

УДК 517.9

## О прохождении инвариантного тора через вырожденную резонансную зону при квазипериодическом возмущении гамильтоновой системы\*

Морозов К. Е.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Рассматриваются неконсервативные квазипериодические возмущения двумерных гамильтоновых систем

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} + \varepsilon g(x, y, \omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_m t) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + \varepsilon f(x, y, \omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_m t).\end{aligned}\tag{1}$$

Уровень энергии невозмущенной гамильтоновой системы (замкнутую фазовую траекторию  $H(x, y) = h_0$ ) назовем вырожденным, если собственная частота колебаний на этом уровне  $\omega(h_0)$  принимает экстремальное значение. Если, дополнительно,  $\omega(h_0)$  суть резонансное значение, то говорят о вырожденном резонансе. Изучается поведение решений в малой окрестности вырожденной резонансной фазовой кривой. Кроме того, допустим, что система

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} + \varepsilon \bar{g}(x, y), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + \varepsilon \bar{f}(x, y), \end{cases}\tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}\bar{g}(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} g(x, y, \theta_1, \dots, \theta_m) d\theta_1 \dots d\theta_m, \\ \bar{f}(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(x, y, \theta_1, \dots, \theta_m) d\theta_1 \dots d\theta_m,\end{aligned}$$

имеет предельный цикл, положение которого контролируется значением управляющего параметра  $\gamma$ . При некоторых условиях, такому циклу соответствует  $m+1$ -мерный инвариантный тор в исходной системе, записанной в расширенном фазовом пространстве [1]. Пусть при некотором значении  $\gamma = \gamma_0$  цикл рождается в окрестности вырожденной резонансной траектории. Представляет интерес исследование бифуркаций в резонансной зоне при изменении  $\gamma$  в окрестности  $\gamma_0$ . Указывается, что такие бифуркации приводят к синхронизации квазипериодических колебаний. Исследование основано на анализе автономной квазигамильтоновой системы маятникового типа, полученной методом усреднения и описывающей динамику в резонансной зоне [2]. Выделяются две возможные топологические структуры невозмущенной усредненной системы, для каждой из которых найдены значения управляющего параметра, соответствующие синхронизации колебаний.

\*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект No. 20-31-90039) и Российского научного фонда (проект No. 19-11-00280).

Результаты исследования иллюстрируются на примере асимметричного уравнения типа Дуффинга–Ван дер Поля

$$\ddot{x} + x + ax^2 + x^3 = \varepsilon[\beta \sin(t) \sin(\omega_1 t) + \delta(1 - bx^2)\dot{x}], \quad (3)$$

где  $|a| \in (0, 2)$ ,  $\beta, \delta, \omega_1, b$  – параметры. Если  $\omega_1$  является иррациональным, то возмущение суть квазипериодическая функция времени. Можно показать, что невозмущенное уравнение ( $\varepsilon = 0$ ) имеет вырожденную фазовую траекторию. [3] При  $\beta = 0, b > 0$  в фазовом пространстве (3) существует предельный цикл, положение которого контролируется значением параметра  $b$ .

## Литература

1. Morozov A. D., Morozov K. E. Global Dynamics of Systems Close to Hamiltonian Ones Under Nonconservative Quasi-periodic Perturbation // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 15, no. 2. P. 187–198.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Госиздательство физико-математической литературы, 1958. 408 с.
3. Морозов А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2005. 424 с.

MSC2020 34C15

## On the passage of an invariant torus through a degenerate resonance zone in a nearly Hamiltonian system under quasiperiodic perturbations

K. E. Morozov

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod