lambda^m &= \sum_{i=1}^m \mu_i^m \tau_i \exp(F_i - F_m) = \frac{\sum_{i=1}^m \mu_i^m \tau_i \exp(F_i)}{\exp(F_m)} \sim \\ &\sim \frac{\sum_{i=1}^m \mu_i^m \tau_i \exp(F_i) - \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i^{m-1} \tau_i \exp(F_i)}{\exp(F_m) - \exp(F_{m-1})} = \\ &= \frac{\mu_m^m \tau_m \exp(F_m)}{\exp(F_m) - \exp(F_{m-1})} + \frac{\sum_{i=1}^{m-1} [\mu_i^m - \mu_i^{m-1}] \tau_i \exp(F_i)}{\exp(F_m) - \exp(F_{m-1})}. \end{aligned} \quad (37)$$

Поскольку

$$\frac{\mu_m^m \tau_m \exp(F_m)}{\exp(F_m) - \exp(F_{m-1})} \sim \frac{\mu_m^m \tau_m}{F_m - F_{m-1}} = -\frac{\sqrt{\sigma_n} + h_m + \delta_m}{2\alpha_m \beta_m} (2\lambda_m \tau_m + 1),$$

то предпоследнее слагаемое в (37) является бесконечно малой при $n \rightarrow \infty$, если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\sigma_n} + h_m + \delta_m}{\alpha_m \beta_m} = 0. \quad (38)$$

Теперь установим условия сходимости к нулю при $m \rightarrow \infty$, последнего слагаемого в (37). В силу (34) имеем

$$\begin{aligned} G^m &= \frac{\sum_{i=1}^{m-1} [\mu_i^m - \mu_i^{m-1}] \tau_i \exp(F_i)}{\exp(F_m)(F_m - F_{m-1})} \leq c_8 \frac{\sum_{i=1}^{m-1} [\mu_i^m - \mu_i^{m-1}] \tau_i \exp(F_i)}{\exp(F_m) \lambda_m \tau_m} = \\ &= -c_8 \frac{\sum_{i=1}^{m-1} [(\beta_i - \beta_{i-1})/\tau_i + (\lambda_i - \lambda_{i-1})/\tau_i] \exp(F_i)}{\exp(F_m) \lambda_m} \sim \\ &\sim -c_8 \frac{[(\beta_m - \beta_{m-1})/\tau_m + (\lambda_m - \lambda_{m-1})/\tau_m] \exp(F_{m-1})}{\exp(F_m) \lambda_m - \exp(F_{m-1}) \lambda_{m-1}} = \\ &= -c_8 \frac{(\beta_m - \beta_{m-1})/\tau_m + (\lambda_m - \lambda_{m-1})/\tau_m}{\exp(F_m - F_{m-1}) \lambda_m - \lambda_{m-1}} \sim -c_8 \frac{(\beta_m - \beta_{m-1})/\tau_m + (\lambda_m - \lambda_{m-1})/\tau_m}{\lambda_m - \lambda_{m-1} - 2\lambda_m^2 \tau_m / (1 + 2\lambda_m \tau_m)}. \end{aligned}$$

Следовательно, приходим к следующему условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\beta_m - \beta_{m-1})/\tau_m + (\lambda_m - \lambda_{m-1})/\tau_m}{\lambda_{m-1} - \lambda_m + 2\lambda_m^2 \tau_m / (1 + 2\lambda_m \tau_m)} = 0. \quad (39)$$

Таким образом, с учётом теоремы 1 доказано утверждение.

Теорема 2. Пусть H – гильбертово пространство, $A : H \rightarrow H$ – нестягивающий на выпуклом замкнутом множестве $\Omega \subseteq H$ оператор, $0 \in \Omega$, множество N обобщённых неподвижных точек оператора A на Ω непусто, и имеет место условие (4). Предположим, что вместо множества Ω и оператора A известны последовательности $\{\Omega_n\}$ и $\{A_n\}$, где Ω_n – выпуклое замкнутое множество в H , $A_n : H \rightarrow H$, причём справедливы условия (14) – (16). Построим последовательность $\{y_n\}$, где $y_n \in H$ и удовлетворяет уравнению (18) при $B_n = E - P_{\Omega_n}$, $C_n = E - A_n P_{\Omega_n}$, $P_{\Omega_n} : H \rightarrow \Omega_n$ – оператор проектирования в H на выпуклое замкнутое

множество Ω_n , $\{t_n\}$ – ограниченная последовательность положительных чисел, причём хотя бы при достаточно больших n имеет место неравенство (20), последовательность $\{(\beta_{n-1} - \beta_n)/\tau_n\}$ убывает, и выполнены предельные равенства (38), (39). Тогда последовательность $\{y_n\}$ при $n \rightarrow \infty$ сильно сходится в H к единственной нормальной обобщённой неподвижной точке оператора A на множестве Ω .

Итерационные процессы для нахождения неподвижных точек нестягивающих отображений изучались, например, в [6-9].

Класс параметрических последовательностей, удовлетворяющих условиям теоремы 2 непуст. Укажем, например, следующие последовательности:

$$\alpha_n = \frac{1}{n^\alpha}, \quad \beta_n = \frac{1}{n^\beta}, \quad h_n = \frac{1}{n^h}, \quad \delta_n = \frac{1}{n^\delta}$$

где $\alpha, \beta, h, \delta, \sigma$ – положительные постоянные. Условия (9) будут выполнены при $\alpha < \beta$, предположение (38) имеет место, если $\alpha + \beta < \min\{\sigma/2, h, \delta\}$.

Итерационные процессы для нахождения неподвижных точек нестягивающих отображений изучались, например, в [6-9].

Литература

1. Рязанцева И.П. Непрерывные методы регуляризации первого порядка для обобщённых вариационных неравенств // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2010. Т. 50, № 4. С. 636–650.
2. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. Москва: Наука, 1972. 416 с.
3. Alber Ya., Ryazantseva I. Nonlinear ill-posed problems of monotone type. Dordrecht, Springer, 2006. 410 с.
4. Рязанцева И.П. Избранные главы теории операторов монотонного типа. Нижний Новгород, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, 2008. 272 с.
5. Рязанцева И.П. Итеративная регуляризация третьего порядка для монотонных уравнений в гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 3. С. 406–416.
6. Halperin B. Convergence of approximantes to fixed point of non-expansive nonlinear maps in Banach spaces // Arch. Ration Mech. Anal. 1967. Т. 24, № 1. С. 82–90
7. Browder F.E. Fixed points of nonexpansive maps // Arch. Ration Mech. Anal. 1967. Т. 24, № 1. С. 82–90.
8. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург, Уральская издательская фирма "Наука 1993. 262 с.

MSC 34G10 58D25

Iterative regularization method for finding the generalized fixed point of non-stretching operator on the set of Hilbert space

I. P. Ryazantseva

Nizhny Novgorod state technical University n. a. R. E. Alekseeva

Abstract: For the non-stretching operator A , the concept of a generalized fixed point on a convex closed set Ω of the Hilbert space H is introduced. The problem of finding such a point belongs to the class of incorrect ones, so let's assume that the problem in question is solvable, and the operator A and the set Ω are perturbed. To find its solution, an operator regularization method with exact data is constructed, in which the projection operator is used on the set Ω . Conditions are established under which the solution of the constructed auxiliary regularized problem converges according to the norm of the space H to the normal generalized fixed point A on Ω . Next, for the problem with the perturbed set Ω and the perturbed operator A , an implicit regularized iterative process is constructed, and conditions are established that ensure strong convergence in H of the constructed iterative approximations to the normal generalized fixed point of the non-stretching operator. Examples of parametric functions that pecivaing the convergence of the constructed approximations to normal generalized fixed point of the operator A on the set Ω .

Keywords: Hilbert space, a convex closed set, narastayushey operator, operator regularization method, regularized iterational process, fixed point design operator on a convex closed set, the perturbed data, convergence.

References

1. I.P. Ryazantseva, Neprerivnii method pervogo poryadka dlya obobschennih variacionnih neravenstv, *Journal vichislit. matem. i matem. fiziki*, 2010, vol. 50, iss. 4, P. 606-619.
2. M.M. Vainberg, Variacionniy metod i metod monotonnih operatorov v teorii nelineynih uravneniy, Moscow, Nauka Publ., 1972, 416 p.
3. Ya. Alber, I. Ryazantseva, Nonlinear ill-posed problems of monotone type. Dordrecht, Springer Publ., 2006, 410 p.
4. I.P. Ryazantseva, Izbrannye glavy teorii operatorov monotonnogo tipa, Nizhni Novgorod, Nizhny Novgorod State Tehnical University named after R.E. Alekseev Publ., 2008, 272 p.
5. I.P. Ryazantseva, First-order continuous regularization methods for generalized variational inequalities, *Differetial equations*, 2020, vol. 56, iss. 3, P. 406-616.
6. B. Halperin, Convergence of approximantes to fixed point of non-expansive nonlinear maps in Banach spaces, *Arch. Ration Mech. Anal.*, 1967, vol. 24, iss. 1, P. 82–90.
7. F.E. Browder, Fixed points of nonexpansive maps, *Arch. Ration Mech. Anal.*, 1967, vol. 24, iss. 1, P. 82–90.

8. V.V. Vasin, A.L. Ageev, Nekorrektnie zadachi s apriopnoi informaciei, Ekaterinburg, Ural'skaya izdatel'skaya firma "Nauka 1993, 262 p.

УДК 517.93

Геометрия фазового пространства комплексного периодического уравнения Риккати

Сахаров А. Н.

Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия

Аннотация: В статье рассматриваются некоторые вопросы, связанные с задачей описания топологии траекторий комплексных уравнений Риккати с периодическими коэффициентами. Такое уравнение является результатом проективизации линейной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Ясно, что поведение линейной периодической системы полностью описывается теоремой Флоке-Ляпунова. В двумерном случае, однако, можно определить и полный топологический инвариант потока, порождаемый этой системой. В комплексном случае уточняется ряд известных результатов.

Ключевые слова: уравнение Риккати, линейные расширения потоков, проективные потоки, число вращения, периодические решения, преобразования Мёбиуса.

1. Введение

Комплексное уравнение Риккати с периодическими коэффициентами является результатом проективизации двумерных линейных систем с периодическими коэффициентами. Комплексная линейная система

$$\dot{X} = A(t)x = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & -a(t) \end{pmatrix} X, \quad A(t+2\pi) = A(t), \quad X \in \mathbb{C}^2, \quad (1)$$

определяет непрерывный поток на $S^1 \times \mathbb{C}^2$. Переходя к проективным координатам $z = \frac{x_1}{x_2}$, получаем уравнение Риккати с периодическими коэффициентами

$$\dot{z} = 2a(t)z - c(t)z^2 + b(t). \quad (2)$$

Это уравнение определяет *проективный поток*, индуцированный линейной системой (1). Фазовое пространство проективного потока – произведение $S^1 \times \mathbb{CP}^1$, на котором он действует дробно-линейными преобразованиями (преобразованиями Мёбиуса), которые принимают значения в группе $SL(2, \mathbb{C})$:

$$P^t(z) = \frac{\alpha(t)z + \beta(t)}{\gamma(t)z + \delta(t)}, \quad \alpha(t)\delta(t) - \beta(t)\gamma(t) = 1.$$

Будем рассматривать задачу о структуре траекторий проективного потока. Решение этой задачи, в значительной степени, основывается на результатах для вещественного случая [1].

Заметим, что для уравнения (1) чаще всего рассматривалась задача существования (несуществования) 2π -периодически решений [2–4, 6]. Возможные типы решений (1) описаны в статье Ж. Кампоса [5]. Топологическая классификация уравнений (1)

основанная на свойствах отображения монодромии, являющимся в данном случае преобразованием Мёбиуса, изложена в заметке В. Ю. Тыщенко без доказательств. Оно основано, очевидно, на утверждении о том, что уравнения топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их отображения монодромии топологически эквивалентны. Условия топологической эквивалентности автоморфизмов пространства $\mathbb{C}^2$ даются теоремами Дж. Роббина [8] и Кёйпера-Роббина [9], которые в данном случае тривиально выполняются. [7]. Компактификация вещественного уравнения (1) приводит к уравнению на торе. Этот подход использован в работе В. Ш. Ройтенберга [10].

Другим феноменом, связанным с уравнением Рикатти, является появление так называемых *особых периодических решений*, имеющих конечное число разрывов на периоде. Объяснение этого феномена придумал академик Я. Б. Зельдович. Замена $z = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ преобразует уравнение (2) в уравнение на торе

$$\dot{\theta} = b(t) - c(t) + (b(t) + c(t)) \cos \theta - 2a(t) \sin \theta. \quad (3)$$

Поток, определяемый этим уравнением, имеет полный топологический инвариант – число вращения ρ . Если $\rho = m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то поток на торе имеет два грубых 2π -периодических решения, соответствующие двум периодическим решениям с m разрывами на периоде (рис. 1).

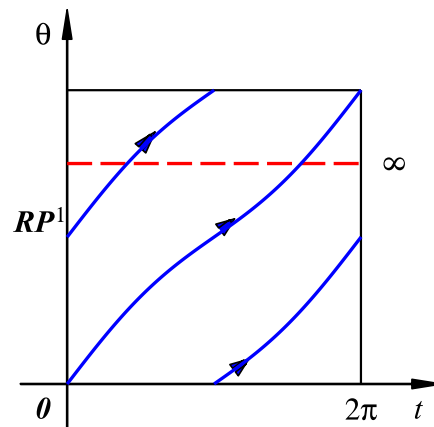


Рис. 1. Периодические решения на торе, соответствующие особым периодическим решениям уравнения Рикатти с одним разрывом на периоде.

Таким образом, появление особых периодических решений легко объясняется при изменении топологической структуры фазового пространства. Я. Б. Зельдович использовал особые периодических решений уравнения Рикатти для моделирования взрывов (в астрофизике) и, сведя задачу к уравнению на торе, фактически переоткрыл теорию А. Пуанкаре. Он не успел опубликовать свои результаты. Не зная ничего об исследованиях Я. Б. Зельдовича, А. Н. Сахаров и Е. А. Сидоров описали подобный прием в работе [11].

Заметим также, что отображение Пуанкаре для потока на торе, е будет его полным топологическим инвариантом. Числа вращения потока и отображения Пуанкаре одинаковы, но замкнутой траектории, делающей m оборотов по меридиану тора соответствует просто неподвижная точка отображения, т. е. оно «забывает» гомотопический тип периодического решения. Это обстоятельство требует уточнения классификации комплексных уравнений Рикатти.

2. Описание динамики

Очевидно, что компактификация фазового пространства уравнения (3) приводит к системе дифференциальных уравнений на многообразии $S^1 \times S^2$. Один из вариантов такой системы будет представлен ниже. Здесь же мы используем отображения Пуанкаре $P(z) = P^{2\pi}(z)$, которое является отображением Мёбиуса сферы Римана.

Лемма 1. *Для любого отображения Мёбиуса P существует предел*

$$\lambda = \delta + i\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln P^n(z)}{n},$$

который не зависит от z .

Доказательство следует из известной теоремы анализа, которая утверждает, что любое преобразование Мёбиуса сферы $\mathbb{CP}^1$ линейным преобразованием может быть приведено к виду

1. $w = e^{\delta + i\rho}z$, $\delta \neq 0$, $\rho \neq 0$ (локсодромический случай);
2. $w = e^{\delta}z$, $\delta \neq 0$ (гиперболический случай);
3. $w = e^{i\rho}z$, $\rho \neq 0$ (эллиптический случай);
4. $w = z + 1$ (параболический случай).

Число λ – это показатель Ляпунова линейной системы (1). Число ρ можно рассматривать как число вращения, определенное с точностью до целого. Как и в случае вещественного уравнения Риккати отображение Пуанкаре здесь забывает гомотопический тип решения. Поэтому теорема о топологическом типе решений комплексного уравнения Риккати формулируется с точностью до гомотопии.

Теорема 1. *Для уравнения на $S^1 \times S^2$ выполняется одна из следующих альтернатив:*

- 1) *существуют два грубых 2π -периодических решения;*
- 2) *существует континуум периодических решений;*
- 3) *существует континуум квазипериодических решений;*
- 4) *существует одно негрубое 2π -периодическое решение.*

Доказательство. В первом случае $z = 0$ и $z = \infty$ – неподвижные точки и они асимптотически устойчивы в положительную или отрицательную сторону. Различие между локсодромическим и гиперболическим случаем аналогично различию между фокусом и узлом в теории непрерывных динамических систем. Следовательно, эти два случая топологически сопряжены.

Второй случай соответствует рациональному значению числа ρ , в то время как третий – иррациональному.

Четвертый случай соответствует ситуации, когда два грубых периодических решения сливаются в одно.

Замечания. Преобразование Мёбиуса, как и всякое дробно-линейное преобразование комплексной плоскости, обладает круговым свойством. Вещественное уравнение Риккати в комплексной области имеет инвариантный цилиндр, что позволяет его

компактифицировать стандартным образом и определить число вращения (а также показатели Ляпунова).

По аналогии с этим можно определять число вращения; если соответствующее преобразование Мёбиуса имеет семейство инвариантных окружностей, то имеется инвариантная прямая, которая переводится линейным преобразованием в действительную ось.

Фазовое пространство $S^1 \times S^2$ расслаивается на инвариантные торы, которые пересекаются по двум 2π -периодическим траекториям в гиперболическом случае. В эллиптическом случае это объединение инвариантных торов, причем два из них вырождаются в замкнутые кривые. Параболический случай – слоение инвариантных торов касающихся по единственной замкнутой траектории.

3. Заключительные замечания

В качестве заключения этой работы построим вариант дифференциальных уравнений на компактификации линейного потока на $S^1 \times \mathbb{C}$. Процедура триангуляции системы (1) эквивалентна компактификации соответствующего уравнения Риккати (2) в вещественном случае [12]. По аналогии, в комплексном случае естественно использовать для триангуляции матрицу из группы специальных унитарных матриц $SU(2)$:

$$Q = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}, \quad \det Q = 1, \quad Q^* = Q^{-1}.$$

Если считать, что u и v зависят от времени, то замена $X = QY$ преобразует систему (1) в систему

$$\dot{Y} = T(t)Y = (Q^*(t)A(t)Q(t) - Q^*(t)\dot{Q}(t))Y,$$

которая будет треугольной, если u и v удовлетворяют уравнению

$$2u\bar{v}a(t) + u^2c(t) - \bar{v}^2b(t) = i\dot{u}\bar{v} - u\dot{\bar{v}}. \quad (4)$$

Произвольная матрица из группы $SU(2)$ параметризуется углами Эйлера:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{\varphi - \psi}{2}} & i \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{\varphi + \psi}{2}} \\ i \sin \frac{\theta}{2} e^{-\frac{\varphi + \psi}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{\varphi - \psi}{2}} \end{pmatrix},$$

где эти параметры принадлежат области

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \pi, \quad -2\pi \leq \psi < 2\pi.$$

Из этого следует, что уравнение (4) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi} \sin \theta + i\dot{\theta}e^{i\psi} = -ia(t)e^{i\psi} \sin \theta + c(t)e^{i(\varphi+\psi)} \cos \frac{\theta}{2} + b(t)e^{-i(\varphi-\psi)} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (5)$$

Производная параметра ψ по t не входит в уравнение (5), поэтому можно рассматривать его постоянным, например, равным нулю. В итоге получаем систему дифференциальных уравнений для угловых переменных θ , φ :

$$\dot{\theta} = -\alpha(t) \sin \theta + \cos^2 \frac{\theta}{2} (\gamma(t) \sin \varphi + \eta(t) \cos \varphi) + \sin^2 \frac{\theta}{2} (\xi(t) \cos \varphi - \beta(t) \sin \theta),$$

$$\sin \theta \dot{\varphi} = \delta(t) \sin \theta + \cos^2 \frac{\theta}{2} (\gamma(t) \cos \varphi - \eta(t) \sin \varphi) + \sin^2 \frac{\theta}{2} (\beta(t) \cos \varphi + \xi(t) \sin \theta).$$

В этих формулах

$$a(t) = \alpha(t) + i\delta(t), \quad b(t) = \beta(t) + i\xi(t), \quad c(t) = \gamma(t) + i\eta(t).$$

Еще одно интересное приложение, которое связано с комплексным уравнением Риккати – это теория конечнозонных потенциалов дифференциального оператора

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + V(t)u = \lambda u, \quad V(t + 2\pi) = V(t),$$

определенного на пространстве ограниченных на всей оси функций. Конечнозонный потенциал по определению имеет только конечное число интервалов постоянства числа вращения. С точки зрения теории динамических систем задача еще рассматривалась.

