УДК 517.9:532.5:539.3

Исследование динамических процессов в системах измерения давления газожидкостных сред *

Тамарова Ю. А., Вельмисов П. А., Алексанин Н. Д., Нуруллин Н. И.
Ульяновский государственный технический университет

Ввиду постоянного развития техники необходимо улучшать и разрабатывать новые типы первичных преобразователей, в частности, датчики давления [1–6], характеризующиеся экстренными условиями эксплуатации. Все датчики давления в той или иной степени критичны к воздействию температур и виброускорений. Датчики давления можно размещать непосредственно на двигателе, однако при этом на датчики воздействуют широкие диапазоны температур и повышенные виброускорения, что приводит к дополнительной погрешности измерений, и в ряде случаев к разрушению упругого чувствительного элемента датчика. Вопросам влияния нестационарной температуры измеряемой среды на погрешность измерения посвящена работа [7]. В работе [8] рассмотрены вопросы повышения виброустойчивости датчиков, выбора конструкционных и функциональных материалов.

В механической системе «трубопровод – датчик давления» датчик расположен на некотором расстоянии от двигателя и соединен с ним с помощью трубопровода, что позволяет ослабить воздействие высоких температур и виброускорений. Задача состоит в получении дифференциальных уравнений, связывающих закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя) и деформацию упругого элемента датчика (расположенного на выходе из трубопровода) и предназначенных по величине деформации элемента рассчитать давление в двигателе. Совокупность некоторых моделей и методов исследования механической системы «трубопровод – датчик давления» представлена, например, в [9, 10]. В случае несжимаемости рабочей среды математические модели системы «трубопровод – датчик давления» рассматривались в работах [11–15].

В данной работе на основе предложенных моделей, описываемых системами дифференциальных уравнений, исследуется совместная динамика чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе в предположении, что среда идеальная и сжимаемая. Для описания движения рабочей среды используются линейные модели механики жидкости и газа, для описания динамики чувствительного элемента применяются линейные модели механики твердого деформируемого тела.

Математическая постановка начально-краевой задачи, соответствующей плоской модели механической системы «трубопровод-датчик давления», имеет вид

$$\varphi_{tt} = a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad x \in (0,l), \quad y \in (0,h), \tag{1}$$

$$\varphi_y(x,0,t) = \varphi_y(x,h,t) = 0, \quad x \in (0,l), \tag{2}$$

$$\varphi_x(l,y,t) = \dot{w}(y,t), \quad y \in (0,h), \tag{3}$$

$$-\rho_0\varphi_t(0,y,t) = P(y,t), \quad y \in (0,h), \tag{4}$$

$$P_0 - \rho_0\varphi_t(l,y,t) - P_* = L(w(y,t)), \quad y \in (0,h). \tag{5}$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области (проекты №18-41-730015, №19-41-730006).

Дифференциальный (или интегро-дифференциальный) оператор $L(w(y,t))$ в уравнении (5) может быть задан по разному в зависимости от выбранной модели твердого деформируемого тела, например,

$$L(w(y,t)) = L^*(w(y,t)) \equiv m\ddot{w} + Dw^{''''} + Nw^{''} + \beta\dot{w}^{''''} + f(\dot{w}, w). \qquad (6)$$

В (1)-(6) $\varphi(x,y,t)$ – потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе с прямолинейными стенками $y = 0$, $y = h$; $w(y,t)$ – деформация упругого элемента датчика, расположенного в конце трубопровода $x = l$; ρ_0, P_0, a_0 – плотность, давление, скорость звука, соответствующие состоянию покоя рабочей среды; $P(y,t)$ – заданный закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод $x = 0$; P_* – внешнее воздействие на упругий элемент; m и D – погонная масса и изгибная жесткость упругого элемента; N – сжимающее (растягивающее) элемент усилие; β – коэффициент внутреннего демпфирования; $f(\dot{w}, w)$ – некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации $w(y,t)$ и скорости деформации $\dot{w}(y,t)$; индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по координатам x, y и времени t, точка сверху – частную производную по t, штрих – частную производную по y.

Уравнение (1) описывает движение идеального газа в трубопроводе; (2), (3) – условия непротекания стенок трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (4) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (5) описывает динамику упругого элемента. Необходимо задать начальные условия для функций $\varphi(x,y,t)$ и $w(y,t)$, а также граничные условия для $w(y,t)$ при $y = 0$, $y = h$, соответствующие типу закрепления концов элемента (например, $w = w_y = 0$ для жесткого защемления, $w = w_{yy} = 0$ для шарнирного закрепления). Таким образом, имеем связанную краевую задачу для функций $\varphi(x,y,t)$ и $w(y,t)$, которую следует дополнить начальными условиями.

Введем усредненные характеристики основных величин динамической системы

$$\begin{gathered} \Phi(x,t) = \int\limits_0^h \varphi(x,y,t)dy, \quad \xi(t) = \int\limits_0^h w(y,t)dy, \\ G(t) = \int\limits_0^h P(y,t)dy, \quad Q(w) = \int\limits_0^h L(w(y,t))dy. \end{gathered} \qquad (7)$$

Тогда, проводя в (1)-(5) интегрирование по y в пределах от 0 до h, с учетом обозначений (7) и граничных условий (2) получим

$$\Phi_{tt} - a_0^2\Phi_{xx} = 0, \qquad (8)$$

$$\Phi_x(l,t) = \dot{\xi}(t), \qquad (9)$$

$$-\rho_0\Phi_t(0,t) = G(t), \qquad (10)$$

$$(P_0 - P_*)h - \rho_0\Phi_t(l,t) = Q(w). \qquad (11)$$

Пусть $w(y,t) = g(y)\theta(t)$, $w_0 = \int\limits_0^h g(y)dy$, где функция $g(y)$ удовлетворяет граничным условиям, соответствующим типу закрепления упругого элемента. Тогда

$$\xi(t) = \theta(t) \cdot \int\limits_0^h g(y)dy = w_0\theta(t).$$

В линейной модели оператор (6) принимает вид

$$Ł(w(y,t)) = m\ddot{w} + Dw^{''''} + Nw^{''} + \beta\dot{w}^{''''} + \alpha\dot{w} + \gamma w,$$

