УДК 531.36

Вектор-функции Ляпунова в задаче об устойчивости неавтономной системы с цилиндрическим фазовым пространством

Буранов Ж. И.[1], Хусанов Д. Х.[2]

Академический лицей ТашГТУ им. И. Каримова[1],
Джизакский политехнический институт[2]

Исследование свойств устойчивости системы дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством имеет ряд важных особенностей [1]. В данной работе представлено развитие метода векторных функций Ляпунова с принципом сравнения в исследовании свойств устойчивости такой системы.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x), \quad X(t, 0) \equiv 0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $X(t,x) = (X_1(t,x), X_2(t,x), \dots, X_n(t,x))^T$ (индекс T означает транспонирование), вещественные функции $X_i(t,x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ определены и непрерывны в области $R \times R^n$ и удовлетворяют в этой области следующему условию: переменную x можно разделить $x^T = (y^T, z^T)$, $y \in R^m$, $z \in R^s$, $m + s = n$, так что функция $X(t,x)$ является 2π-периодической по переменной z, т. е. $X(t, y, z + 2\pi 1_j) = X(t, y, z)$, $(z + 2\pi 1_j) = (z_1, z_2, \dots, z_{j-1}, z_j + 2\pi, z_{j+1}, \dots, z_s)$, $j = 1, 2, \dots, s$.

Таким образом, решения системы (1) можно рассматривать в цилиндрическом фазовом пространстве $R \times R^m \times P^s$, $P^s = \{z \in R^s : \ -\pi \le z_j \le \pi, \ j = 1, 2, \dots, s)$.

Будем полагать также, что функция X удовлетворяет условию Липшица по x равномерно относительно $t \in R$, так что

$$||X(t, y^{(2)}, z^{(2)}) - X(t, y^{(1)}, z^{(1)})|| \le L_1(H)||y^{(2)} - y^{(1)}|| + L_2(H)||z^{(2)} - z^{(1)}||$$

для всех $(t, y^{(1)}, z^{(1)}), (t, y^{(2)}, z^{(2)}) \in R \times \{y \in R^m : \ ||y|| \le H = const > 0\} \times P^s$, где $||y||$ есть некоторая норма вектора $y \in R^m$, $||z||$ есть норма вектора $z \in R^s$, $||x|| = ||y|| + ||z||$.

Заметим, что при этих условиях имеют место свойства существования, единственности решений системы (1), а также их нелокальной продолжимости и непрерывной зависимости от начальных данных и времени. Таким образом, можно определить зависимость $x = x(t, t_0, x_0)$ $(0 < \alpha < t - t_0 < \beta)$, $(t_0, x_0) \in R \times R^m \times P^s$.

При этом предположении также семейство сдвигов $\{X_\tau(t,x) = X(t + \tau, x), \ \tau \in R^+\}$ является предкомпактным в некотором компактном метрическом пространстве с замыканием [2]

$$F_X = \{X^*(t,x)\}, \ X^*(t,x) = \frac{d}{dt} \lim_{j \to \infty} \int\limits_0^t X_j(\tau, x) d\tau, \quad X_j(\tau, x) = X_j(t_j + \tau, x) \tag{2}$$

относительно последовательности $t_j \to +\infty$ для любых $x = (y, z) \in R^m \times P^s$ и $t \in R^+$.

Соответственно можно ввести семейство предельных систем согласно следующему определению.

Определение 1. *Система уравнений*

$$\dot{x} = X^*(t, x), \quad X^* \in F_X \tag{3}$$

называется предельной к исходной системе (1).

Введем также следующее определение положительного предельного множества $\omega^+(x(t, t_0, x_0))$ решения $x = x(t, t_0, x_0)$ системы (1), полагая, что $Z^{(1)}$ есть множество целых чисел.

Определение 2. *Точка* $p = (p^{(1)}, p^{(2)}) \in R^m \times P^s$ *называется положительной предельной точкой решения* $x = x(t, t_0, x_0)$ *системы (1), если существуют последовательности* $t_k \to \infty$ *и* $L^{(k)} = (l_1^{(k)}, l_2^{(k)}, \ldots, l_s^{(k)})$, $l_j^{(k)} \in Z^{(1)}$, $j = 1, 2, \ldots, s$, *такие, что* $y(t_k, t_0, x_0) \to p^{(1)}$, $z(t_k, t_0, x_0) - 2\pi L^{(k)} \to p^{(2)}$ *при* $k \to \infty$. *Множество* $\omega^+(x(t, t_0, x_0))$ *всех таких точек есть положительное предельное множество.*

Определение 3. *Множество* $M \subset R^m \times P^s$ *называется квазиинвариантным по отношению к системе (1), если* $\forall p = (p^{(1)}, p^{(2)}) \in M$ *найдется предельная система (3), такая, что ее решение* $x = x(t, 0, p)$ *таково, что* $x(t, 0, p) \in M(mod\,(2\pi))$ $\forall t \in (\alpha, \beta)$ $(\alpha < 0 < \beta)$, *где* (α, β) *– интервал определения этого решения.*

Доказывается следующее утверждение динамического типа.