Литература

1. Мамаева Н.А., Сахаров А.Н. Геометрия областей устойчивости линейных канонических систем периодических дифференциальных уравнений // Сборник материалов IX международной научной молодежной школы–семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского. Саранск. 2020. С. 225–235.
2. Lloyd N.G. On a class of differential equations of Riccati type // J. London Math. Soc. 1975. V. 10, n. 2. P. 1–10.
3. Campos J., Ortega R. Nonexistence of periodic solutions of a complex Riccati equation // Differential and Integral Equations. 1996. V. 9, n. 2. P. 247–249.
4. Габдрахманов С.Р., Филиппов В.В. Об отсутствии периодических решений уравнения $z'(t) = z^2 + h(t)$ // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 6. С. 737–740.
5. Campos J. Möbius transformations and htriodic solutions of complex Riccati equations // Bull. London Math. Soc. 1997. V. 29. P. 205–215.
6. Ortega R. The complex periodic problem for a Riccati equation // Ann. Univ. Buchar., Math. Ser. 2012. 3 (61), № 2. P. 219–226.
7. Тыщенко В.Ю. Эквивалентность уравнений Риккати с периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 4. С. 565–567.
8. Robbin J.W. Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. V. 78, n. 6. P. 923–952.
9. Kuiper N., Robbin J. Topological classification of linear endomorphisms // Invent. Math. 1973. V. 19. P. 83–106.
10. Ройтенберг В.Ш. О грубости и бифуркациях уравнений Риккати с периодическими коэффициентами // Труды XI международных Колмогоровских чтений: сборник статей. Ярославль. 2013. С. 103–108.

11. Сахаров А.Н., Сидоров Е.А. О бифуркациях периодических решений комплексных полиномиальных дифференциальных уравнений // Вестник ННГУ. 2004. Вып.1(2). С. 159–170.
12. Сахаров А.Н. Об одном уравнении на цилиндре // Вестник ННГУ. 2003. Вып.1. С. 83–90.

MSC 34C20

Geometry of the phase space of the complex periodic Riccati equation

A. N. Sakharov

Nizhny Novgorod State Agricultural Academy

Abstract: Some questions related to the problem of describing topologies of trajectories of complex Riccati equations with periodic coefficients are considering. Such an equation is the result of prektivization of a linear system of differential equations with periodic coefficients. It is clear that the behavior of a linear periodic system is completely described by the theorem Floquet-Lyapunov. In a two-dimensional case, however, one can define and the complete topological invariant of the flow generated by this system. In the complex case, a number of well-known results are refined.

Keywords: Rikkati equation, extensions of linear flows, projective flows, rotation number, periodic solutions, Möbius transformation.

References

1. N.A. Mamaeva, A.N. Sakharov, Geometry of stability regions of linear canonical systems of periodic differential equations, *Collection of materials of the IX International Scientific Youth School–seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named by E. V. Voskresensky*, Saransk, 2020, P. 225–235.
2. N.G. Lloyd, On a class of differential equations of Riccati type, *J. London Math. Soc.*, 1975, V. 10, n. 2, P. 1–10.
3. J. Campos, R. Ortega, Nonexistens of periodic solutions of a complex Riccati tquation, *Differential and Integral Equations*, 1996, V. 9, n. 2, P. 247–249.
4. S.R. Gabdrakhmanov, V.V. Philippov, On the absence of periodic solutions to the equation $z'(t) = z^2 + h(t)$, *Differential Equations*, 1997, T. 33, № 6, P. 737–740.
5. J. Campos, Möbius transformations and htiriodic solutions of complex Riccati equations, *Bull. London Math. Soc.*, 1997, V. 29, P. 205–215.
6. R. Ortega, The complex periodic problem for a Riccati equation, *Ann. Univ. Buchar., Math. Ser.*, 2012, 3 (61), № 2, P. 219–226.
7. V.U. Tyshchenko, Equivalence of the Riccati equations with periodic coefficients, *Differential Equations*, 2003, T. 39, № 4, P. 565–567.

8. J.W. Robbin, Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc*, 1972, V. 78, n. 6, P. 923–952.
9. N. Kuiper, J. Robbin, Topological classification of linear endomorphisms, *Invent. Math.*, 1973, V. 19, P. 83–106.
10. V.Sh. Roitenberg, On the roughness and bifurcations of the Riccati equations with periodic coefficients, *Proceedings of the XI International Kolmogorov Readings: a collection of articles*, Yaroslavl, 2013, P. 103–108.
11. A.N. Sakharov, E.A. Sidorov, On bifurcations of periodic solutions of complex polynomial differential equations, *Bulletin of UNN*, 2004, issue 1(2), P. 159–170.
12. A.N. Sakharov, On one equation on a cylinder, *Bulletin of the UNN*, 2003, issue 1, P. 83–90.

УДК 51-7:614.4

Имитационная SI-модель распространения эпидемии в замкнутой популяции

Сыромясов А. О., Мальков В. Е.

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва

Аннотация: В статье изучается простейшая компартментальная SI-модель эпидемии, в которой популяция делится всего на две группы: восприимчивые и зараженные индивиды. Построен клеточный автомат, позволяющий реализовать дискретный вариант указанной модели. Описаны численные эксперименты, в которых с помощью этого автомата имитируется распространение коронавируса на массовых мероприятиях и в населенных пунктах. Показано, что расчеты согласно дискретному и непрерывному вариантам SI-модели приводят к практически одинаковым результатам, а предложенная методика проведения эксперимента позволяет достаточно точно определить параметры непрерывной модели. Кроме того, установлено, что эти параметры существенно зависят от стратегии перемещения индивидов в замкнутой области обитания популяции.

Ключевые слова: SI-модель, математическая модель эпидемии, клеточный автомат, имитационное моделирование.

1. Введение

Наиболее распространенным методом, применяемым при моделировании эпидемий, служит использование компартментальных моделей, в которых вся популяция разбивается на непересекающиеся подмножества в зависимости от эпидемического статуса входящих в них индивидов. Простейшая такая модель носит название SI, поскольку любой индивид в ней может иметь одно из двух состояний: восприимчивый к болезни (S – *susceptible*) или уже зараженный (I – *infected*). Далее эта идея развивается в моделях SIR, SEIR и т.д.

Динамика численности каждой из групп, выделенных в какой-либо модели, как правило, задается дифференциальными уравнениями; пионерские работы в этой области были проведены У. Кермаком и А. Маккендриком [1]. Так, модель SI может быть описана системой

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI, \quad \frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad S + I = N,$$

где I и S – численность зараженных (больных) и здоровых индивидов, соответственно, t – время. Постоянная величина N есть общая численность популяции, коэффициент β также постоянен, а начальная численность зараженных $I(0) = I_0$ известна. Смысл приведенных уравнений заключается в том, что скорость распространения инфекции пропорциональна количеству встреч восприимчивых индивидов с зараженными, а значит, произведению величин S , I . Переходя к единственному уравнению относительно $I(t)$, можно записать:

$$\frac{dI}{dt} = \beta I(N - I), \quad I(0) = I_0. \tag{1}$$

На модель (1) накладываются следующие очевидные ограничения:

1. Численность популяции не меняется вследствие рождения или смерти индивидов (например, по причине того, что популяция изучается в течение короткого времени).

2. Ареал, в который помещена популяция, замкнут. Иными словами, изменение численности N в связи с миграцией также исключено.

3. Численность популяции достаточно велика. Поскольку численности групп заболевших и здоровых индивидов суть дискретные величины, описывать их динамику дифференциальными уравнениями не вполне корректно. Чтобы допускаемая при этом ошибка была небольшой, необходимо, чтобы приращения численности групп, обозначенные дифференциалами dI и dS , были малы по сравнению с самими I и S .

Такого рода модели просты для понимания и исследования. Однако обыкновенные дифференциальные уравнения не учитывают локальных особенностей передвижения индивидов внутри ареала, а заранее определить входящие в них коэффициенты (такие, как β , а в более сложных моделях – и другие) может быть затруднительно.

Альтернативным способом моделирования эпидемии является использование клеточных автоматов (КА). При таком подходе все занятое автоматом поле делится на отдельные клетки с конечным числом состояний, причем состояния эти меняются с течением времени по определенным правилам [2]. Именно этот подход развивается в настоящей работе.

Конкретным приложением построенного клеточного автомата служит модель распространения COVID-19 в населенном пункте или на массовом мероприятии, поэтому далее вместо словосочетания «поле, занятое КА» используется короткий термин «город».

Конечной целью работы автомата служит определение коэффициента β в уравнении (1).

2. Дискретная SI-модель эпидемии и ее реализация клеточным автоматом

Итак, «город» представляет собой квадрат $K \times K$ клеток, в который помещены N индивидов (здоровых и уже зараженных). На каждом шаге работы КА индивиды случайным образом перемещаются в соседние клетки по горизонтали, вертикали или диагонали; они могут также остаться на месте. Иными словами, перемещение каждого члена популяции происходит в рамках так называемой окрестности Мура порядка 1 (рис. 1).

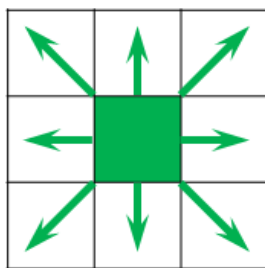


Рис. 1. Возможные перемещения индивида при работе КА.

Если в одной клетке оказались здоровый и зараженный индивиды, разыгрывается случайная величина, так что с заданной вероятностью p здоровый индивид заболевает.

Указанный автомат был реализован с помощью фреймворка Java FX. Это позволило на персональном компьютере изучать динамику эпидемии в «городе» с площадью в несколько сотен тысяч клеток и «населением» в несколько десятков тысяч индивидов.

Отдельно остановимся на применимости описанного КА для исследования модели (1).

Очевидно, в этом автомате выполнены первые два требования, наложенные выше на SI-модель: постоянство численности популяции и замкнутость ареала. Последнее требование (большая численность популяции) должно отслеживаться в рамках каждого конкретного численного эксперимента.

Пусть теперь I_n – численность заболевших на n -м шаге работы автомата. Повторяя рассуждения о том, что приращение количества инфицированных пропорционально числу встреч больных индивидов со здоровыми, получим дискретный аналог (1):

$$I_{n+1} - I_n = \gamma I_n (N - I_n), \quad (2)$$

причем величина I_0 имеет тот же смысл, что и выше, и вновь известна заранее.

Если предположить, что значение функции $I(t)$ в (1) изменяется в последовательные моменты времени t_n , разделенные достаточно малым интервалом Δt , то указанное соотношение может быть переписано в виде

$$I(t_n + \Delta t) - I(t_n) \approx \beta I(t_n) (N - I(t_n)) \Delta t.$$

Последнее равенство соответствует разностному уравнению (2), если принять, что шаги работы автомата совершаются в моменты t_n , $I_n = I(t_n)$, и положить

$$\gamma = \beta \Delta t. \quad (3)$$

Таким образом, динамика численности инфицированных индивидов в непрерывной SI-модели описывается с помощью КА, если интервал Δt между шагами работы КА мал.

3. Описание численных экспериментов

При проведении численных экспериментов предполагалось, что сторона одной клетки равна 1.5 м (социальная дистанция при COVID-19), а интервал между шагами работы КА составляет $\Delta t = 1$ с. Тогда скорость движения представителей популяции по клеткам оказывалась равной 1.5 м/с (при перемещении по горизонтали или вертикали, см. рис. 1) или 2.1 м/с (при движении по диагонали), т.е. лишь немногим более скорости пешехода.

Общая численность «городского населения» была принята равной $N = 1000$, а начальное количество инфицированных I_0 считалось равным 10, 20 и 30. Тем самым, было выполнено последнее из приведенных ранее требований к непрерывной SI-модели: численность популяции оказалась достаточно велика.

В качестве K рассматривались два значения: 338 и 84. Первая величина при заданном N обеспечивает «плотность населения», примерно равную плотности населения г. Саранска (около 3900 чел. на кв. км). Действительно, реальная площадь

такого «города» составляет $(1.5 \cdot 338)^2 = 257049 \text{ м}^2$, что при населении в 1000 человек и дает искомую плотность. Второй вариант K позволяет смоделировать массовое мероприятие (концерт, митинг) на Советской площади того же города (около 16000 м^2).

Предполагалось, что $p = 1.5\%$ или $p = 70\%$; это установленные Роспотребнадзором вероятности передачи вируса COVID-19 от носителя к незараженному человеку при условии, что они оба находятся в масках или без них соответственно.

Наконец, автомат проделывал 600 шагов, т. е. моделировались 10 минут жизни популяции. Исходными данными для определения параметра β служили I_0 , а также полученные в ходе работы КА величины I_{120} , I_{240} , I_{360} , I_{480} и I_{600} . Поскольку 120-секундные интервалы, через которые запоминались значения I , многократно больше выбранного Δt , то уравнение (1) с хорошей точностью приближается соотношением (2), а в силу (3) $\beta = \gamma$.

Поскольку на каждом шаге работы КА направление движения любого индивида выбирается произвольно, то и получаемые I_n являются случайными величинами. Чтобы упорядочить этот процесс, при каждом наборе параметров (K, p, I_0) описанная 600-шаговая имитация производилась несколько раз (до 80), а затем результаты на каждом контрольном шаге усреднялись. Таким образом получались величины $\langle I_{120} \rangle, \langle I_{240} \rangle, \dots, \langle I_{600} \rangle$, равные средней численности зараженных через 120, 240, ..., 600 шагов после начала эксперимента.

В альтернативной серии экспериментов параметры K, p, I_0 оставались прежними, но режим движения по «городу» был иным: вместо перемещения на одну из клеток окрестности Мура положение каждого индивида на следующем шаге менялось абсолютно случайным образом, так что КА «засеивался» здоровыми и зараженными клетками. Остальные этапы эксперимента не менялись. Если в одной клетке оказывались восприимчивый и инфицированный индивиды, то с вероятностью p здоровый индивид заражался. По итогам нескольких «пробегов» автомата (продолжительностью 600 шагов каждый) усреднялись величины $I_{120}, I_{240}, \dots, I_{600}$.

Далее два описанных варианта работы КА будут называться режимами «перемещения» и «засеивания», соответственно.

4. Анализ результатов эксперимента

Аналитическое решение (1) известно:

$$I(t) = \frac{NI_0 e^{\beta Nt}}{N - I_0 + I_0 e^{\beta Nt}}. \quad (4)$$

Зная N, I_0 , а также принимая в качестве значений $I(t)$ в моменты $t = 120, \dots, 600$ с усредненные величины $\langle I_{120} \rangle, \dots, \langle I_{600} \rangle$, можно из (4) приближенно определить β . Для этого может быть использован метод наименьших квадратов (так, в пакете Wolfram Mathematica он реализован стандартной функцией **FindFit**).

Поскольку перечисленные $\langle I_n \rangle$ по-прежнему случайны, предварительно необходимо:

1. Убедиться в их устойчивости относительно изменения количества «пробегов» автомата T (*trials*), по которым ведется усреднение.
2. Оценить степень отклонения I_n от их средних значений.

В качестве иллюстрации в табл. 1 приведена зависимость $\langle I_n \rangle$ от T , полученная при $K = 338$, $p = 70\%$, $I_0 = 20$ для режима «перемещения» (при других наборах начальных данных, а также для режима «засеивания» ситуация сходна).

Таблица 1. Зависимость $\langle I_n \rangle$ от T

T	$\langle I_{120} \rangle$	$\langle I_{240} \rangle$	$\langle I_{360} \rangle$	$\langle I_{480} \rangle$	$\langle I_{600} \rangle$
10	32.3000	50.3000	73.9000	104.4000	143.7000
20	32.7000	49.3500	72.7500	103.0000	140.7000
40	34.0500	52.9000	78.2000	109.1750	149.6000
80	33.7125	53.1375	78.0750	109.6875	150.6000

Как видно, при увеличении T средние значения I_n стремятся к некоторому единому значению. Далее в качестве $\langle I_n \rangle$ рассматриваются величины, полученные при $T = 80$.

Попытка построить доверительные интервалы для $\langle I_n \rangle$ оказалась неудачной: очевидная гипотеза о нормальном распределении I_n , проверенная с помощью χ^2 -критерия, была отвергнута уже на уровне значимости 0.9. Поэтому в качестве меры разброса числа зараженных была принята стандартная ошибка среднего SE (*standard error*), равная $SE = s/\sqrt{T}$. Здесь s – выборочное среднее квадратическое отклонение исследуемой величины.

Вычисленные при обработке результатов эксперимента значения SE составляют единицы процентов по сравнению как с самими $\langle I_n \rangle$, так и с их «чисто случайными» компонентами $\langle I_n \rangle - I_0$. Так, для приведенного выше набора начальных параметров и режима «перемещения» величина SE для $\langle I_{600} \rangle$ равна 2.59, в то время как $\langle I_{600} \rangle - I_0 = 130.60$. Это позволяет считать колеблемость $\langle I_n \rangle$ при $T = 80$ достаточно малой.

Проведенная подготовительная работа позволяет определить β при любом наборе исходных параметров и для обоих режимов движения. Результаты приведены в табл. 2; прочерк означает, что соответствующий эксперимент не проводился.

Полученные значения β обладают следующими отличительными особенностями:

1. Практически полная независимость от I_0 . Это закономерно, ибо в (1) коэффициент β дифференциального уравнения не связан с начальными данными задачи Коши.

2. Существенная зависимость от способа движения. Коэффициенты, полученные для режима «перемещения», могут в разы отличаться от величин для режима «засеивания».

Кроме того, очевидно, что $\beta(p, K)$ возрастает при увеличении p и убывает с ростом K ; последний факт объясняется тем, что с увеличением K уменьшается плотность населения, а значит, и интенсивность встреч зараженных индивидов со здоровыми.

На рис. 2 показано соответствие экспериментальных данных (красные точки) и логистической функции (4) с подобранным β при $K = 338$, $p = 70\%$, $I_0 = 20$ (сплошная линия). Как видно, это соответствие является вполне удовлетворительным.