где α, γ – коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи. Тогда

$$Q(w) = m_0\ddot{\theta}(t) + \alpha_0\dot{\theta}(t) + \gamma_0\theta(t), \tag{12}$$

где

$$m_0 = m\int\limits_0^h g(y)dy, \quad \alpha_0 = \alpha\int\limits_0^h g(y)dy + \beta\int\limits_0^h g^{''''}(y)dy,$$

$$\gamma_0 = D\int\limits_0^h g^{''''}(y)dy + N\int\limits_0^h g^{''}(y)dy + +\gamma\int\limits_0^h g(y)dy.$$

Таким образом, решение задачи (1)-(5) сведено к исследованию одномерной системы (8)-(11) для функций $\Phi(x,t)$, $\theta(t)$, в которой $Q(w)$ имеет вид (12), а $\dot{\xi}(t) = w_0\dot{\theta}(t)$.

Отметим, что с помощью введения усредненных характеристик аналогичным образом к решению одномерной задачи сводятся следующие начально-краевые задачи: задача, соответствующая осесимметричной модели механической системы «трубопровод-датчик давления»; задача, соответствующая трехмерной модели системы «трубопровод-датчик давления», в которой сечение трубопровода имеет прямоугольную форму; задача, соответствующая трехмерной модели системы «трубопровод-датчик давления» в цилиндрических координатах для трубопровода с поперечным сечением в виде сектора.

Рассматривается несколько способов исследования одномерной системы (8)-(11).

1. Аналитическое исследование. Общее решение уравнения (8) имеет вид: $\Phi(x,t) = A(t - \frac{x}{a_0}) + B(t + \frac{x}{a_0})$. Подставляя это решение в (9)-(11) и проводя ряд несложных математических действий, получим уравнение с отклоняющимся аргументом, связывающее величину отклонения $\theta(t)$ чувствительного элемента датчика с законом изменения давления $G(t)$ рабочей среды в двигателе

$$m_0\left[\ddot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \ddot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right] + \alpha_0\left[\dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right] +$$
$$+\gamma_0\left[\theta\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \theta\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right] - \rho_0 a_0 w_0\left[\dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) - \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right] = 2[G(t) + (P_0 - P_*)h].$$

2. Численно-аналитическое исследование с помощью метода Галеркина, при реализации которого потенциал скорости $\Phi(x,t)$ или давление $z = P_0 - \rho_0\Phi_t(x,t)$ представляется в виде отрезка ряда по полной на отрезке $[0,l]$ системе функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям, соответствующим условиям (9), (10) или (10), (11). В результате решение сведено к решению задачи Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Численное исследование проводилось также на основе метода конечных разностей, использовалась явная схема, на основе которой проведен численный эксперимент.

Литература

1. Эткин Л. Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 408 с.

2. Казарян А. А., Грошев Г. П. Универсальный датчик давления // Измерительная техника. 2008. № 3. С. 26–30.

3. Аш Ж. и соавторы. Датчики измерительных систем: В 2-х книгах. Пер. с франц. М.: Мир, 1992.
4. Агейкин Д. И., Костина Е. Н., Кузнецова Н. Н. Датчики контроля и регулирования. М.: Машиностроение, 1965. 928 с.
5. Корсунов В. П. Упругие чувствительные элементы. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1980. 264 с.
6. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. 2-е издание. М.: Машиностроение, 1981. 392 с.
7. Белозубов Е. М., Мокров Е. А., Тихомиров Д. В. Минимизация погрешности тонкопленочных тензорезисторных датчиков давления при воздействии нестационарной температуры // Датчики и системы. 2004. № 1. С. 26-29.
8. Мокров Е. А., Лебедев Д. В., Базаев В. П., Ефремов Е. В., Семина И. А., Колчин П. А. О конструктивно-технологическом совершенствовании тензорезисторных тонкопленочных датчиков давлений // Датчики и системы. 2008. № 6. С. 2-7.
9. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Покладова Ю. В. Математическое моделирование механической системы «трубопровод - датчик давления». Ульяновск: УлГТУ, 2008. 188 с.
10. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем // Ульяновск: УлГТУ. 2018. 152 с.
11. Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Решетников Ю. А. Математическая модель системы «трубопровод – датчик давления» // Механика и процессы управления: сборник научных трудов. Ульяновск: УлГТУ, 2002. С. 9-15.
12. Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Решетников Ю. А. Математическое моделирование механической системы «трубопровод – датчик давления» // Датчики и системы. 2003. № 6(49). С. 12–15.
13. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., Серебрянникова Е. С. Математическое моделирование системы «трубопровод - датчик давления» // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12, № 4. С. 85–93.
14. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system // Journal of Physics: Conference Series, 2019. Vol. 1353, 012085, pp. 1-6; doi: 10.1088/1742-6596/1353/1/012085.
15. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V., Mizher U. J. Mathematical modelling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor” // AIP Conference Proceedings 2172, 030006 (2019); doi: 10.1063/1.5133495.

MSC2020 35Q35, 35Q74, 65M06

Investigation of dynamic processes in pressure measurement systems for gas-liquid media

Yu. A.Tamarova, P. A. Velmisov, N. D. Aleksanin, N. I. Nurullin

Ulyanovsk state technical university