Теорема 1. *Пусть* $x = x(t, t_0, x_0)$ *есть некоторое решение системы (1), ограниченное компактом* $K \subset R^n$ *при всех* $t \geq t_0$. *Тогда положительное предельное множество* $\omega^+(t_0, x_0)$ *этого решения связно, компактно и квазиинвариантно.*

Введем класс $\mathcal{K}_1$ векторных функций $V = (V^1, V^2, \ldots, V^k)^T$, $V : R \times R^n \to R^k$, периодических по z_i, $i = 1, 2, \ldots, s$ с периодом 2π,

$$V(t, y, z + 2\pi 1_j) = V(t, y, z), \quad j = 1, 2, \ldots, s,$$

являющихся ограниченными и равномерно непрерывными на множестве $R \times K_1 \times P^s$, где $K_1 = \{y \in R^m : \ ||y|| \leq H_1 > 0\}$.

Пусть также $\mathcal{K}_2$ – класс векторных функций $U : R \times R^k \to R^k$, ограниченных и равномерно непрерывных на множестве $K_2 = \{u \in R^k : \ ||u|| \leq H_2 > 0\}$, и $\mathcal{K}_3$ – класс векторных функций $W : R \times R^m \times P^s \times R^k \to R^k$, ограниченных и равномерно непрерывных на множестве $R \times K_1 \times P^s \times K_2$.

Рассмотрим функциональное пространства непрерывных векторных функций $F_1 = \{V : R \times R^n \to R^n\}$, $F_2 = \{U : R \times R^k \to R^p\}$, $F_3 = \{W : R \times R^m \times P^s \times R^k \to R^k\}$ с открыто-компактной топологией. Семейство сдвигов $V_\tau(t, x) = V(\tau + t, x), \ \tau \in R\}$, $\{U_\tau(t, u) = U(\tau + t, u)\}$, $\{W_\tau(t, x, u) = W(\tau + t, x, u)\}$ функций $V \in \mathcal{K}_1$, $U \in \mathcal{K}_2$, $W \in \mathcal{K}_3$ будут предкомпактны соответственно в F_1, F_2, F_3.

Таким образом, можно определить семейства $\{V^*\}$, $\{U^*\}$, $\{W^*\}$ соответствующих предельных функций, а также предельные совокупности $\{X^*, V^*, U^*, W^*\}$.

Пусть для системы (1) найдется непрерывно дифференцируемая функция $V \in \mathcal{K}_\infty$, производная которой в силу этой системы представима в виде [3, 4]

$$\begin{aligned} &\dot{V}(t, x) = U(t, V(t, x)) + W(t, x, V(t, x)), \\ &U(t, 0) = 0, \ W(t, 0, V(t, 0)) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где функция $U = U(t, u)$ принадлежит классу $\mathcal{K}_2$, $U \in \mathcal{K}_2$, и является квазимонотонной и непрерывно дифференцируемой по $u \in R^k$, $\partial U/\partial u \in \mathcal{K}_2$, функция $W = W(t, x, u)$

принадлежит классу $\mathcal{K}_3$, $W \in \mathcal{K}_3$, и имеет место неравенство $W(t,x,u) \le 0$ для любых $(t,x,u) \in R \times R^n \times R^k$.

Из равенства (4) следует, что функция $V(t,x)$ является вектор-функцией сравнения, а система

$$\dot{u} = U(t,u) \tag{5}$$

является системой сравнения.

Так как $U \in K_2$, то система (5) является предкомпактной и для неё существует семейство предельных систем сравнения

$$\dot{u} = U^*(t,u), \quad U^* \in F_2. \tag{6}$$

Рассматривая условия относительно правой части $U = U(t,u)$ системы (5), получим, что решения $u = u(t,t_0,u_0)$ этой системы непрерывно дифференцируемы по $(t_0,u_0) \in R^+ \times R^k$. Из свойства неубывания функции $u(t,t_0,u_0)$ по переменной u_0 следует, что матрица

$$\Phi(t,t_0,u_0) = \frac{\partial u(t,t_0,u_0)}{\partial u_0}$$

является неотрицательной, нормированной, $\Phi(t_0,t_0,u_0) = I$ ($I \in R^{n\times n}$ — единичная матрица) фундаментальной матрицей для линейной системы в вариациях

$$\dot{y} = H(t,t_0,u_0)y, \quad H = \left.\frac{\partial U(t,u)}{\partial u}\right|_{u=u(t,t_0,u_0)}.$$

Предположим, что для любого компакта $K_2 = \{u \in R^l : \ ||u|| \le H_2\}$ существуют числа $M(K_2)$ и $\alpha(K_2)$, такие, что матрица Φ для любых $(t,t_0,u_0) \in R^+ \times R^+ \times K_2$ удовлетворяет условиям

$$||\Phi(t,t_0,u_0)|| \le M(K_2), \quad \det\Phi(t,t_0,u_0) \ge \alpha(K_2). \tag{7}$$

Имеет место следующая теорема о локализации положительного предельного множества $\omega^+(t_0,x_0)$ решения системы (1).