Отметим, что при $K = 84$ логистическая кривая быстро выходит на насыщение при обоих режимах движения даже если $p = 1.5\%$. Иными словами, если среди 1000 участников массового мероприятия на городской площади будет хотя бы 10 зараженных, то через 10 минут практически все остальные также будут заражены (в условиях, когда им позволено свободно перемещаться). Разумеется, в реальности передача

Таблица 2. Зависимость β от параметров КА

K	p	I_0	βN («перемещение»)	βN («засеивание»)
338	70%	10	0.00358	0.00860
338	70%	20	0.00367	0.00867
338	70%	30	0.00359	0.00873
338	1.5%	10	0.00014	–
338	1.5%	20	0.00014	–
338	1.5%	30	0.00013	–
84	70%	10	0.04507	–
84	70%	20	0.04886	–
84	70%	30	0.05106	–
84	1.5%	10	0.01626	0.02063
84	1.5%	20	0.01707	0.02088
84	1.5%	30	0.01724	0.02066

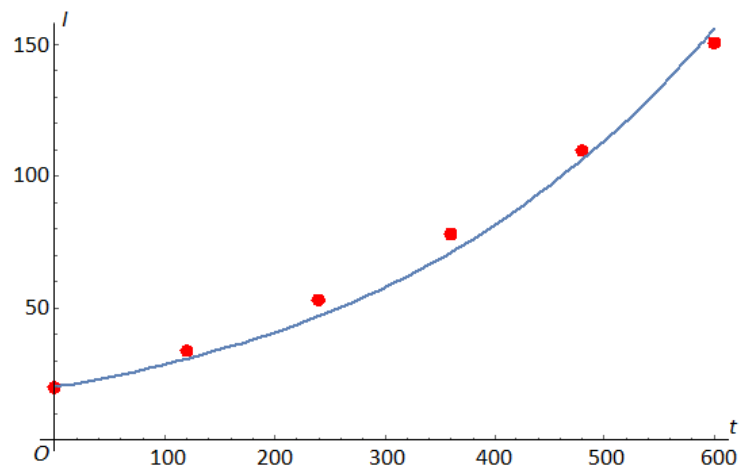


Рис. 2. Соответствие экспериментальных данных аналитическому решению.

инфекции не происходит мгновенно, должен пройти некий инкубационный период и т. д. Тем не менее, этот предельный случай позволяет выработать рекомендации по проведению массовых мероприятий во время эпидемии: помимо соблюдения масочного режима и экспресс-тестирования на заболевание при входе на мероприятие желательно ограничить подвижность участников.

5. Заключение

В настоящей работе показано, что клеточный автомат может быть эффективным инструментом моделирования эпидемии, причем для эмуляции небольшого населенного пункта (несколько тысяч жителей) может быть достаточно использовать персональный компьютер. В частности, использование КА позволяет воспроизвести поведение компартментальных моделей, заданных обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Конкретным примером данного подхода в статье служит моделирование распространения COVID-19; исходные данные в численном эксперименте приближены к реальности. Получено, что скорость распространения заболевания зависит не только от вероятности передачи инфекции при непосредственном контакте и от плотности расселения индивидов в ареале, но и от характера их передвижения.

Указанный метод в дальнейшем может совершенствоваться. Во-первых, число состояний индивида в модели может быть увеличено, а заболеванию (после контакта здорового индивида с зараженным) может предшествовать инкубационный период. Во-вторых, соседние клетки могут быть разделены непроницаемыми границами, воспроизводящими городскую топографию (стены домов, заборы). В-третьих, если моделируемый промежуток времени велик, то может быть учтена различная активность индивидов в зависимости от времени суток. В-четвертых, скорость индивида может зависеть от его местоположения: так, если занятая им клетка символизирует участок автодороги, то его скорость вдоль дороги растет.

Литература

1. Kermack W. O., McKendrick A. G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1927. V. 115, N 772. P. 700–721.
2. Von Neumann J. Theory of Self-Reproducing Automata. University of Illinois Press, 1966.

MSC 92D30, 68Q80, 34A34

Imitational SI-model of epidemy spread in closed polulation

A. O. Syromyasov, V. E. Malkov

National Research Ogarev Mordovia State University

Abstract: The article explores simplest compartmental SI-model of epidemy, where all the individuals in a population are divided into two groups: susceptible (S) and infected (I) ones. Cellular automaton is built that allows to emulate discrete version of this model. Numerical experiments imitating disease propagation using the automaton are described in the paper. It is shown that the calculations corresponding to discrete and continuous versions of SI-model lead to almost the same results and that supposed experimental procedure allows to find parameters of continuous model quite accurately. Moreover, it is established that these parameters essentially depend on strategy of individuals movement in a closed area of population inhabitation.

Keywords: SI-model, mathematical modelling of epidemy, cellular automata, imitational modelling.

References

1. W.O. Kermack, A.G. McKendrick, A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics, *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 1927, V. 115, N 772, P. 700–721.
2. J. Von Neumann, Theory of Self-Reproducing Automata, University of Illinois Press, 1966.

УДК 517.9

Численное решение обратной задачи для интегральных динамических моделей с разрывными ядрами

Тында А. Н.¹, Сидоров Д. Н.^{2,3}

Пензенский государственный университет¹,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН²,
Иркутский национальный исследовательский университет³.

Аннотация: В статье построен численный метод решения обратной задачи для математической модели, описываемой слаборегулярным интегральным уравнением Вольтерра I рода с ядром, терпящим разрыв вдоль гладкой кривой.

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольтерра I рода, разрывные ядра, обратная задача, арифметическая сложность.

1. Введение

Работа посвящена численному исследованию интегральных динамических моделей, в основе которых лежат интегральные уравнения Вольтерра I рода с ядрами, терпящими разрывы на множестве гладких кривых. Речь идет об уравнениях вида

$$\int_0^t K(t, s)x(s)ds = g(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad g(0) = 0, \quad (1)$$

где ядро $K(t, s)$ представимо в форме

$$K(t, s) = \begin{cases} K_1(t, s), & t, s \in m_1, \\ \dots & \dots \\ K_n(t, s), & t, s \in m_n, \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $m_i = \{t, s \mid \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t)\}$, $\alpha_0(t) = 0$, $\alpha_n(t) = t$, $i = \overline{1, n}$, $\alpha_i(t)$, $g(t) \in C_{[0, T]}^1$, функции $K_i(t, s)$ имеют непрерывные производные по переменной t при $(t, s) \in cl(m_i)$, $K_n(t, t) \neq 0$, $\alpha_i(0) = 0$, $0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < t$, функции $\alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ монотонно возрастают и $0 < \alpha'_1(0) \leq \dots \leq \alpha'_{n-1}(0) < 1$, а $cl(m_i)$ — замыкание множества m_i .

Такие слабо регулярные уравнения Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами были впервые классифицированы Д. Н. Сидоровым [1] и А. Лоренци [2] и активно изучались многими авторами в течение последнего десятилетия. Здесь читатели могут обратиться к [3] и источникам в этой монографии. Операторным уравнениям Вольтерра первого рода с разрывными ядрами посвящены работы Н. А. Сидорова и Д. Н. Сидорова [4]. Такие модели Вольтерра находят применение при моделировании различных динамических процессов, включая системы накопителей энергии [5, 6].

2. Обратная задача

Классическая постановка задачи для модели (1)-(2) заключается в определении $x(t)$ при известных остальных компонентах. Однако ряд естественных приложений модели (1)-(2) на практике приводит обратной задаче, заключающейся в определении линий разрыва $\alpha_i(t)$. При такой постановке уравнение (1) трактуется уже как нелинейное интегральное уравнение с неизвестными пределами интегрирования, численное исследование которого представляет математически более сложную задачу. Сложность дискретизации в первую очередь связана с аппроксимацией интегралов при неизвестных длинах отрезков интегрирования.

Модели, описываемые интегральными уравнениями с неизвестными пределами интегрирования, берут свое начало в работах В. М. Глушкова [7], их экономические приложения исследуются в работах N. Hritonenko и Yu. Yatsenko [8], ряд прямых и итерационных численных методов предложен А. Н. Тындой в [9, 10].

В настоящей работе для обратной задачи (1)-(2) в случае $n = 2$ предлагается прямой метод дискретизации первого порядка точности с апостериорной верификацией вычислений.

3. Численный метод

Рассмотрим задачу (1)-(2) при $n = 2$, состоящую в определении одной неизвестной функции разрыва $\alpha_1(t) = \alpha(t)$:

$$\int_0^{\alpha(t)} K_1(t, s)x(s)ds + \int_{\alpha(t)}^t K_2(t, s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Для построения приближенного решения введем на отрезке $[0, T]$ сетку узлов $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Решение будем искать в виде кусочно-линейной функции $\alpha_N(t)$, построенной по точкам (t_k, α_k) , $\alpha_k = \alpha(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N$.

Приступим к определению неизвестных значений α_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Для проведения дискретизации уравнения (3) введем также вспомогательную целочисленную функцию

$$v(k) = v_k \text{ если } t_{v_k-1} < \alpha_k \leq t_{v_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Другими словами, $v(k)$ обозначает номер сегмента сетки, на который попадает неизвестное значение α_k . Поскольку $\alpha(t)$ — монотонно возрастающая функция и $\alpha(t) < t$, имеем

$$v_k \leq k \text{ и } v_p \leq v_m \text{ при } p < m.$$

Потребуем чтобы в узлах сетки $t = t_k$, $k = 1, 2, \dots, N$ уравнение (3) обращалось в равенства:

$$\int_0^{\alpha_k} K_1(t_k, s)x(s)ds + \int_{\alpha_k}^t K_2(t_k, s)x(s)ds = f(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

Используя определение v_k и обозначив $f_k = f(t_k)$, можем представить (4) в следующем виде

$$\sum_{m=1}^{v_k-1} \int_{t_{m-1}}^{t_m} K_1(t_k, s)x(s)ds + \int_{t_{v_k-1}}^{\alpha_k} K_1(t_k, s)x(s)ds +$$

$$+ \int_{\alpha_k}^{t_{v_k}} K_2(t_k, s)x(s)ds + \sum_{p=v_k}^{k-1} \int_{t_p}^{t_{p+1}} K_2(t_k, s)x(s)ds = f_k. \quad (5)$$

Допуская, что значения v_k , $k = 1, 2, \dots, N$ каким-то образом получены, аппроксимируем интегралы в (5) следующим образом

$$\sum_{m=1}^{v_k-1} K_1 \left(t_k, \frac{t_{m-1} + t_m}{2} \right) x \left(\frac{t_{m-1} + t_m}{2} \right) (t_m - t_{m-1}) + (\alpha_k - t_{v_k-1}) K_1(t_k, t_{v_k-1}) x(t_{v_k-1}) +$$

$$+ (t_{v_k} - \alpha_k) K_2(t_k, t_{v_k}) x(t_{v_k}) + \sum_{p=v_k}^{k-1} K_2 \left(t_k, \frac{t_p + t_{p+1}}{2} \right) x \left(\frac{t_p + t_{p+1}}{2} \right) (t_{p+1} - t_p) = f_k. \quad (6)$$

Здесь для аппроксимации интегралов в первом и четвертом слагаемых (5) применена квадратурная формула средних прямоугольников, для второго слагаемого — левых, а для третьего — правых прямоугольников.

Из (6) имеем

$$\alpha_k = \frac{f_k - S_1 - S_2 + t_{v_k-1} K_1(t_k, t_{v_k-1}) x(t_{v_k-1}) - t_{v_k} K_2(t_k, t_{v_k}) x(t_{v_k})}{K_1(t_k, t_{v_k-1}) x(t_{v_k-1}) - K_2(t_k, t_{v_k}) x(t_{v_k})}, \quad (7)$$

где

$$S_1 = \sum_{m=1}^{v_k-1} K_1 \left(t_k, \frac{t_{m-1} + t_m}{2} \right) x \left(\frac{t_{m-1} + t_m}{2} \right) (t_m - t_{m-1}),$$

$$S_2 = \sum_{p=v_k}^{k-1} K_2 \left(t_k, \frac{t_p + t_{p+1}}{2} \right) x \left(\frac{t_p + t_{p+1}}{2} \right) (t_{p+1} - t_p).$$

Таким образом, при знании номеров v_k , $k = \overline{1, N}$, приближенные значения α_k искомой функций в точках сетки могут быть найдены по явной формуле (7).

Идея определения номеров v_k состоит в последовательном для каждого номера узла $k = 1, 2, \dots, N$, переборе возможных значений v_k :

$$v_1 = 1;$$

$$v_2 = v_1 \text{ или } v_2 = 2;$$

$$v_3 = v_2 \text{ или } v_3 = v_2 + 1 \text{ или } v_3 = 3;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$v_k = v_{k-1}, v_k = v_{k-1} + 1, v_k = v_{k-1} + 2, \dots, v_k = k,$$

и нахождении соответствующих значений α_k по формуле (7). Перебор для каждого значения k прекращается в случае выполнения условия $\alpha_k \in (t_{v_k-1}, t_{v_k}]$, подтверждающего предположение о принадлежности α_k указанному интервалу.

Нетрудно видеть, что оценка точности приближенного решения задачи (3) по предложенной вычислительной схеме имеет вид

$$\max_{t \in [0, T]} |\alpha_N(t) - \alpha(t)| = O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (8)$$

4. Арифметическая сложность

Обратимся к вопросу затратности предложенного метода с точки зрения арифметической сложности вычислений. Будем считать количество требуемых арифметических операций, вычислений значений входящих в уравнение функций, а также операций сравнения двух чисел.

1. Вычисление значений функций $f(t)$, $K_1(t, s)$, $K_2(t, s)$, $x(t)$ в узлах сетки и в средних точках:

$$4N + N^2;$$

2. Вычисление значений α_k , $k = 1, 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} & \overbrace{12 \cdot 3 \cdot \sum_{k=1}^N 2 \cdot \frac{1+k-1}{2} (k-1)}^{\text{Вычисление сумм } S_1, S_2} = 36 \sum_{k=1}^N k(k-1) = \\ & = 36 \left(\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{1+N}{2} N \right) = 12N(N^2 - 1); \end{aligned}$$

3. Оценка количества арифметических операций P_N^1 на перебор возможных значений α_k :

$$P_N^1 \leq \sum_{k=1}^N (1 + 2 + \dots + k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N k(k+1) = \frac{N(N+1)(N+2)}{6};$$

4. Оценка количества операций сравнения P_N^2 при переборе возможных значений α_k :

$$P_N^2 \leq 2P_N^1 = \frac{N(N+1)(N+2)}{3}.$$

Таким образом, получаем общую оценку $P(N)$ арифметической сложности метода:

$$\begin{aligned} P(N) = 4N + N^2 + P_N^1 + P_N^2 & \leq 4N + N^2 + 12N(N^2 - 1) + \frac{N(N+1)(N+2)}{6} + \\ & + \frac{N(N+1)(N+2)}{3} = \frac{N(25N^2 + 5N - 14)}{2} = O(N^3). \quad (9) \end{aligned}$$

Литература

1. Sidorov D.N. On parametric families of solutions of Volterra integral equations of the first kind with piecewise smooth kernel // Diff. Equat. 2013. 49. P. 210–216.

2. Lorenzi A. Operator equations of the first kind and integro-differential equations of degenerate type in Banach spaces and applications of integro-differential PDE's // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2013. Volume 1, Issue 2. P. 50–75.
3. Sidorov D. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals And Control, In: L. O. CHUA, ed. World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A: Vol. 87, Singapore: World Scientific Press, 2015 .
4. Sidorov N.A., Sidorov D.N. On the solvability of a class of Volterra operator equations of the first kind with piecewise continuous kernels // Math. Notes. 2014. 96. P. 811–826.
5. Sidorov D., Panasetsky D., Tomin N., Karamov D., Zhukov A., Muftahov I., Dreglea A., Liu F., Li Y. Toward Zero-Emission Hybrid AC/DC Power Systems with Renewable Energy Sources and Storages: A Case Study from Lake Baikal Region // Energies. 2020. 1. 1226.
6. Sidorov D., Tynda A., Muftahov I., Dreglea A., Liu F. Nonlinear Systems of Volterra Equations with Piecewise Smooth Kernels: Numerical Solution and Application for Power Systems Operation // Mathematics. 2020. 8, 1257
7. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. Москва: Наука, 1983. 352 с.
8. Yatsenko Yu. Volterra integral equations with unknown delay time // Methods and Applications of Analysis. 1995. 2 (4). P. 408-419.
9. Tynda A.N. Iterative numerical method for integral models of a nonlinear dynamical system with unknown delay // PAMM. 2009. Volume 9, Issue 1. P. 591–592.
10. Tynda A.N. On the direct numerical methods for systems of integral equations with nonlinear delays // PAMM. 2008. Volume 8, Issue 1. P. 10857–10858.

MSC 65R20, 45G10

Numerical solution of the inverse problem for integral dynamic models with discontinuous kernels

A. N. Tynda¹, D. N. Sidorov^{2,3}

Penza State University¹, Melentiev Energy Systems Institute
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences²,
Irkutsk National Research University³

Abstract: The paper presents a numerical method for solving the inverse problem for a mathematical model described by a weakly regular Volterra integral equation of the first kind with kernel having a discontinuity along a smooth curve.

Keywords: Volterra integral equation of the first kind, discontinuous kernels, inverse problem, arithmetic complexity.

References

1. D.N. Sidorov, On parametric families of solutions of Volterra integral equations of the first kind with piecewise smooth kernel, *Diff. Equat.*, 2013, 49, P. 210–216.
2. A. Lorenzi, Operator equations of the first kind and integro-differential equations of degenerate type in Banach spaces and applications of integro-differential PDE's, *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*, 2013, Volume 1, Issue 2, 50–75.
3. D. Sidorov, Integral Dynamical Models: Singularities, Signals And Control, In: L. O. CHUA, ed. World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A: Vol. 87, Singapore: World Scientific Press, 2015 .
4. N.A. Sidorov, D.N. Sidorov, On the solvability of a class of Volterra operator equations of the first kind with piecewise continuous kernels, *Math. Notes*, 2014, 96, 811–826.
5. D. Sidorov, D. Panasetsky, N. Tomin, D. Karamov, A. Zhukov, I. Muftahov, A. Dreglea, F. Liu, Y. Li, Toward Zero-Emission Hybrid AC/DC Power Systems with Renewable Energy Sources and Storages: A Case Study from Lake Baikal Region, *Energies*, 2020, 13, 1226.
6. D. Sidorov, A. Tynda, I. Muftahov, A. Dreglea, F. Liu, Nonlinear Systems of Volterra Equations with Piecewise Smooth Kernels: Numerical Solution and Application for Power Systems Operation, *Mathematics*, 2020, 8, 1257.
7. V.M. Glushkov, V.V. Ivanov, V.M. Yanenko, Modelirovanie razvivayushchikhsya sistem, Moskva, Nauka, 1983, 352p.
8. Yu. Yatsenko, Volterra integral equations with unknown delay time, *Methods and Applications of Analysis*, 1995, 2 (4), P. 408-419.
9. A.N. Tynda, Iterative numerical method for integral models of a nonlinear dynamical system with unknown delay, *PAMM*, 2009, Volume 9, Issue 1, P.591–592.

10. A.N. Tynda, On the direct numerical methods for systems of integral equations with nonlinear delays, *PAMM*, 2008, Volume 8, Issue 1, P. 10857–10858.

УДК 519.63

Математическое моделирование многостадийной гетерогенной реакции с учетом кинетики на поверхности цеолитного катализатора*

Усманова А. А.¹, Коледина К. Ф.^{1,2}

Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН¹,
Уфимский государственный нефтяной технический университет²

Аннотация: В работе рассматривается гетерогенная фаза многостадийной химической реакции. В работе проведено математическое моделирование реакции в форме системы уравнений, состоящей из частных производных параболического типа, с учетом кинетики и массопереноса на зерне цеолитного катализатора. Для построения системы применяется теоретико-графовый метод, а для ее решения используется метод конечных разностей. В исследовании показаны результаты, полученные при моделировании реакции синтеза метил-трет-бутилового эфира под действием НУ на зерне катализатора.

Ключевые слова: математическое моделирование, метод конечных разностей, диффузия, кинетика, массообмен в зерне катализатора.

1. Введение

В работе [1] разработан метод синтеза алкил-трет-бутиловых эфиров межмолекулярной дегидратацией трет-бутилового спирта с алифатическими первичными спиртами C1-C10 с использованием в качестве катализатора цеолита НУ с иерархической структурой, а также каталитической системы на основе CuBr_2 , нанесенного на цеолит НУ. Исследуются синтез метил-трет-бутилового, этил-трет-бутилового и пропил-трет-бутилового эфиров. Для всех процессов имеются экспериментальные данные при различных температурах, соотношениях веществ, а также времени протекания реакций [1]. Математическое описание кинетики таких процессов представляет собой нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности [1]. Математическое исследование каталитических систем требует учета, наряду с кинетикой, процессов массопереноса на зерне и в слое катализатора. Поэтому актуальной задачей является разработка методов моделирования кинетики и диффузии на зерне катализатора для многостадийных химических процессов. Уравнение, описывающее массоперенос в порах зерна катализатора, является уравнением в частных производных параболического типа. Предлагается решать такие системы с применением метода конечных разностей [2, 3].

2. Методология

Принимается, что в гетерогенном катализе компоненты адсорбируются на поверхности катализатора и приходят с этой поверхностью в состояние теплового равновесия [2]. По окончании реакции происходит десорбция образованных продуктов

*Работа выполнена в рамках государственного задания Института нефтехимии и катализа УФИЦ РАН (тема № FMRS-2022-0078).

реакции. В уравнение изменения скоростей стадий вводится учет доли поверхности катализатора, занятой реагентами:

$$\omega_j = k_j \cdot \prod_{i=1}^I (C_i)^{|\alpha_{ij}|} \cdot \prod_{i=1}^I (\theta_i)^{|\alpha_{ij}|} - k_{-j} \cdot \prod_{i=1}^I (C_i)^{|\beta_{ij}|} \cdot \prod_{i=1}^I (\theta_i)^{|\beta_{ij}|} \quad (1)$$

Здесь ω_j – скорость кинетической реакции; k_j – константа скорости; θ_i – доля поверхности катализатора, занятая i -м компонентом; C_i – концентрация реагента.

Для нахождения долей поверхности катализатора будем использовать теоретико-графовый подход, предложенный в [4].

Уравнение массообмена в зерне катализатора имеет вид [5–7]:

$$\varepsilon_p \frac{\partial c_i}{\partial t} = D_i^{eff} \left(\frac{\partial^2 c_i}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial c_i}{\partial r} \right) - \sum_j v_{ij} \omega_j \quad (2)$$

где ε_p – порозность (доля свободного объема) гранулы катализатора, м²; c_i – объемная (мольная) концентрация i -го вещества, моль/л; D_i^{eff} – эффективный коэффициент диффузии в порах катализатора, м²/с; r – пространственная координата в сферических координатах; t – время, с; m – фактор формы (0 – для бесконечно плоской пластины толщиной r , 1 – для бесконечного цилиндра радиуса r , 2 – для сферы радиуса r); c_i^p – концентрация реагента на поверхности гранулы, моль/л; R – полный размер (радиус) гранулы катализатора, м; v_{ij} – стехиометрический коэффициент i -го вещества в превращении; ω_j – скорость превращений, м/с.

Для решения уравнения (2) предлагается применение метода конечных разностей (МКР) [8–10]. Применение этого метода характеризуется относительной простотой построения решающего алгоритма и его программной реализации. Основой МКР является дискретизация – замена непрерывной области совокупностью изолированных точек (сеткой), причем решение уравнений ищется лишь в этих точках (узлах сетки). Производные заменяются (аппроксимируются) конечными разностями, и решение уравнения в частных производных сводится к решению системы алгебраических уравнений [11, 12].

Уравнение массопереноса с применением МКР с помощью левой пространственной разности имеет вид:

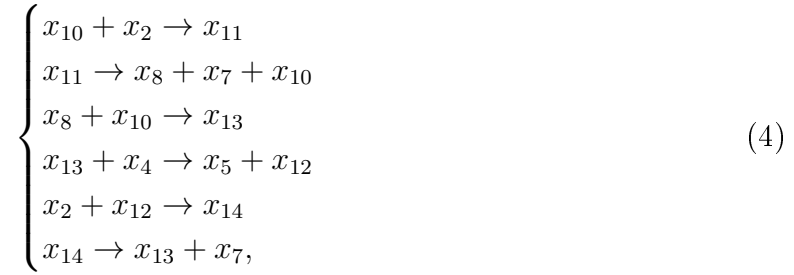
$$\varepsilon_p \frac{c_{i,z}^j - c_{i,z}^{j-1}}{\tau} = D_i^{eff} \left(\frac{c_{i+1,z}^j - 2c_{i,z}^j + c_{i-1,z}^j}{h^2} + \frac{m}{h} \frac{c_{i,z}^j - c_{i-1,z}^j}{2h} \right) + \sum v_{in} \omega_n, \quad (3)$$

где h – шаг по радиусу; τ – шаг по времени; z – номер вещества; n – количество стадий.

3. Результаты и их обсуждение

Рассматривается процесс синтеза метил-трет-бутилового эфира (МТБЭ) под действием цеолита НУ. МТБЭ используется как антидетонационная присадка к бензинам. Для данного процесса исследуется применение цеолитных катализаторов в

лабораторных условиях [13]. Рассмотрим следующую систему химических реакций:



где $x_{10} - HY$, $x_2 - (CH_3)_3COH$, $x_{11} - (CH_3)_3COH_2Y$, $x_8 - CH_2$, $x_7 - H_2O$, $x_{13} - (CH_3)_3C$, $x_4 - MeOH$, $x_5 - (CH_3)_3COMe$, $x_{12} - H$, $x_{14} - (CH_3)_3COH_2$.

Кинетические уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \omega_1 = k_1 \cdot C_2 \cdot \theta_{10} \\ \omega_2 = k_2 \cdot \theta_{11} \\ \omega_3 = k_3 \cdot C_8 \cdot \theta_{10} \\ \omega_4 = k_4 \cdot C_4 \cdot \theta_{13} \\ \omega_5 = k_5 \cdot C_2 \cdot \theta_{12} \\ \omega_6 = k_6 \cdot \theta_{14} \end{cases}, \quad (5)$$

где ω_i – скорость реакции; k_i – константа скорости; C_i – концентрация вещества, моль/л; θ_i – доля поверхности катализатора, занятая i -м компонентом;

Начальные данные в начальный момент времени:

$$C_2 = C_2^0; \quad C_4 = C_4^0; \quad C_{10} = C_{10}^0; \quad C_i = 0; \quad i = 5, \dots, 8, 11, \dots, 14.$$

Тогда математическая модель кинетики будет иметь вид системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений [14]:

$$\begin{cases} \frac{\partial C_2}{\partial t} = -\omega_1 - \omega_5 \\ \frac{\partial C_4}{\partial t} = -\omega_4 \\ \frac{\partial C_5}{\partial t} = \omega_4 \\ \frac{\partial C_7}{\partial t} = \omega_2 + \omega_6 \\ \frac{\partial C_8}{\partial t} = \omega_2 - \omega_3 \end{cases}. \quad (6)$$

Построим дерево маршрута реакций, используя теорию графов (рис. 1) [4]:

С помощью графа мы сможем найти доли поверхности катализатора. Первый шаг – найдем вес дуги графа. Это отношение скорости реакции данной дуги к кон-

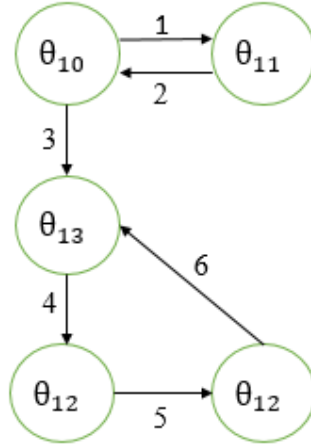


Рис. 1. Граф маршрута системы реакций МТВЭ.

центрации промежуточного соединения, из которого эта дуга выходит.

$$\begin{cases} b_1 = \frac{k_1 C_2 \theta_{10}}{\theta_{10}} = k_1 C_2 \\ b_2 = \frac{k_2 \theta_{11}}{\theta_{11}} = k_2 \\ b_3 = \frac{k_3 C_8 \theta_{10}}{\theta_{10}} = k_3 C_8 \\ b_4 = \frac{k_4 C_4 \theta_{13}}{\theta_{13}} = k_4 C_4 \\ b_5 = \frac{k_5 C_2 \theta_{12}}{\theta_{12}} = k_5 C_2 \\ b_6 = \frac{k_6 \theta_{14}}{\theta_{14}} = k_6 \end{cases} . \quad (7)$$

Для каждой вершины существует дерево графа. Это незамкнутая совокупность дуг, проходящая через все вершины и входящая в данную. Второй шаг – найдем вес данного дерева графа. Это произведение весов дуг, входящих в дерево графа.

$$\begin{cases} B_{10} = b_2 \\ B_{11} = b_1 \\ B_{12} = b_2 b_3 \\ B_{13} = b_2 b_3 b_4 \\ B_{14} = b_2 b_3 b_4 b_5 \end{cases} .$$

Следующим шагом будет нахождение концентрации θ_i :

$$\theta_i = \frac{B_i}{\sum_i B_i} . \quad (8)$$

Построим графики зависимости концентрации от времени, используя среду MATLAB [15]. Задача состоит из прямой и обратной задачи. В прямой задаче применяется решатель ode23s [16, 17] для нахождения концентраций в зависимости от времени. В

обратной задаче используется генетический алгоритм [18] и метод Хука-Дживса, также известный как метод конфигураций [19, 20] для нахождения констант скорости k_1 и k_2 .

На рис. 2 и 3 показаны зависимости концентрации от времени веществ $x_2 - (CH_3)_3COH$ и $x_5 - (CH_3)_3COMe$, а также сравнение концентраций с экспериментальными данными.

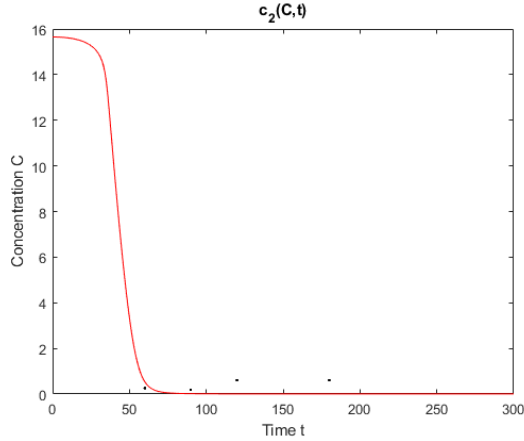


Рис. 2. Процессы расхождения и образования компонента $x_2 - (CH_3)_3COH$

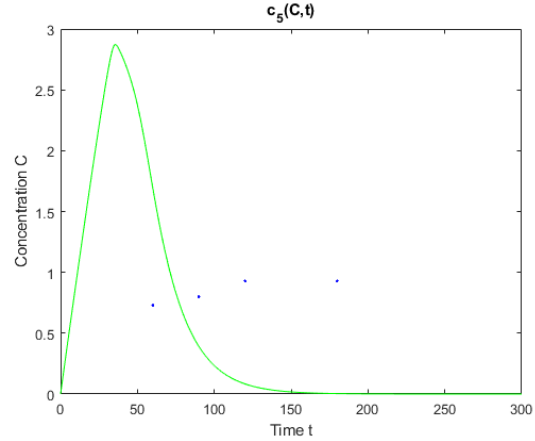


Рис. 3. Процессы расхождения и образования компонента $x_5 - (CH_3)_3COMe$.

Следующим шагом будет применение уравнения массопереноса. С учётом кинетики математическая модель массопереноса на зерне катализатора имеет вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_p \frac{dc_2}{dt} = D_2 \left(\frac{\partial^2 c_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_2}{\partial r} \right) - \omega_1 - \omega_5 \\ \varepsilon_p \frac{dc_4}{dt} = D_4 \left(\frac{\partial^2 c_4}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_4}{\partial r} \right) - \omega_4 \\ \varepsilon_p \frac{dc_5}{dt} = D_5 \left(\frac{\partial^2 c_5}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_5}{\partial r} \right) + \omega_4 \\ \varepsilon_p \frac{dc_7}{dt} = D_7 \left(\frac{\partial^2 c_7}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_7}{\partial r} \right) + \omega_2 + \omega_6 \\ \varepsilon_p \frac{dc_8}{dt} = D_8 \left(\frac{\partial^2 c_8}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_8}{\partial r} \right) + \omega_2 - \omega_3 \end{cases} \quad (9)$$

Граничные данные определены следующим образом:

$$\begin{cases} r = 0 : \frac{\partial c_i}{\partial r} = 0 \\ r = R_3 : c_i = C_i^p \end{cases} \quad .$$

В рамках неявной разностной схемы, применяя уравнение (3), полученную систему уравнений, можно свести к общему виду [21, 22]:

$$Ac_{i+1,z}^j - Bc_{i,z}^j + Dc_{i-1,z}^j = F_{i,z}, \quad (11)$$

где $A = \frac{D_z^{eff}}{h^2}$; $B = \frac{3D_z^{eff}}{2h^2} + \frac{\varepsilon_p}{\tau}$; $D = \frac{D_z^{eff}}{2h^2}$; $F_{i,z} = -\sum v_{in}\omega_n - \frac{\varepsilon_p}{\tau}c_{i,z}^{j-1}$; $i = \overline{2, N-1}$; $j = \overline{2, M-1}$; $z = \overline{1, 4}$.

Положим, что существуют такие наборы чисел $\alpha_{i,z}$ и $\beta_{i,z}$ при которых

$$c_{i,z}^j = \alpha_{i,z} c_{i+1,z}^j + \beta_{i,z} \quad (12)$$

т. е. трехточечное уравнение второго порядка (11) преобразуется в двухточечное уравнение первого порядка (12). Уравнение (12) решается методом прогонки.

Примем для модельной реакции (4): $\varepsilon_p = 0.5$; $D_z = 1$; $k_1 = 7.02$; $k_2 = 0.09$; $k_3 = 0.052$; $k_4 = 2.6775$; $k_5 = 0.74$; $k_6 = 1.1775$.

Уменьшим в связи (12) индекс на единицу и полученное выражение $c_{i-1,z}^j = \alpha_{i-1,z} c_{i,z}^j + \beta_{i-1,z}$ подставим в уравнение (11):

$$Ac_{i+1,z}^j - Bc_{i,z}^j + D(\alpha_{i-1,z} c_{i,z}^j + \beta_{i-1,z}) = F_{i,z}. \quad (13)$$

Приведём подобные в уравнении (13):

$$c_{i,z}^j = \frac{A}{B - D\alpha_{i-1,z}} c_{i+1,z}^j + \frac{D\beta_{i-1,z} - F_{i,z}}{B - D\alpha_{i-1,z}} \quad (14)$$

Полученное выражение имеет вид (12) и будет с ним совпадать, если при всех $i = \overline{2, N-1}$ выполняются соотношения:

$$\alpha_{i,z} = \frac{A}{B - D\alpha_{i-1,z}}; \beta_{i,z} = \frac{D\beta_{i-1,z} - F_{i,z}}{B - D\alpha_{i-1,z}} \quad (15)$$

Вычисление коэффициентов $\alpha_{i,z}$ и $\beta_{i,z}$ составляют прямой ход прогонки. Обратный ход прогонки определяется формулой (14).

Используя начальные и граничные условия, вычислим $\alpha_{1,z}$ и $\beta_{1,z}$, для нахождения последующих прогоночных коэффициентов: $\alpha_{1,z} = 0$; $\beta_{1,2} = C_2^0$; $\beta_{1,4} = C_4^0$; $\beta_{1,10} = C_{10}^0$; $\beta_{1,i} = 0$; $i = 5..8, 11..14$.

Графики на рис. 4 и 5 показывают, как расходуются и образуются компоненты $x_2 - (CH_3)_3COH$ и $x_5 - (CH_3)_3COMe$ модельной реакции (14) в зависимости от времени реакции и радиуса зерна катализатора. По графику изменения концентрации $c_2(r, t)$ (рис. 4) наблюдается расходование компонента x_2 по времени t , который участвует в двух стадиях реакции (14). График изменения концентрации $c_5(r, t)$ (рис. 5) показывает образование компонента x_5 по времени t .

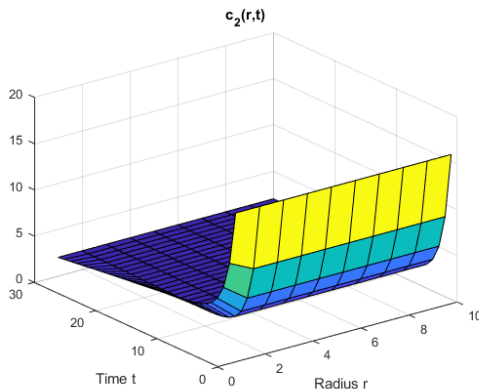


Рис. 4. Процессы образования компонента $x_2 - (CH_3)_3COH$

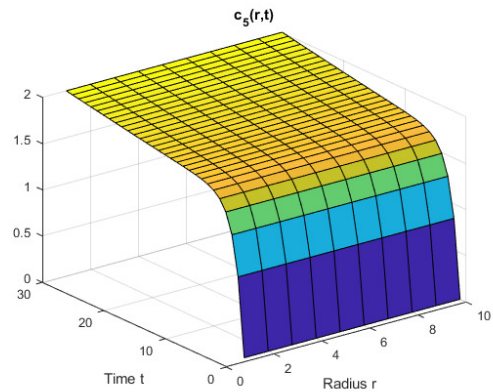


Рис. 5. Процессы расходования компонента $x_5 - (CH_3)_3COMe$.

4. Заключение

Таким образом, разработаны алгоритм и программа решения систем уравнений в частных производных для моделирования кинетики и диффузии на зерне катализатора многостадийной химической реакции с применением теории графов для гетерогенной реакции. Разработанная программа позволяет получить зависимости концентраций компонентов от времени реакции и радиуса зерна катализатора.