Теорема 2. *Допустим, что $x = x(t,t_0,x_0)$ есть некоторое решение системы (1) и найдется векторная функция Ляпунова $V \in \mathcal{K}_\infty$, такая, что*

1) $||V(t,y,z)|| \to \infty$ равномерно по $(t,z) \in R^+ \times P^s$ при $||y|| \to \infty$;

2) $V(t,y,z)$ ограничена при $||y|| \le H = const > 0$, $||V(t,y,z)|| \le m(H)$ $\forall (t,y,z) \in R^+ \times \{y : \ ||y|| \le H\} \times P^s$;

3) производная $\dot{V}$ удовлетворяет равенству (4);

4) решения системы сравнения (5) удовлетворяют условию (7);

5) решение $u(t,t_0,V_0)$ системы сравнения (5), где $V_0 = V(t_0,x_0)$ ограничено при всех $t \ge t_0$.

Тогда выполняется соотношение $\omega^+(x(t,t_0,x_0)) \subset M$, где M – максимальное инвариантное подмножество множества $\{W^*(t,x,u^*(t)) = 0\}$, $u^*(t)$ есть решение соответствующей предельной системы сравнения (6) с начальным условием $u^*(0) = V^*(0,p)$ для выбранной точки $p \in \omega^+(x(t,t_0,x_0))$.

В соответствие векторной функции $V = (V^1, V^2, \ldots, V^r)^T$ введем скалярную функцию

$$\bar{V}(t,x) = \sum_{j=1}^{r} V^j(t,x).$$

Введем класс $\mathcal{K}_4$ непрерывных функций типа Хана $a_i : R^+ \to R^+$, $a_i(0) = 0$, a_i строго монотонно возрастает, $i = 1,2$. Имеет место также следующая теорема об устойчивости.

Теорема 3. *Предположим, что для системы (1) можно найти векторную функцию* $V = V(t, x)$, *такую, что:*

1) выполнены условия 1 – 4 Теоремы 2;

2) $a_1(||x||) \leq \bar{V}(t, x) \leq a_2(||x||)$;

3) решение $u = 0$ *системы сравнения (5) равномерно устойчиво;*

4) для каждой предельной совокупности $\{X^*, V^*, W^*, U^*\}$ *множество* $\{W^*(t, x, u^*(t)) = 0\} \setminus \{x \in R^n : \ y = 0, \ z = \pi L^{(k)}\}$ *не содержит решений системы (3), где* $u^*(t) \neq 0$ *есть любое ненулевое решение системы (6).*

Тогда:

1) решение $x = 0$ *и соответственно множество положений равновесия* $\{x \in R^n : \ y = 0, \ z = 2\pi L^{(k)}\}$ *системы (1) равномерно асимптотически устойчивы;*

2) множество положений равновесия $\{x \in R^n : \ y = 0, \ z = \pi L^{(k)}\}$ *системы (1) является глобально притягивающим.*

Доказанные теоремы развивают соответствующие результаты работ [1, 3–8]. Теоремы применены в задаче о стабилизации программного положения двухзвенного манипулятора.

Литература

1. Барбашин Е. А., Табуева В. А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Физматгиз, 1969. 300 с.
2. Artstein Z. Topological dynamics of ordinary differential equations // J. Differ. Equat. 1977. Vol. 23. P. 216-223.
3. Перегудова О. А. Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движениями механических систем. Ульяновск: УлГУ, 2009. 253 с.
4. Андреев А. С., Перегудова О. А. К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 6. С. 965-976.
5. Каюмов О. Р. Асимптотическая устойчивость в большом в системах с цилиндрическим фазовым пространством // Изв. вузов. Матем. 1987. № 10. С. 61–63.
6. Леонов Г. А., Селеджи С. М. Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике. СПб.: Невский диалект, 2002. 112 с.
7. Andreev A. S., Peregudova O. A. On global trajectory tracking control of robot manipulators in cylindrical phase space // International Journal of Control. 2020. Vol. 93, No. 2. pp. 3003–3015.
8. Матросов В. М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М: Физматлит, 2001. 380 с.

MSC2020 34D20

Lyapunov vector-functions in the stability problem of a non-autonomous system with a cylindrical phase space

J. I. Buranov[1], D. Kh. Khusanov[2]

Academic lyceum of Taskent State Technical University named after I.Karimov[1],
Jizzakh Polytechnic Institute[2]