Литература

1. Zainullin R.Z., Koledina K.F., Akhmetov A.F., Gubaidullin I.M. Kinetics of the Catalytic Reforming of Gasoline // Kinetics and Catalysis. 2017. Vol. 58, №. 3. P. 279–289.
2. Чумаков Ю.А., Князева А.Г., Прибытков Г.А. Моделирование синтеза горением композиционного материала в трехкомпонентной порошковой смеси // Химическая физика и мезоскопия. 2020. Т. 22, № 4. С. 405-420.
3. Быков А.Н., Ерофеев А.М., Сизов Е.А., Федоров А.А. Метод распараллеливания прогонки на гибридных ЭВМ // Выч. мет. Программирование. 2013. Т. 14, № 2. С. 43–47.
4. Киперман С.Л. Основы химической кинетики в гетерогенном катализе. М.: Химия, 1979. 352 с.
5. Левеншпиль О. Инженерная химия гетерогенного катализа. М.: Химия, 1984. 650 с.
6. Вэйлас С. Химическая кинетика и расчеты промышленных реакторов. М.: Химия, 1967. 416 с.
7. Загоруйко А.Н. Основы математического моделирования каталитических реакторов. Новосибирск: Химия, 2015. 64 с.
8. Gear C.V. Numerical initial value problems in ordinary differential equations. Englewood Cliffs: Pentice-Hall, 1971. 252 p.
9. Миньков Л.Л., Шрагер Э.Р. Основные подходы к численному решению одномерных уравнений газовой динамики: учеб. пособие. Томск: СТУ, 2016. 136 с.
10. Мороз Л.И., Масловская А.Г. Решение дифференциальных задач методом конечных элементов. Учебное пособие. Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2019. 110 с.
11. Слабнов В.Д. Численные методы: учебник. Санкт-Петербург: Лань, 2020. 392 с.
12. Toppinen S., Rantakyla T.-K., Salmi T., Aittamaa J. Kinetics of the liquid-phase hydrogenation of benzene and some monosubstituted alkylbenzenes over a nickel catalyst // Ind. Eng. Chem. Res. 1996. Vol. 35. P. 1824-1833.
13. Байгузина А.Р., Галлямова Л.И., Хуснутдинов Р.И. Синтез алкил-трет-бутиловых эфиров в присутствии цеолитных катализаторов // Вестник Башкирского университета. 2020. Т. 25, № 4. С. 748-755.

14. Koledina K. F., Koledin S. N., Shchadneva N. A., Gubaidullin I. M. Kinetics and mechanism of the catalytic reaction between alcohols and dimethyl carbonate // J. Phys. Chem. A. 2017. Vol. 91, I. 3. P. 444–449.
15. Тынкевич М.А., Пимонов А.Г. Введение в численный анализ: учеб. пособие. КузГТУ. Кемерово, 2017. 176 с.
16. Бахтиева Л.У. Научно-технические расчеты в системе MATLAB. Учебное пособие для студентов и аспирантов естественнонаучных факультетов. Казань: Изд-во КГУ, 2007. 44 с.
17. Shampine L.F., Reichelt M.W., Kierzenka J.A. Solving Index-1 DAEs in MATLAB and Simulink // SIAM Review. 1999. Vol. 41. P. 538-552.
18. Панченко Т В. Генетические алгоритмы: учебно-методическое пособие / под ред. Ю. Ю. Тарасевича. Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет», 2007. 87 с.
19. Гольдштейн А.Л. Оптимизация в среде MATLAB: учеб. пособие. Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2015. 192 с.
20. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Метод Хука - Дживса // Методы оптимизации. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. С. 285. 440 с.
21. Крайнов А.Ю., Миньков Л.Л. Численные методы решения задач тепло- и массопереноса: учеб. пособие. Томск: STT, 2016. 92 с.
22. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие. Томск, 2007. 172 с.

MSC 80A30

Mathematical simulation of a chemical reaction on a catalyst grain using the finite difference method

A. A. Usmanova¹, K. F. Koledina^{1,2}

Institute of Petrochemistry and Catalysis of RAS¹,
Ufa State Oil Technical University²

Abstract: A heterogeneous reaction of a multistage chemical reaction is considered. In the work, mathematical modeling of a system of equations consisting of partial derivatives of a parabolic type is carried out, taking into account the kinetics and mass transfer on the grain of the zeolite catalyst. The graph-theoretic method is used to build the system, and the finite difference method is used to solve it. The study shows the results obtained by modeling the reaction of the synthesis of methyl tert-butyl ether under the action of HY on the catalyst grain.

Keywords: mathematical modeling, finite difference method, diffusion, kinetics, mass transfer in a catalyst grain.

References

1. R.Z. Zainullin, K.F. Koledina, A.F. Akhmetov, I.M. Gubaidullin, Kinetics of the Catalytic Reforming of Gasoline *Kinetics and Catalysis*, 2017, Vol. 58, №. 3, P. 279–289.
2. Yu.A. Chumakov, A.G. Knyazeva, G.A. Pribytkov, Simulation of the synthesis by combustion of a composite material in a three-component powder mixture, *Chemical Physics and Mezoscopy*, 2020, V. 22, No. 4, P. 405–420.
3. A.N. Bykov, A.M. Erofeev, E.A. Sizov, A.A. Fedorov, Method of parallelizing the sweep on hybrid computers, *Vychisl. met. Programming*, 2013, V. 14, No. 2, P. 43–47.
4. S.L. Kiperman, Fundamentals of chemical kinetics in heterogeneous catalysis, Moscow, Chemistry, 1979, 352 p.
5. O. Levenshpil, Engineering chemistry of heterogeneous catalysis, Moscow, Chemistry, 1984, 650 p.
6. S. Valas, Chemical kinetics and calculations of industrial reactors, Moscow, Chemistry, 1967, 416 p.
7. A.N. Zagoruiko, Fundamentals of Mathematical Modeling of Catalytic Reactors, Novosibirsk, Chemistry, 2015, 64 p.
8. C.V. Gear, Numerical initial value problems in ordinary differential equations, Englewood Cliffs: Pentice-Hall, 1971, 252 p.
9. L.L. Minkov, E.R. Shrager, Basic Approaches to the Numerical Solution of One-Dimensional Equations of Gas Dynamics: textbook, Tomsk: STT, 2016, 136 p.

10. L.I. Moroz, A.G. Maslovskaya, Solving Differential Problems by the Finite Element Method. Tutorial, Blagoveshchensk: Amur State. un-t, 2019, 110 p.
11. V.D. Slabnov, Numerical Methods: Textbook, St. Petersburg: Lan, 2020, 392 p.
12. S. Toppinen, T.-K. Rantakyla, T. Salmi, J. Aittamaa, Kinetics of the liquid-phase hydrogenation of benzene and some monosubstituted alkylbenzenes over a nickel catalyst, *Ind. Eng. Chem. Res.*, 1996, Vol. 35, P. 1824-1833.
13. A.R. Baiguzina, L.I. Galliamova, R.I. Khusnutdinov, Synthesis of alkyl tert-butyl ethers in the presence of zeolite catalysts, *Bulletin of the Bashkir University*, 2020, V. 25, No. 4, P. 748-755.
14. K.F. Koledina, S.N. Koledin, N.A. Shchadneva, I.M. Gubaidullin, Kinetics and mechanism of the catalytic reaction between alcohols and dimethyl carbonate, *J. Phys. Chem. A.*, 2017, Vol. 91, I. 3, P. 444-449.
15. M.A. Tynkevich, A. G. Pimonov, Introduction to numerical analysis. Textbook, KuzGTU, Kemerovo, 2017, 176 p.
16. L.U. Bakhtieva, Scientific and technical calculations in the MATLAB system. Textbook for students and graduate students of natural science faculties, Kazan, Publishing house of KGU, 2007, 44 p.
17. L.F. Shampine, M.W. Reichelt, J.A. Kierzenka, Solving Index-1 DAEs in MATLAB and Simulink, *SIAM Review*, 1999, Vol. 41, P. 538-552.
18. T.V. Panchenko, Genetic algorithms: teaching aid, ed. Yu. Yu. Tarasevich, Astrakhan, Astrakhan University Publishing House, 2007, 87 p.
19. A.L. Goldstein, Optimization in the MATLAB environment. Textbook, Perm, Publishing House of Perm. nat. research polytechnic un-ta, 2015, 192 p.
20. A.V. Attetkov, S.V. Galkin, V.S. Zarubin, "The Hook-Jeeves Method", Optimization Methods, M., Publishing house of MSTU im. N.E. Bauman, 2003, P. 285, 440 p.
21. A.Yu. Krainov, L.L. Minkov, Numerical methods for solving problems of heat and mass transfer. Textbook, Tomsk, STT, 2016, 92 p.
22. G.V. Kuznetsov, M.A. Sheremet, Difference methods for solving heat conduction problems. Textbook, Tomsk, 2007, 172 p.

УДК 519.62

Абсолютная устойчивость явной схемы метода Эйлера для задач, преобразованных к наилучшему аргументу и его модификации *

Цапко Е. Д.¹, Леонов С. С.^{1,2}, Кузнецов Е. Б.¹

Московский авиационный институт¹, Российский университет дружбы народов²

Аннотация: При моделировании физических и технологических процессов исследователи часто сталкиваются с необходимостью решения жестких начальных задач. Как правило, для таких задач явные численные методы решения оказываются непригодными из-за недостаточной устойчивости. Наиболее часто применяемый наилучший аргумент оказывается малоприменим для решения задач, скорость роста интегральных кривых которых является близкой к экспоненциальной. Авторами ранее была предложена модификация наилучшего аргумента, которая позволила сгладить этот недостаток. В этой работе даны оценки абсолютной устойчивости явной схемы метода Эйлера при решении задач, преобразованных к модифицированному наилучшему аргументу. Проведена апробация полученных теоретических оценок на примере решения тестовой задачи.

Ключевые слова: абсолютная устойчивость, область устойчивости, тестовая задача Далквиста, разностная схема, явный метод Эйлера, начальная задача, метод продолжения решения, наилучший аргумент, модифицированный наилучший аргумент.

1. Область устойчивости явного метода Эйлера

Исследование области устойчивости и спектральных характеристик, как было предложено в [1], рассматривают на примере задачи, получившей название задачи Далквиста, вида

$$\frac{dy}{dt} = ay, \quad y(0) = y_0, \quad (1)$$

где a — некоторая константа. Задача (1) моделирует исходную решаемую задачу, если a — собственное значение линеаризованной задачи [2].

Область устойчивости явной разностной схемы метода Эйлера для задачи (1) имеет вид [2]

$$h_t \leq \frac{2}{|a|}. \quad (2)$$

Неравенство (2) справедливо в случае, если $a < 0$, а $h_t > 0$. Если рассмотреть случай отрицательного шага $h_t < 0$, то несложно получить следующий результат:

$$|h_t| \leq \frac{2}{|a|}. \quad (3)$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-31-90054).

2. Метод продолжения решения по наилучшему аргументу

Преобразование задачи (1) к наилучшему аргументу λ : $d\lambda^2 = dy^2 + dt^2$ приводит к системе вида

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{ay}{\sqrt{1+a^2y^2}}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2y^2}}, \quad y(0) = y^{(0)}, \quad t(0) = t_0. \quad (4)$$

Применение наилучшего аргумента λ к жестким задачам Коши обладает рядом преимуществ [3]: он позволяет снизить показатель жесткости решаемой системы, а также устранить вычислительные трудности, связанные с неограниченным ростом правых частей исходной задачи. В работе Е. Б. Кузнецова и В. И. Шалашилина [4] сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Разностная схема явного метода Эйлера для преобразованной к наилучшему аргументу λ задачи (4) является абсолютно устойчивой, если шаг интегрирования удовлетворяет неравенству*

$$|h_\lambda| \leq \frac{2(1+a^2y_m^2)^{3/2}}{|a|}.$$

В статье [4] принималось, что второе уравнение системы задачи (4) вносит пренебрежимо малый вклад в характер устойчивости приближенного решения, что является верным только в окрестности предельной особой точки. В следствие чего, второе уравнение исключалось из рассмотрения. Однако можно показать, что с учетом второго уравнения системы (4) теорема 1 остается справедливой, а значит, теорема 1 не требует дополнительных условий на рассматриваемую область.

3. Метод продолжения решения по экспоненциальному наилучшему аргументу

Рассмотрим задачу (1), преобразованную к экспоненциальному наилучшему аргументу μ : $d\mu^2 = dy^2 + \exp(-2\gamma t) \cdot dt^2$, которая имеет вид:

$$\frac{dy}{d\mu} = \frac{ay \exp \gamma t}{\sqrt{1+a^2y^2 \exp 2\gamma t}}, \quad \frac{dt}{d\mu} = \frac{\exp \gamma t}{\sqrt{1+a^2y^2 \exp 2\gamma t}}, \quad y(0) = y_0 \quad t(0) = 0. \quad (5)$$

Данная модификация наилучшего аргумента ориентирована на решение задач с экспоненциальной скоростью роста интегральных кривых. Этот подход позволяет получить решение таких задач тогда, когда традиционные методы и преобразование к наилучшему аргументу λ оказывается малоэффективным [5].

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Разностная схема явного метода Эйлера для задачи (5), преобразованной к экспоненциальному наилучшему аргументу μ , является абсолютной устойчивой для значений параметра γ , удовлетворяющих условию $a \cdot \gamma \leq 0$, если шаг интегрирования удовлетворяет неравенству*

$$|h_\mu| \leq \frac{4(1+a^2y_m^2 \exp 2\gamma t_m)^{3/2}}{|D_{\max}| \exp \gamma t_m},$$

где

$$D_{\max} = \begin{cases} D_1, & a + \gamma \geq -\frac{2(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}}{h_\mu \exp(\gamma t_m)}, \\ D_2, & a + \gamma < -\frac{2(1 + a^2 y_m^2 \exp(2\gamma t_m))^{3/2}}{h_\mu \exp(\gamma t_m)}, \end{cases}$$

$$D_1 = a + \gamma + \sqrt{(a - \gamma)^2 - 4a^3 \gamma y_m^2 \exp(2\gamma t_m)}, \quad D_2 = a + \gamma - \sqrt{(a - \gamma)^2 - 4a^3 \gamma y_m^2 \exp(2\gamma t_m)}.$$

4. Экспоненциальный тест

На примере численного решения методом Эйлера тестовой задачи, рассмотренной в работе А. А. Белова и Н. Н. Калиткина [6],

$$\frac{du}{dt} = -\xi(t) \cdot u \cdot (u^2 - a^2), \quad u(0) = u_0, \quad t \in [0, 2\pi],$$

преобразованной к экспоненциальному наилучшему аргументу, показано, что область устойчивости согласуется с результатами, сформулированными в теореме 2.

Таким образом, в работе показано, что преобразование исходной задачи к наилучшему и модифицированному наилучшему аргументам позволяет увеличить шаг интегрирования при применении явного метода Эйлера, что соответствует полученным теоретическим результатам.

Литература

1. Dahlquist G. A special stability problem for linear multistep methods // BIT. 1963. № 3. Р. 27-43.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
3. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.
4. Кузнецов Е. Б., Шалашилин В. И. Задача Коши как задача продолжения решения по параметру // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33, №12. С. 1792-1805.
5. Kuznetsov E. B., Leonov S. S., Tsapko E. D. A new numerical approach for solving initial value problems with exponential growth integral curves // 2020 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 927. 012032.
6. Белов А. А., Калиткин Н. Н. Особенности расчета контрастных структур в задачах Коши // Математическое моделирование. 2016. Т. 28, № 10. С. 97-109.

MSC 65L20

Absolute stability of the explicit scheme of the Euler method for problems transformed to the best argument and its modification

E. D. Tsapko¹, S. S. Leonov^{1,2}, E. B. Kuznetsov¹

Moscow Aviation Institute¹, Peoples' Friendship University of Russia²

Abstract: When modeling physical and technological processes, researchers often face the need to solve stiff initial tasks. As a rule, explicit numerical methods of solving such problems are unsuitable due to insufficient stability. The most frequently used best argument turns out to be hardly applicable for solving problems whose growth rate of integral curves is close to exponential. The authors previously proposed a modification of the best argument, which made it possible to smooth out this disadvantage. In this paper, estimates of the absolute stability of the explicit scheme of the Euler method in solving problems transformed to a modified best argument are given. The approbation of the obtained theoretical estimates is carried out on the example of solving a test problem.

Keywords: absolute stability, stability domain, Dahlquist test problem, difference scheme, explicit Euler method, initial problem, solution continuation method, best argument, modified best argument.

References

1. G. Dahlquist, A special stability problem for linear multistep methods, *BIT*, 1963, № 3, P. 27-43.
2. A. A. Samarskii, A. V. Goolin, Numerical methods, Moscow, Nauka, Main Editorial Board for Physical and Mathematical Literature, 1989. (In Russ.)
3. V. I. Shalashilin, E. B. Kuznetsov, Parametric continuation and optimal parametrization in applied mathematics and mechanics. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2003, 236 p.
4. E. B. Kuznetsov, V. I. Shalashilin, The Cauchy problem as a problem of the continuation of a solution with respect to a parameter, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1993, 33:12, 1792–1805.
5. E. B. Kuznetsov, S. S. Leonov, E. D. Tsapko, A new numerical approach for solving initial value problems with exponential growth integral curves, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2020, 927, 012032.
6. A. A. Belov, N. N. Kalitkin, Features of calculating contrast structures in the Cauchy problem, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2017, 9:3, 281-291.

УДК 519.63

Численное моделирование селективного лазерного плавления методом SPH

Черенкова К. В., Быков А. Н., Вишнякова М. Н., Дерюгин Ю. Н.,
Емельянов А. Б., Лазарев А. А., Полищук С. Н.

ФГУП «РФЯЦ - ВНИИЭФ»

Аннотация: В работе представлена разработка методики численного моделирования спекания порошка на основе численного метода SPH. Актуальность работы обусловлена потребностями в описании физических процессов, сопровождающих метод производства деталей из металлического порошка – селективного лазерного плавления. Расчеты, выполненные с применением разработанной методики показали хорошее соответствие эксперименту.

Ключевые слова: численное моделирование, метод SPH, уравнения Навье-Стокса.

В настоящее время ведется активное развитие технологий аддитивного производства, что требует создания расчетных методик для описания протекающих при этом физических процессов. Одним из методов, используемых на практике для производства деталей из металлического порошка, является метод селективного лазерного плавления – SLM (Selective Laser Melting) [1, 2].

В данной работе представлена численная методика на основе метода SPH для моделирования процесса спекания порошка под воздействием лазерного луча. Течение жидкости, образующейся в результате плавления, описывается уравнениями Навье-Стокса, в которых учитываются силы давления, вязкие силы и поверхностные силы на границе раздела фаз. Тепловое состояние определяется из уравнения сохранения энергии, в котором учитываются тепловые процессы, объемное поглощение энергии лазерного излучения, конвективный теплообмен с внешней средой, радиационное излучение и работа вязких сил. Фазовые переходы между твердой и жидкой фазой описываются в рамках обобщенной формулировки задачи Стефана.

Отработка методики проведена на ряде задач, имеющих аналитические и экспериментальные данные.

Литература

1. Gibson I., Rosen D., Stucker B. Additive Manufacturing Technologies. New York: Springer, 2015.
2. Шишковский И.В. Основы аддитивных технологий высокого разрешения. СПб.: Питер, 2016.

MSC 65D25

Numerical simulation of selective laser melting by the SPH method

K. V. Cherenkova, A. N. Bykov, M. N. Vishnyakova, Yu. N. Deryugin,
A. B. Emelyanov, A. A. Lazarev, S. N. Polishchuk

FSUE «RFNC - VNIIEF»

Abstract: The paper presents the development of a technique for numerical modeling of powder sintering based on the numerical SPH method. The relevance of the work is due to the need to describe the physical processes accompanying the method of producing parts from metal powder – selective laser melting. Calculations performed using the developed methodology showed good compliance with the experiment.

Keywords: numerical modeling, SPH method, Navier-Stokes equations.

References

1. I. Gibson, D. Rosen, B. Sticker, Additive Manufacturing Technologies, New York, Springer, 2015.
2. I.V. Shishkovsky, Fundamentals of high-resolution additive technologies, St. Petersburg, Peter, 2016.

УДК 37.012:007

Исследование взаимодействия компаний в сфере EdTech услуг в России

Шалаева А. А., Мамедова Т. Ф., Лапшина А. А.

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва

Аннотация: В данной работе исследуется взаимодействие наиболее популярных компаний по предоставлению образовательных услуг на территории России. Для проведения исследования выбраны три наиболее динамически развивающиеся компании в сфере EdTech технологий и проанализированы основные показатели данных компаний за последние десять лет. Расчет коэффициентов в модели производился модифицированным взвешенным методом наименьших квадратов и методом Левенберга – Марквардта. Полученные результаты позволяют сделать вывод о взаимодействии исследуемых компаний на текущий момент и развитие их взаимоотношений в будущем.

Ключевые слова: модель «хищник-жертва», моделирование, онлайн-образование, компьютерные технологии.

В данное время происходит значительный рост EdTech (от англ. education — «образование» и technology — «технологии») – проектов в области образовательных технологий. Появилось значительное количество онлайн-школ, повысилась конкуренция, возросло качество и контентная составляющая, появилось много новинок в данной сфере, включая все уровни образования: школьный, вузовский и дополнительное онлайн-образование. За основу взяты исследования внутри компаний и официальные данные [1].

Для выявления факторов, влияющих на выживаемость онлайн-школ, была проанализирована деятельность нескольких крупнейших онлайн-школ по подготовке школьных предметов в России за последние пять лет. Для более детального анализа, с учетом прогнозирования была составлена динамическая модель «хищник-жертва», которая на данный момент продолжает совершенствоваться, в частности, в экономических исследованиях и позволяет адекватно описать взаимодействие рынка EdTech компаний в России. Расчет коэффициентов в модели производился модифицированным взвешенным методом наименьших квадратов и методом Левенберга-Марквардта [2, 3].

Рассмотрим систему следующего вида :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 - b_1x_1^2 - c_{12}x_1x_2 - c_{13}x_1x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_2x_2 - b_2x_2^2 - c_{21}x_2x_1 - c_{23}x_2x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = a_3x_3 - b_3x_3^2 - c_{31}x_3x_1 - c_{32}x_3x_2 \end{cases} \quad (1)$$

где x_i – чистая прибыль компании, a_i – коэффициенты рождаемости новых компаний, b_i – коэффициент смертности «ликвидации», c_{ij} – коэффициент взаимодействия компании вида i и j , $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$. c_{ij} – коэффициенты влияния i -ой компании, на j -ю. Знак коэффициента (c_{ij} ; c_{ji}) имеет свое значение, зависящее от типа взаимо-

действия, иначе говоря данные коэффициенты дают дополнительную информацию о взаимодействиях групп друг с другом (таблица 1).

Таблица 1. Показатели коэффициентов взаимодействия между группами

Тип взаимодействия на рынке труда	Влияние i -го объекта на j -ый	Влияние j -го объекта на i -ый
Отсутствие помощи	0 ($c_{ij} = 0$)	0 ($c_{ji} = 0$)
Помощь	+ ($c_{ij} > 0$)	0 ($c_{ji} = 0$)
Угнетение	– ($c_{ij} < 0$)	0 ($c_{ji} = 0$)
Дискриминация	+ ($c_{ij} > 0$)	– ($c_{ji} < 0$)
Конкуренция	– ($c_{ij} < 0$)	– ($c_{ji} < 0$)
Партнерство	+ ($c_{ij} > 0$)	+ ($c_{ji} > 0$)

Исследуемые компании за 2012-2021 гг. получили чистую прибыль, представленную в таблице 2.

Таблица 2. Прибыль исследуемых компаний за 2012-2021 годы

Прибыль, млн.руб.	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
1	48	49	50	55	75	76	108	115	122	120
2	51	50	55	60	65	66	62	64	75	50
3	26	27	38	43	37	40	38	41	38	39

Графическая иллюстрация чистой прибыли компаний представлена на рис. 1.

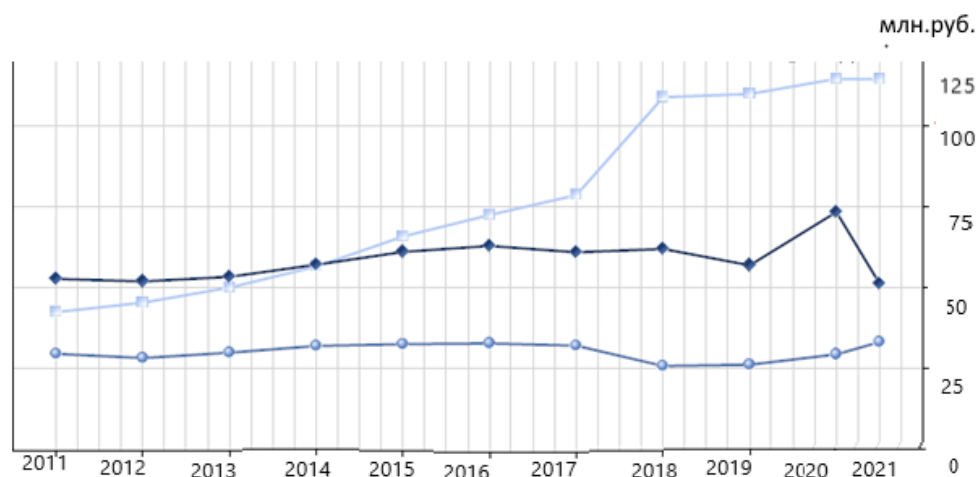


Рис. 1. Чистая прибыли компаний.

Период 2012-2019 гг. был относительно спокойным для данной области. Для

EdTech рынка 2020-й стал годом рекордного роста и серьезных испытаний одновременно. Рост и развитие продолжается и на данный момент. С помощью статистического анализа были вычислены коэффициенты, которые показывают степень подавления между компаниями.

Расчет коэффициентов для системы (1) производился модифицированным взвешенным методом наименьших квадратов и методом Левенберга-Марквардта. Этот метод заключается в поиске соответствующих весов, стоящих перед суммами квадратов отклонений фактических численностей от соответствующих координат точек интегральных кривых системы (1), вариации начальных условий и минимизации функционала невязки, т. е. решения оптимизационной задачи вида:

$$J(u) = \mu_1 \sum_{j=1}^N (x_1^*(t_j) - x_1(t_j, u))^2 + \mu_2 \sum_{j=1}^N (x_2^*(t_j) - x_2(t_j, u))^2 + \\ + \mu_3 \sum_{j=1}^N (x_3^*(t_j) - x_3(t_j, u))^2 \rightarrow \min_{u \in D},$$

где $u = (b_1, b_2, b_3, K_1, K_2, K_3, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23}, a_{31}, a_{32})^T$ – вектор искомых коэффициентов системы (1), $x_1(t_j, u), x_2(t_j, u), x_3(t_j, u)$ – решение системы (1) в t_j момент времени, $x_i^*(t_j)$ – фактические чистая прибыль i -ой компании, $\mu_i > 0$ ($\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$) являются показателем частных критериев оптимизационной задачи.

Рассмотрим взаимодействие трех выбранных компаний с помощью предложенной выше модели на примере систем, параметры которой были определены с помощью Mathcad:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 1,52x_1 - 1,04x_1^2 - 0,85x_1x_2 - 0,04x_1x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = 1,33x_1 - 1,02x_2^2 - 0,25x_2x_1 - 0,08x_2x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = 1,21x_1 - 1,08x_3^2 - 0,95x_3x_1 - 5,73x_3x_2 \end{cases} \quad (2)$$

с начальными данными $x_1(0) = 350; x_2(0) = 390; x_3(0) = 157$.

В качестве начальных условий возьмем данные за 2017 год. Решая данную систему методом Рунге-Кутты, получаем следующие результаты, представленные на графике, которые позволяют смоделировать прибыль компаний в будущем (рис. 2).

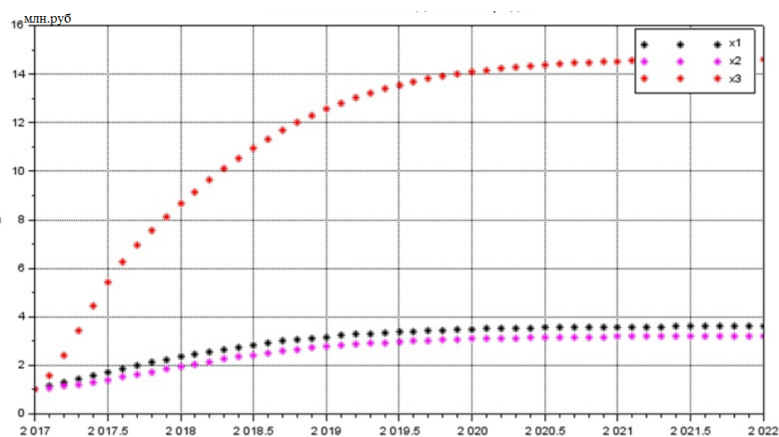


Рис. 2. Моделирование чистой прибыли

Оценка приближения модельных результатов исследования представлена в таблице 3, средняя ошибка аппроксимации – A_{cp} и коэффициент корреляции – R .

Таблица 3. Оценка приближения модельных результатов исследования.

Оценка модели	Компания 1	Компания 2	Компания 3
$A_{cp}, \%$	2, 14	11, 3	2, 57
R	0, 72	0, 92	0, 92

Полученные результаты моделирования хорошо соотносятся с эмпирическими данными, что позволяет судить об адекватности модели и пригодности её для дальнейшего прогнозирования состояния системы. Проанализировав полученные результаты, сформировались некие гипотезы в дальнейшем развитии EdTech компаний внутри России. Основная идея заключается в том, что со временем сформируется некий «хищник - лидер», что позволит стратифицировать и сохранить баланс «жизнедеятельности» в данной сфере, при этом должна сохраниться строгая сегментация отдельных областей российского рынка образования.

Литература

1. Аматова Г.М. Математическая модель динамики трех популяций «два хищника-жертва» с внутривидовой конкуренцией жертвы // XI век: фундаментальная наука и технологии. 2017. Т.1. С. 157–161.
2. Денисенко И.А. Особенности и тенденции продвижения дополнительных профессиональных образовательных услуг // СЕРВИС PLUS. Черкизово: Российский государственный университет туризма и сервиса. 2019. Т. 13, №3. С. 41–50.
3. Краснова Г.А., Нухулы А., Тесленко В.А. Электронное образование в мире и России: состояние, тенденции и перспективы // Вестник РУДН. Серия: Информатизация образования. 2017. Vol. 14, № 3. С. 371–377.

MSC MSC 91P10

Study Interaction of companies in the field of EdTech services in Russia

A. A. Shalaeva, T. F. Mamedova, A. A. Lapshina
National Research Ogarev Mordovia State University

Abstract: This paper explores the interaction of the most popular companies providing educational services in Russia. To conduct the study, three most dynamically developing companies in the field of EdTech technologies were selected and the main indicators of these companies over the past ten years were analyzed. The coefficients in the model were calculated using the modified weighted least squares method and the Levenberg-Marquardt method. The results obtained allow us to conclude about the interaction of the companies under study at the moment and the development of their relationships in the future.

Keywords: The predator-prey model, Modeling, Online education, Computer technology.

References

1. G.M. Amatova, Mathematical model of dynamics of three populations "two predators-prey" with intraspecific competition of prey, *XI century: fundamental science and technology*, 2017, vol. 1, P. 157–161.
2. I.A. Denisenko, Features and trends of promotion of additional professional educational services, *SERVICE PLUS. Cherkizovo: Russian State University of Tourism and Service*, 2019, vol. 13, 3, P. 41–50.
3. G.A. Krasnova, A. Nukhuly, V.A. Teslenko, Electronic education in the world and Russia: state, trends and prospects, *Journal of Informatization in Education Bulletin of RUDN. Series: Informatization of education*, 2017, vol. 14, 3, P. 371 – 377.

УДК 517.983

О биортогонализации полных обобщенных жордановых наборов линейного оператора и ему сопряженного в банаховом пространстве

Шаманаев П. А.

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва

Аннотация: В статье изложен метод биортогонализации полных обобщенных жордановых наборов линейного оператора и ему сопряженного в банаховом пространстве. Метод основан на фиксировании одного набора и разложении элементов другого набора по новому базису.

Ключевые слова: линейные фредгольмовы операторы, банаховы пространства, условие биортогональности, обобщенный жорданов набор

При решении прикладных задач методом Ляпунова-Шмидта может возникнуть ситуация, когда построенные обобщенные жордановы наборы линейного оператора и ему сопряженного не удовлетворяют условию биортогональности [1]. В этом случае необходимо провести биортогонализацию этих наборов [2]. Этому вопросу и посвящена настоящая работа.

Пусть A и B – плотно заданные замкнутые линейные фредгольмовы операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 . Введем обозначения согласно работе [3]: $N(B) = \text{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ – подпространство нулей оператора B , $N^*(B) = \text{span}\{\psi_k\}_{k=1}^n$ – подпространство дефектных функционалов оператора B , $N^*(B) \subseteq E_2^*$, B^* – оператор, сопряженный к B , действующий из E_2^* в E_1^* , E_1^* и E_2^* – пространства, сопряженные к E_1 и E_2 , соответственно.

Будем считать, что элементы φ_k и ψ_k , $k = \overline{1, n}$, образуют полные A - и A^* -жордановы наборы длины p_k операторов B и B^* , соответственно. Обозначим элементы этих наборов

$$\varphi_k^{(j)}, \quad j = \overline{1, p_k}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (1)$$

$$\psi_s^{(l)}, \quad l = \overline{1, p_s}, \quad s = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $\varphi_k^{(1)} = \varphi_k$, $\psi_s^{(1)} = \psi_s$.

Предположим, что обобщенные жордановы наборы, состоящие из элементов (1) и (2), не удовлетворяют условиям биортогональности [1]. Приведем метод построения новых обобщенных жордановых наборов $\{\hat{\varphi}_k^{(j)}\}$ и $\{\hat{\psi}_s^{(l)}\}$, для которых будут справедливы условия биортогональности.

Покажем, что для этого достаточно лишь при фиксированном наборе $\{\varphi_k^{(j)}\}$ построить новый набор $\{\hat{\psi}_s^{(l)}\}$ так, что

$$\langle \varphi_k^{(j)}, \hat{\gamma}_s^{(l)} \rangle = \delta_{ks} \delta_{jl}, \quad \hat{\gamma}_s^{(l)} = A^* \hat{\psi}_s^{(p_s+1-l)}, \quad (3)$$

$$j = \overline{1, p_k}, \quad l = \overline{1, p_s}, \quad k, s = \overline{1, n},$$

где δ_{ks}, δ_{jl} – символы Кроннекера, символом $\langle f, g \rangle$ обозначено значение линейного функционала g на элементе f .

Будем искать элементы $\hat{\psi}_s^{(l)}$, удовлетворяющие соотношениям (3), из системы

$$\begin{cases} \psi_s^{(p_s+1-l)} = c_{1s}^{(l)} \hat{\psi}_1^{(1)} + c_{2s}^{(l)} \hat{\psi}_2^{(1)} + \dots + c_{ns}^{(l)} \hat{\psi}_n^{(1)} + \hat{\psi}_s^{(p_s+1-l)}, & l = \overline{1, p_s - 1}, \\ \psi_s^{(1)} = c_{1s}^{(p_s)} \hat{\psi}_1^{(1)} + c_{2s}^{(p_s)} \hat{\psi}_2^{(1)} + \dots + c_{ns}^{(p_s)} \hat{\psi}_n^{(1)}, \\ s = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (4)$$

где $c_{rs}^{(l)}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Применяя оператор A^* к уравнениям системы (4) и рассматривая левые и правые части полученных уравнений как линейные функционалы, вычислим их значение на элементах $\varphi_k^{(j)}$. Получим

$$\begin{cases} \langle \varphi_k^{(j)}, A^* \psi_s^{(p_s+1-l)} \rangle = \sum_{r=1}^n c_{rs}^{(l)} \langle \varphi_k^{(j)}, A^* \hat{\psi}_r^{(1)} \rangle + \langle \varphi_k^{(j)}, A^* \hat{\psi}_s^{(p_s+1-l)} \rangle, \\ \langle \varphi_k^{(j)}, A^* \psi_s^{(1)} \rangle = \sum_{r=1}^n c_{rs}^{(p_s)} \langle \varphi_k^{(j)}, A^* \hat{\psi}_r^{(1)} \rangle, \\ j = \overline{1, p_k}, \quad k = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, p_s - 1}, \quad s = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (5)$$

Полагая $\gamma_s^{(l)} = A^* \psi_s^{(p_s+1-l)}$ и учитывая формулы (3), систему (5) запишем в виде

$$\begin{cases} \langle \varphi_k^{(j)}, \gamma_s^{(l)} \rangle = \sum_{r=1}^n c_{rs}^{(l)} \langle \varphi_k^{(j)}, \hat{\gamma}_r^{(p_r)} \rangle + \langle \varphi_k^{(j)}, \hat{\gamma}_s^{(l)} \rangle, \\ \langle \varphi_k^{(j)}, \gamma_s^{(p_s)} \rangle = \sum_{r=1}^n c_{rs}^{(p_s)} \langle \varphi_k^{(j)}, \hat{\gamma}_r^{(p_r)} \rangle, \\ j = \overline{1, p_k}, \quad k = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, p_s - 1}, \quad s = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (6)$$

Учитывая соотношения (3), из системы (6) найдем неизвестные коэффициенты

$$\begin{cases} c_{ks}^{(l)} = \langle \varphi_k^{(p_k)}, \gamma_s^{(l)} \rangle, \\ k = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, p_s}, \quad s = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (7)$$

Подставим вычисленные по формуле (7) коэффициенты $c_{ks}^{(p_s)}$ во второе уравнение системы (4) и запишем это уравнение в виде

$$[\psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)}, \dots, \psi_n^{(1)}] = [\hat{\psi}_1^{(1)}, \hat{\psi}_2^{(1)}, \dots, \hat{\psi}_n^{(1)}] C, \quad (8)$$

где $C \equiv \left\{ c_{ks}^{(p_s)} \right\}_{k,s=1}^n$ – постоянная матрица.

Запишем матрицу C в виде

$$C = \left\{ \langle \varphi_k^{(p_k)}, \gamma_s^{(p_s)} \rangle \right\}_{k,s=1}^n = \left\{ \langle \varphi_k^{(p_k)}, A^* \psi_s^{(1)} \rangle \right\}_{k,s=1}^n = \left\{ \langle A \varphi_k^{(p_k)}, \psi_s^{(1)} \rangle \right\}_{k,s=1}^n.$$

Поскольку A -жорданов набор оператора B является полным, то определитель матрицы C не равен нулю. Тогда выражение (8) можно записать в виде

$$[\hat{\psi}_1^{(1)}, \hat{\psi}_2^{(1)}, \dots, \hat{\psi}_n^{(1)}] = [\psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)}, \dots, \psi_n^{(1)}] C^{-1},$$

или

$$\begin{cases} \hat{\psi}_1^{(1)} = \hat{c}_{11}\psi_1^{(1)} + \hat{c}_{21}\psi_2^{(1)} + \dots + \hat{c}_{n1}\psi_n^{(1)}, \\ \hat{\psi}_2^{(1)} = \hat{c}_{12}\psi_1^{(1)} + \hat{c}_{22}\psi_2^{(1)} + \dots + \hat{c}_{n2}\psi_n^{(1)}, \\ \dots \\ \hat{\psi}_n^{(1)} = \hat{c}_{1n}\psi_1^{(1)} + \hat{c}_{2n}\psi_2^{(1)} + \dots + \hat{c}_{nn}\psi_n^{(1)}, \end{cases} \quad (9)$$

где $\hat{c}_{ks}$ – элементы обратной матрицы C^{-1} .

Подставляя элементы $\hat{\psi}_s^{(1)}$, вычисленные по формулам (9), в первое уравнение системы (7), найдем остальные элементы A^* -жорданова набора оператора B^*

$$\begin{cases} \hat{\psi}_s^{(p_s+1-l)} = c_{1s}^{(l)}\hat{\psi}_1^{(1)} + c_{2s}^{(l)}\hat{\psi}_2^{(1)} + \dots + c_{ns}^{(l)}\hat{\psi}_n^{(1)} - \psi_s^{(p_s+1-l)}, \\ l = \overline{1, p_s - 1}, \quad s = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (10)$$

Полагая $z_k^{(j)} = A\varphi_k^{(p_k+1-j)}$, вычислим

$$\begin{aligned} \langle z_k^{(j)}, \hat{\psi}_s^{(l)} \rangle &= \langle A\varphi_k^{(p_k+1-j)}, \hat{\psi}_s^{(p_s+1-l)} \rangle = \langle \varphi_k^{(p_k+1-j)}, A^*\hat{\psi}_s^{(l)} \rangle = \\ &= \langle \varphi_k^{(p_k+1-j)}, \hat{\gamma}_s^{(p_s+1-l)} \rangle = \delta_{ks} \delta_{p_k+1-j, p_s+1-l}. \end{aligned}$$

Поскольку равенства $\delta_{ks} \delta_{p_k+1-j, p_s+1-l} = \delta_{ks} \delta_{jl}$ справедливы для всех $j = \overline{1, p_k}$, $k = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, p_s}$, $s = \overline{1, n}$, то

$$\langle z_k^{(j)}, \hat{\psi}_s^{(l)} \rangle = \delta_{ks} \delta_{jl}, \quad j = \overline{1, p_k}, \quad l = \overline{1, p_s}, \quad k, s = \overline{1, n}.$$

Таким, образом обобщенные жордановы наборы $\{\hat{\varphi}_k^{(j)}\}$ и $\{\hat{\psi}_s^{(l)}\}$ операторов B и B^* , соответственно, удовлетворяют условиям биортогональности и новый набор $\{\hat{\psi}_s^{(l)}\}$ может быть найден по формулам (9) и (10).

Аналогично можно показать, что биортогональные обобщенные жордановы наборы операторов B и B^* можно построить, фиксируя набор $\{\hat{\psi}_s^{(l)}\}$ и перестраивая набор $\{\varphi_k^{(j)}\}$.

Литература

1. Логинов Б. В., Русак Ю. Б. Обобщённая жорданова структура аналитической оператор-функции и её роль в теории ветвления. Редкол. "Известия АН УзССР". Ташкент. 1977. 82 с. Деп. в ВИНТИ 18.04.1977, № 1782-77.
2. Шаманаев П. А., Прохоров С. А. Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений с малым параметром методом Ляпунова-Шмидта в регулярном случае [Электронный ресурс] // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ имени Е.В. Воскресенского: IX Международная научная молодежная школа-семинар (Саранск, 8-11 октября 2020 г.). С. 129-131. Режим доступа: <https://conf.svmo.ru/files/2020/papers/paper40.pdf>.
3. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука. 1964. 524 с.

MSC 47A55, 47B01

On biorthogonalization of complete generalized Jordan sets of a linear operator and its adjoint in a Banach space

P. A. Shamanaev

National Research Ogarev Mordovia State University

Abstract: The article presents a method of biorthogonalization of complete generalized Jordan sets of a linear operator and its adjoint in a Banach space. The method is based on fixing one set and expanding the elements of another set according to a new basis.

Keywords: linear Fredholm operators, Banach spaces, biorthogonality condition, generalized Jordan set

References

1. B. V. Loginov, Yu. B. Rusak Generalized Jordan structure of an analytic operator function and its role in branching theory. Tashkent: Izvestiya AN UzSSR. 1977. 82 p. Dep. in VINITI 04.18.1977, No. 1782-77.
2. P. A. Shamanaev, S. A. Prokhorov. Algorithm for solving systems of linear algebraic equations with a small parameter by the Lyapunov-Schmidt method in the regular case [Electronic resource]. Proceedings of the International Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software complexes" named after E.V. Voskresensky (Saransk, October 8-11, 2020). Saransk: SVMO Publ, 2020. pp. 129-131. Available at: <https://conf.svmo.ru/files/2020/papers/paper40.pdf>.
3. M. M. Weinberg, V. A. Trenogin. Theory of branching of solutions of nonlinear equations. M.: Nauka. 1964. 524 p.

УДК 51-73

Моделирование окислительной регенерации сплошного цилиндрического зерна катализатора*

Язовцева О. С.¹, Губайдуллин И. М.², Кокулов А. Ф.¹,
Макарова А. А.¹, Пескова Е. Е.¹

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва¹,
Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН²

Аннотация: В работе представлена математическая модель окислительной регенерации цилиндрического зерна катализатора. Трёхмерная модель сведена к задаче в осесимметричной постановке. Приняты допущения равномерности зерна и распределения кокса по нему, направленность стефановского потока вдоль цилиндрического радиуса. Модель описана системой уравнений в частных производных с начально-краевыми условиями, отвечающими теплообмену на границах зерна. Большая разница в скоростях течения процессов, сопровождающих окислительную регенерацию, приводит к вычислительным сложностям при численном решении системы. Возникающие проблемы решены с использованием расщепления по физическим процессам. Вычислительный эксперимент проведен для двух видов зерна катализатора – «таблетка», справа – «сплошной цилиндр». Результаты моделирования визуализированы.

Ключевые слова: окислительная регенерация, химическая кинетика, уравнение теплопроводности, уравнение диффузии

Ресурсосбережение является важным стратегическим направлением развития современной науки и техники. Одной из актуальных задач этого направления является исследование процесса регенерации катализатора. Составляющей частью модели всего процесса окислительной регенерации является моделирование зерна катализатора. Различные формы зерен катализатора и технологические условия течения регенерации обуславливают множество режимов течения этого процесса [1–5].

В настоящей работе представлена математическая модель регенерации сплошного зерна катализатора и ее численное исследование. Модель разработана с учетом некоторых допущений: зерно и распределение кокса по нему равномерны, а стефановский поток, отвечающий за изменение реакционного объема вследствие гетерогенных реакций, направлен вдоль цилиндрического радиуса. Массоперенос в зерне реализуется за счет диффузии и стефановского потока, тепловой баланс описан уравнением теплопроводности, учет химических превращений проводится через кинетические уравнения химических реакций, входящих как источниковые члены в уравнения материального и теплового баланса. В качестве кинетических уравнений процесса приняты уравнения скоростей, представленные в [1, 2]:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= k_1(T) \psi \theta_3^2 y_1; & \omega_2 &= k_2(T) \psi \theta_2 y_1; & \omega_3 &= k_3(T) \psi \theta_2; & \omega_4 &= k_4(T) \psi \theta_1 y_1; \\ \omega_5 &= k_5(T) \psi \theta_2^2; & \omega_6 &= k_6(T) \psi \frac{\rho_C}{R_C} \left(\frac{\theta_1}{6} - z_1 \right); & \omega_7 &= k_7(T) \psi \frac{\rho_C}{R_C} \left(\frac{4\theta_2}{3} - z_2 \right).\end{aligned}$$

*Работа выполнена в рамках государственного задания Института нефтехимии и катализа УФИЦ РАН (тема № FMRS-2022-0078)»

Здесь ω_i , $i = \overline{1, 7}$, – скорости стадий химического взаимодействия, первые пять – безразмерны, размерность ω_6 и ω_7 – г/моль; $\psi = \frac{\gamma_k S_0 \tau_k}{c_0}$; $k_j(T)$, $j = \overline{1, 7}$, – константы скоростей стадий химического взаимодействия; y_1 – концентрация кислорода в газовой фазе реакции; Θ_l , $l = \overline{1, 3}$, – степени покрытия поверхности кокса различными углеродными комплексами (Θ_1 – водород-углеродный комплекс, Θ_2 – кислород-углеродный комплекс, Θ_3 – свободная углеродная поверхность); z_1 и z_2 – концентрации водорода и кислорода в слое кокса в массовых долях; ρ_C и R_C – плотность (г/м³) и средний радиус гранул (м) кокса.

Безразмерная модель описана уравнениями в частных производных в цилиндрической системе координат:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y_i}{\partial \tau} = \frac{1}{\varphi \varepsilon_k} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial y_i}{\partial \rho} - \rho \hat{\mu} y_i \right) + \frac{R_z^2}{\varphi \varepsilon_k L} \frac{\partial^2 y_i}{\partial l^2} + \frac{\hat{S}}{\varepsilon_k} \sum_{j=1}^7 \nu_{ij} \omega_j, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\lambda^* \tau_k}{c_k R_z^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} \right) + \frac{\lambda^* \tau_k}{c_k L^2} \frac{\partial \Theta}{\partial l} + \frac{\hat{S} c_0}{T_{op} c_k} \sum_{j=1}^7 Q_j \omega_j, \\ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \hat{\mu}) = \rho \varphi \hat{S} (-\omega_1 + \omega_3 + \omega_5), \\ \frac{\partial q_c}{\partial \tau} = -\frac{M_C c_0}{\gamma_k} \hat{S} (\omega_2 + \omega_3 + \omega_5), \\ \frac{\partial z_1}{\partial \tau} = \frac{c_0}{\gamma_k q_c} \hat{S} (\omega_6 + z_1 M_C (\omega_2 + \omega_3 + \omega_5)), \\ \frac{\partial z_2}{\partial \tau} = \frac{c_0}{\gamma_k q_c} \hat{S} (\omega_7 + z_2 M_C (\omega_2 + \omega_3 + \omega_5)), \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = -\hat{S} \left(\omega_4 + \frac{c_0}{\gamma_k} \omega_6 \right), \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = \hat{S} \left(2\omega_1 - \omega_3 + \omega_4 - 2\omega_5 - \frac{c_0}{\gamma_k} \omega_7 \right), \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь y_i – концентрации веществ в газовой фазе реакции (1 – кислород, 2 – угарный газ, 3 – углекислый газ, 4 – вода); τ – безразмерное время; $\varphi = R_z^2/D \tau_k$; ε_k – пористость зерна; ρ – безразмерный цилиндрический радиус зерна катализатора; $\hat{\mu}$ – безразмерная скорость стефановского потока; R_z – радиус зерна катализатора, м; L – длина оси зерна катализатора, м; l – безразмерная зерна катализатора; $\hat{S}$ – отношение текущей реакционной поверхности к первоначальной; q_c – текущая массовая доля кокса на зерне катализатора; λ – коэффициент теплопроводности материала катализатора, Вт/м/К; c_k – объемная теплоемкость материала катализатора, Дж/м³/К; M_C – молярная масса кокса, г/моль; c_0 – мольная плотность реакционной смеси моль/м³; τ_k – время контакта; Θ – безразмерная температура; T_{op} – опорная температура, равная 793 К; Q_i , $i = \overline{1, 5}$ – тепловые эффекты реакций; γ_k – насыпная плотность катализатора, г/м³.

Начально-краевые условия описывают тепломассообмен через цилиндрическую стенку и основания цилиндра:

$$\begin{aligned} \tau = 0 : \quad q_c(0) &= q_c^0, \quad z_1(0) = z_1^0, \quad z_2(0) = 0, \quad \theta_1(0) = \theta_1^0, \quad \theta_2(0) = 0, \\ \Theta(0) &= T(0)/T_{op}, \quad y_1(0) = 0.05, \quad y_i(0) = 0, i = \overline{2, 4}. \\ \rho = 0, \quad l = 0 : \quad \mu &= 0, \quad \frac{\partial y_i}{\partial \rho} = \frac{\partial y_i}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} = \frac{\partial y_i}{\partial l} = 0; \\ \rho = 1, \quad l = 1 : \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} &= \frac{R_z \alpha}{\lambda^*} \left(\frac{T(0)}{T_{op}} - \Theta \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial \rho} = \frac{\partial y_1}{\partial l} = \frac{R_z \beta}{D^*} (x_1 - y_1), \quad \frac{\partial y_i}{\partial \rho} = \frac{\partial y_i}{\partial l} = \left(\frac{R_z \beta}{D^*} - \mu \right) (x_i - y_i), i = \overline{2, 4}.$$

Разница в характерных временах течения диффузионных и химических процессов приводит к сложностям в построении вычислительного алгоритма [6]. Возникающие проблемы решены с использованием расщепления по физическим процессам. Разработанный алгоритм послужил основой создания кода для расчета основных характеристик процесса окислительной регенерации.

Вычислительный эксперимент проводился для зерен радиуса 3 мм, но различной длины – 1 мм (форма «таблетка») и 5 мм (форма «сплошной цилиндр»), при температуре зерна катализатора 0° С и температуре реакционной смеси 520° С.

Результатом работы программного комплекса являются картины распределения температуры и химических веществ по зерну катализатора (рис. 1-4).

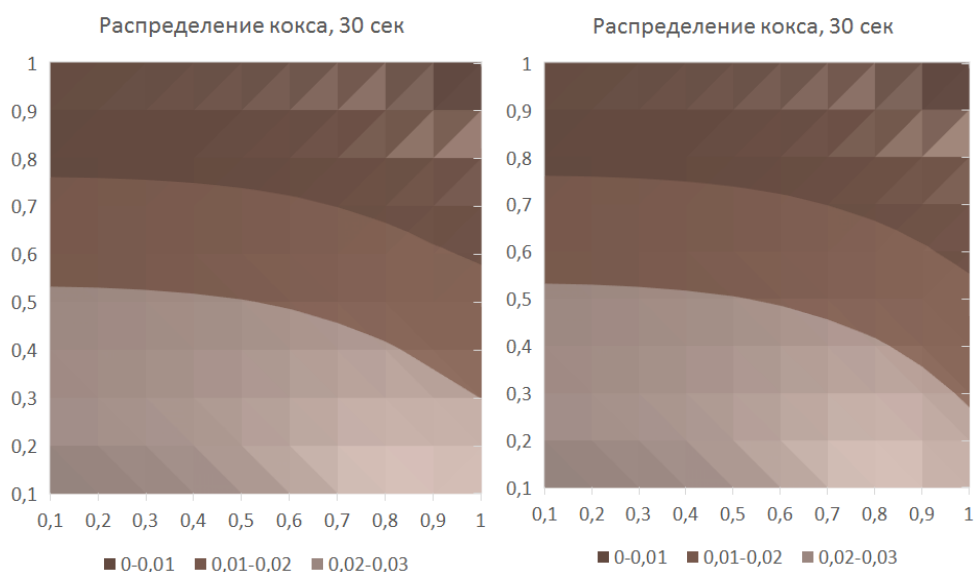


Рис. 1. Распределение кокса по профилю зерна катализатора: слева – «таблетка», справа – «сплошной цилиндр»

Из рис. 1 видно, что выжиг кокса наиболее интенсивно идет на границе зерна, что естественно при высокой температуре окружающей среды.

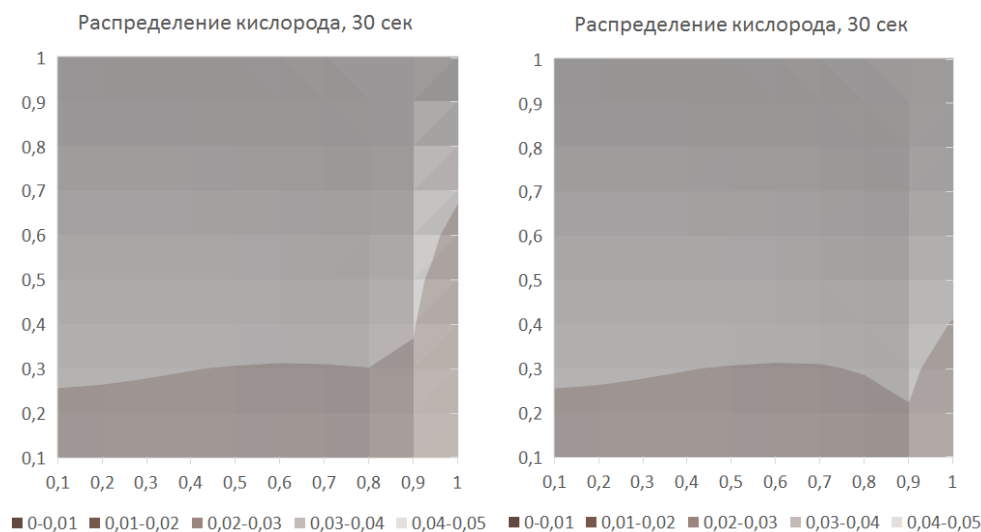


Рис. 2. Распределение кислорода по профилю зерна катализатора: слева – «таблетка», справа – «сплошной цилиндр»

Рис. 2 показывает, что несмотря на расход кислорода при горении кокса, его концентрация в ячейках, граничащих с внешней средой, высока. Это объясняется активным выгоранием кокса на границе, выводом через нее продуктов реакции и поступлением кислорода в зерно извне.

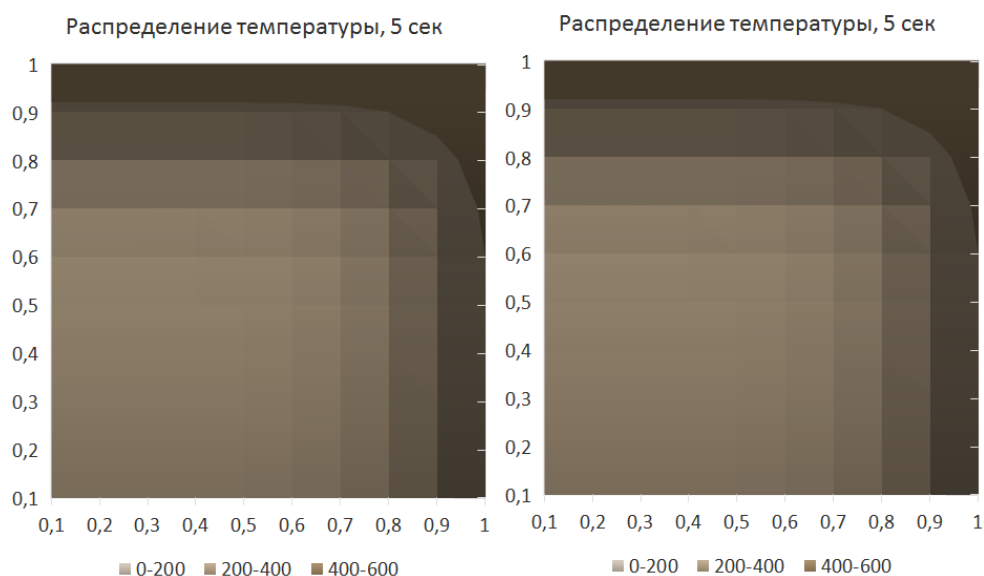


Рис. 3. Распределение температуры по профилю зерна катализатора в момент времени 30 сек: слева – «таблетка», справа – «сплошной цилиндр»

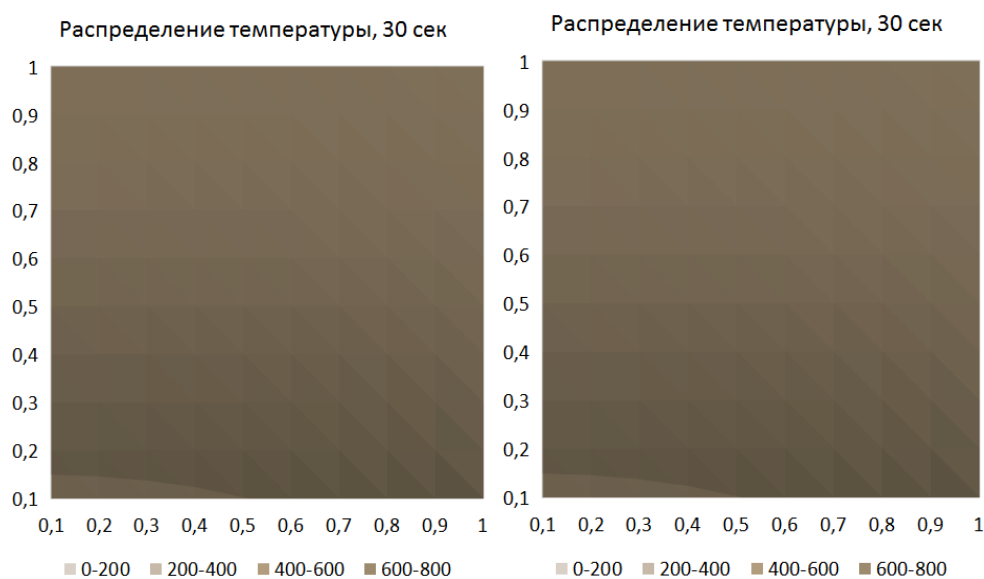


Рис. 4. Распределение температуры по профилю зерна катализатора в момент времени 5 сек: слева – «таблетка», справа – «сплошной цилиндр»

Рис. 3-4 показывают разогрев зерна с течением времени. При этом на пятой секунде процесса четко виден градиент температуры, исчезающий к 30 секундам. Это свидетельствует об адекватности разработанной модели и хорошо согласуется с предположениями изотермичности сферического зерна в процессе регенерации [3, 4].

Таким образом, основным результатом исследования модели является вывод о возможности упрощения математической модели слоя цилиндрического катализатора в части отказа от учета изменения температуры зерна в процессе регенерации.

Литература

1. Масагутов Р.М., Морозов Б.Ф., Кутепов Б.И. Регенерация катализаторов в нефтепереработке и нефтехимии. М.: Химия, 1987. 144 с.
2. Губайдуллин И.М. Математическое моделирование динамических режимов окислительной регенерации катализаторов в аппаратах с неподвижным слоем. Уфа: Институт Нефтехимии и катализа АН РБ, 1996, автореферат диссерт. ... канд. физ.-мат. наук.
3. Reshetnikov S.I., Petrov R., Zazhigalov S., Zagoruiko A.N. Mathematical modeling of regeneration of coked Cr-Mg catalyst in fixed bed reactors // Chemical Engineering Journal. 2020. № 380.
4. Zazhigalov S., Chumakova N., Zagoruiko A. Modeling of the multidispersed adsorption-catalytic system for removing organic impurities from waste gases // Chemical Engineering Science. 2012. vol. 76. P. 81-89. DOI: 10.1016/j.ces.2012.04.015.
5. Губайдуллин И.М., Язовцева О.С. Исследование усредненной модели окислительной регенерации закоксованного катализатора // Компьютерные исследования и моделирование. 2021. т. 13, № 1. С. 149-161.
6. Yazovtseva O., Grishaeva O., Gubaydullin I., Peskova E. Construction of a Parallel Algorithm for the Numerical Modeling of Coke Sediments Burning from the Spherical Catalyst Grain // Parallel Computational Technologies. PCT 2022. Communications in Computer and Information Science. 2022. vol 1618. https://doi.org/10.1007/978-3-031-11623-0_17

MSC 93A30

Modeling of oxidative regeneration of a solid cylindrical catalyst grain

O. S. Yazovtseva¹, I. M. Gubaydullin², A. F. Kokulov¹, A. A. Makarova¹, E. E. Peskova¹

National Research Mordovia State University¹, Institute of Petrochemistry and Catalysis of the Russian Academy of Sciences²

Abstract: The article is devoted to the mathematical model of oxidative regeneration of a cylindrical catalyst grain. The three-dimensional model is reduced to the problem in an axisymmetric formulation. The assumptions of grain uniformity and coke distribution over it, the direction of the Stefan flow along the cylindrical radius are accepted. The model is described by a system of partial differential equations with initial boundary conditions corresponding to heat and mass transfer at grain boundaries. A large difference in the rates of the processes accompanying oxidative regeneration leads to computational difficulties for the numerical solution of the system. The problems that arise are solved using splitting by physical processes. A computational experiment was carried out for two types of catalyst grains – «tablet», on the right – «solid cylinder». The simulation results are visualized.

Keywords: oxidative regeneration, chemical kinetics, thermal conductivity equation, diffusion equation

References

1. R.M. Masagutov, B.F. Morozov, B.I. Kutepov, Regeneration of catalysts in oil processing and petrochemistry, Moscow, 1987.
2. I.M. Gubaydullin, Mathematical modelling of dynamic modes of oxidative regeneration of catalysts in motionless layer, Ufa, 1996.
3. S.I. Reshetnikov, R. Petrov, S. Zazhigalov, A.N. Zagoruiko, Mathematical modeling of regeneration of coked Cr-Mg catalyst in fixed bed reactors, *Chemical Engineering Journal*, 2020, № 380.
4. S. Zazhigalov, N. Chumakova, A. Zagoruiko, Modeling of the multidispersed adsorption-catalytic system for removing organic impurities from waste gases, *Chemical Engineering Science*, 2012, vol. 76, P. 81-89. DOI: 10.1016/j.ces.2012.04.015
5. I.M. Gubaydullin, O.S. Yazovtseva, Investigation of the averaged model of coked catalyst oxidative regeneration, *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 1, P. 149-161.
6. O. Yazovtseva, O. Grishaeva, I. Gubaydullin, E. Peskova, Construction of a Parallel Algorithm for the Numerical Modeling of Coke Sediments Burning from the Spherical Catalyst Grain, *Parallel Computational Technologies. PCT 2022. Communications in Computer and Information Science*, 2022, vol 1618. https://doi.org/10.1007/978-3-031-11623-0_17.

MSC 74H45, 74K05

Stochastic longitudinal oscillations viscoelastic rope with moving boundaries, taking into account damping forces

V. L. Litvinov^{1,2}, K. V. Litvinova^{1,2}

Samara State Technical University¹, Moscow State University²

Abstract: Stochastic longitudinal oscillations of a viscoelastic rope with moving boundaries are considered, taking into account damping forces. The initial conditions and the external load are assumed to be random. To find the characteristics of random variables of stochastic oscillations, it is necessary to obtain statistical estimates for the solution of a system of random integro-differential equations. The statistical Monte Carlo method is used to estimate the expansion coefficients.

Keywords: mathematical model, vibrations of a rope, stochastic oscillations, moving boundaries

At present, reliability issues in the design of machines and mechanisms require more and more complete consideration of the dynamic phenomena that take place in the designed objects. The widespread use in technology of mechanical objects with moving boundaries necessitates the development of methods for their calculation. The problem of oscillations of systems with moving boundaries is related to obtaining solutions to integro-differential and partial differential equations in time-variable domains [1–10]. Such tasks are currently not well understood. Their peculiarity is the difficulty in using the known methods of mathematical physics, suitable for problems with fixed boundaries. The complexity of the solutions obtained is explained by the fact that up to now there has not been a sufficiently general approach to the analysis of the features of the dynamics of such systems. In connection with the danger of resonance, the study of forced oscillations is of great importance here. Attempts to investigate this process have been made, but the results obtained are limited mainly by a qualitative description of dynamic phenomena [1–4]. In addition, it is recognized that deterministic modeling of systems cannot be adequate for some types of problems, so it is necessary to switch to probabilistic-statistical, where there are random variables, stochastic fluctuations. When solving here, mainly approximate methods are used [5–9], since obtaining exact solutions is possible only in the simplest cases [10].

If the damping of transverse vibrations is mainly due to the action of external damping forces, then in the case of longitudinal vibrations, the damping is mainly affected by elastic imperfections in the material of the vibrating object [5–10]. The study of viscoelasticity includes the analysis of the stochastic stability of stochastic viscoelastic systems, their reliability, etc. The paper considers stochastic linear longitudinal oscillations of a viscoelastic rope with moving boundaries, taking into account the influence of damping forces. The case of a difference kernel makes it possible to reduce the problem of analyzing a system of stochastic integro-differential equations to the study of a system of stochastic differential equations. To estimate the expansion coefficients, it is proposed to apply the statistical numerical Monte Carlo method [11].

The differential equation describing the longitudinal vibrations of the rope (viscoelasticity

is taken into account based on the Voigt hypothesis) has the form [7, 10]

$$U_{tt}(x, t) + 2\alpha U_t(x, t) - a^2 \left[U_{xx}(x, t) - \int_0^t K(t - \nu) U_{xx}(x, \nu) d\nu + \mu U_{xxt}(x, t) \right] = f(x, t). \quad (1)$$

Border conditions:

$$U(\nu_0 t, t) = 0; \quad U(\nu_0 t + l_0, t) = 0. \quad (2)$$

Initial conditions:

$$U(x, 0) = U_1(x); \quad U_t(x, 0) = 0. \quad (3)$$

In problem (1)-(3) it is indicated: $U(x, t)$ – longitudinal displacement of the rope point with coordinate x at time t ; $a^2 = \frac{E}{\rho}$ – velocity of wave propagation in the rope, E – modulus of elasticity of the rope material, ρ – linear mass density; α – resistance force of the medium acting per unit length of the rope, proportional to the speed of movement; μ – a small parameter that takes into account viscoelasticity; $\nu_0 t + l_0$ – the law of motion of the rope boundary; $f(x, t)$ – a function that characterizes an external disturbance; $K(z)$ – relaxation core.

Let's introduce new variables that stop the bounds:

$$\xi = \frac{(x - \nu_0 t)}{l_0}; \quad \tau = \frac{at}{l_0}; \quad U(x, t) = V(\xi, \tau).$$

After transformations, we get:

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) - 2\nu V_{\xi\tau}(\xi, \tau) - (1 - \nu^2) V_{\xi\xi}(\xi, \tau) - 2k_0 V_\xi(\xi, \tau) + 2k_1 V_\tau(\xi, \tau) - \\ - d \int_{\xi}^{\xi + \nu\tau} K(-d(\xi - \eta)) V_{\xi\xi} \left(\eta, \frac{1}{\nu}(\xi - \eta) + \tau \right) d\eta + \lambda \left(V_{\xi\xi\xi}(\xi, \tau) - \frac{1}{\nu} V_{\xi\xi\tau}(\xi, \tau) \right) = F(\xi, \tau); \quad (4)$$

$$V(0, \tau) = 0; \quad V(1, \tau) = 0; \quad (5)$$

$$V(\xi, 0) = V_1(\xi); \quad V_\tau(\xi, 0) = 0. \quad (6)$$

Here $\nu = \frac{\nu_0}{a}$; $d = \frac{l_0}{\nu_0}$; $k_0 = a\nu l_0$; $k_1 = \alpha\nu d$; $\lambda = \frac{\mu}{d}$; $F(\xi, \tau) = \nu^2 d^2 f(x, t)$.

The function $F(\xi, \tau)$ can be represented as

$$F(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\tau) \sin(\omega_n \xi), \quad \omega_n = \pi n. \quad (7)$$

Theorem 1. *The solution to problem (4)-(6) can be given as a string*

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\tau) \sin(\omega_n \xi) \quad (8)$$

Substituting (7), (8) into (4), after transformations, we obtain the system of equations

$$V_{n\tau\tau}(\tau) + \left(2k_1 + \frac{\lambda}{\nu}\omega_n^2\right) V_{n\tau}(\tau) + \omega_n^2(1 - \nu^2)V_n(\tau) + \\ + \omega_n^2 d \int_{\xi}^1 K(-d(\xi - n)) V_n \left(\frac{1}{\nu}(\xi - \eta) + \tau \right) d\eta = F_n(\tau) \quad (9)$$

with initial conditions

$$V_n(0) = 2 \int_0^1 V_1(\xi) \sin(\omega_n \xi) d\xi; \quad V_{n\tau}(0) = 0. \quad (10)$$

We accept the initial conditions and the external load as random, representing the sum of sinusoids with random amplitudes, denoting them $\tilde{V}(\xi)$ and $\tilde{F}(\xi, \tau)$ respectively. In this case, the oscillations will be random, and equations (9) form a system of random integro-differential equations

$$\tilde{V}_{n\tau\tau}(\tau) + \left(2k_1 + \frac{\lambda}{\nu}\omega_n^2\right) \tilde{V}_{n\tau}(\tau) + \omega_n^2(1 - \nu^2)\tilde{V}_n(\tau) + \\ + \omega_n^2 d \int_{\xi}^1 K(-d(\xi - n)) \tilde{V}_n \left(\frac{1}{\nu}(\xi - \eta) + \tau \right) d\eta = \tilde{F}_n(\tau); \quad (11)$$

$$\tilde{V}_n(0) = 2 \int_0^1 \tilde{V}_1(\xi) \sin(\omega_n \xi) d\xi; \quad \tilde{V}_{n\tau}(0) = 0. \quad (12)$$

Characteristics of random variables – mathematical expectation, variance and covariance, have the following form:

$$M(\tilde{V}(\xi, \tau)) = \sum_{n=1}^{\infty} M(\tilde{V}_n(\tau) \sin(\omega_n \xi)), \quad (13)$$

$$D(\tilde{V}(\xi, \tau)) = \sum_{n,k=1}^{\infty} D_{n,k}(\tau) \sin(\omega_n \xi) \sin(\omega_k \xi), \quad (14)$$

$$C(\tilde{V}(\xi, \tau, \zeta, v)) = \sum_{n,k=1}^{\infty} C_{n,k}(\tau, v) \sin(\omega_n \xi) \sin(\omega_k \zeta). \quad (15)$$

To find the characteristics (13)-(15) of stochastic linear longitudinal oscillations of a viscoelastic rope, it is necessary to obtain statistical estimates for the solution of a system of random integro-differential equations (11). To do this, the relaxation kernel $K(z)$ can be taken in exponential form with a random component:

$$K(z, \bar{\beta}) = K(z, \bar{b})|_{\bar{b}=\bar{\beta}} = \sum_{j=1}^N c_j e^{-\beta_j z}, \quad (16)$$

where $c_j \in R_+$, β_j – is a possible value of a positive random variable b_j .

Denote the dependence of $\tilde{V}(\xi, \tau)$ and $\tilde{V}_n(\tau)$ on the random vector $\bar{b}$ as $\tilde{V}(\xi, \tau, \bar{b})$ and $\tilde{V}_n(\tau, \bar{b})$, respectively. By changing the variable

$$u_{nj}(\tau, \bar{b}) = \int_{\xi}^1 e^{-\beta_j d \eta} \tilde{V}_n \left(\frac{1}{\nu} (\xi - \eta) + \tau, \bar{b} \right) d\eta \quad (17)$$

the system of random integro-differential equations (11) is transformed into a system of random differential equations of the form

$$\tilde{V}_{n\tau\tau}(\tau, \bar{b}) + \left(2k_1 + \frac{\lambda}{\nu} \omega_n^2 \right) \tilde{V}_{n\tau}(\tau, \bar{b}) + \omega_n^2 (1 - \nu^2) \tilde{V}_n(\tau, \bar{b}) + \omega_n^2 d \sum_{j=1}^N c_j e^{b_j d \tau} u_{nj}(\tau, \bar{b}) = \tilde{F}_n(\tau). \quad (18)$$

The initial conditions will look like

$$\tilde{V}_n(0, \bar{b}) = 2 \int_0^1 \tilde{V}_1(\xi) \sin(\omega_n \xi) d\xi; \quad \tilde{V}_{n\tau}(0, \bar{b}) = 0; \quad u_{nj}(0, \bar{b}) = 0. \quad (19)$$

The study of the system (18)-(19) is possible using the statistical numerical Monte Carlo method [11–13].

References

1. G.N. Savin, O.A. Goroshko, Dynamics of a variable length thread, Nauk. dumka, Kiev, 1962, 332 p.
2. Yu.P. Samarin, On a nonlinear problem for the wave equation in one-dimensional space, *Applied Mathematics and Mechanics*, 1964, T. 26, V. 3, P. 77–80.
3. A.I. Vesnitsky, Waves in systems with moving boundaries and loads, Moscow, Fizmatlit, 2001, 320 p.
4. A.A. Lezhneva, Bending vibrations of a beam of variable length, *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Rigid Body Mechanics*, 1970, No. 1, P. 159–161.
5. V.L. Litvinov, Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations, *Tr. Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*, 2020, Vol. 26, No. 2, P. 188–199.
6. V.N. Anisimov, V.L. Litvinov, Mathematical models of longitudinal-transverse vibrations of objects with moving boundaries, *Vestn. Himsel. tech. un-t. Ser. Phys and mat. science*, 2015, Vol. 19, No. 2, P. 382–397.
7. V.N. Anisimov, V.L. Litvinov, Mathematical modeling and study of the resonance properties of mechanical objects with a changing boundary: monograph, Samara, Samar. state tech. un-t, 2020, 100 p.
8. V.L. Litvinov, V.N. Anisimov, Application of the Kantorovich - Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries, *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Rigid Body Mechanics*, 2018, No. 2, P. 70–77.

9. V.L. Litvinov, V.N. Anisimov, Transverse vibrations of a rope moving in a longitudinal direction, *Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2017, V. 19, No. 4, P. 161–165.
10. V.L. Litvinov, V.N. Anisimov, Mathematical modeling and research of oscillations of one-dimensional mechanical systems with moving boundaries: monograph, Samara, Samar. state tech. un-t, 2017, 149 p.
11. B.S. Elepov, A.A. Kronberg, G.A. Mikhailov, K.K. Sabelfeld, Solution of boundary value problems by the Monte Carlo method, Novosibirsk, Nauka, 1980, 174 p.
12. S.M. Ermakov, Monte Carlo Method in Computational Mathematics: An Introductory Course, St. Petersburg, Nevsky Dialect, M., BINOM, Knowledge Laboratory, 2009, 192 p.
13. G.S. Fishman, Monte Carlo. Concepts, Algorithms, and Applications, SpringerVerlag, 1995 (Corrected 3rd printing, 1999), 718 p.

Научное электронное издание

**Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
X МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ
МОЛОДЕЖНОЙ ШКОЛЫ-СЕМИНАРА
имени Е. В. Воскресенского**

Саранск
14 — 18 июля 2022 г.

Редакторы: Жалнин Р. В., Пескова Е. Е., Шаманаев П. А., Язовцева О. С.
Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 13.78
Подписано в печать 10.10.2022

Средне-Волжское математическое общество
Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет
430005, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, 68

