УДК 517.954

Об одной краевой задаче для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с нелокальными условиями

Мурсалова М. Б., Касумов Т. М.
Бакинский Государственный Университет

Аннотация: Исследована одна краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с интегральным граничным условием. Вначале исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее с использованием этих фактов доказываются существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: краевая задача, дифференциальные уравнения, существование решения, единственность решения, классическое решение.

1. Постановка задачи и её сведение к эквивалентной задаче

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению краевых задач для уравнений в частных производных. В настоящее время теория краевых задач является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений. С точки зрения физических приложений актуально исследование дифференциальных уравнений четвертого порядка.

Современные проблемы естествознания приводят к необходимости обобщения классических задач математической физики, а также к постановке качественно новых задач, к которым можно отнести нелокальные задачи для дифференциальных уравнений. Среди нелокальных задач большой интерес представляют задачи с интегральными условиями. Нелокальные интегральные условия описывают поведение решения во внутренних точках области в виде некоторого среднего. Такого рода интегральные условия встречаются при исследовании физических явлений в случае, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственных измерений. Примером могут служить задачи, возникающие при исследовании диффузии частиц в турбулентной плазме [1], процессов распространения тепла [2, 3], процесса влагопереноса в капиллярно-простых средах [4], а также при исследовании некоторых обратных задач математической физики [7;8].

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt}(x,t) - \alpha\, u_{ttxx}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) = f(x,t) \qquad (1)$$

в замкнутой области $D_T = \{(x,t) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$ и поставим для него краевую задачу с нелокальными начальными условиями

$$u(x,0) + \delta u(x,T) = \varphi(x),\ u_t(x,0) + \delta u_t(x,T) = \psi(x)\ \ (0 \le x \le 1), \qquad (2)$$

периодическими условиями

$$u(0,t) = u(1,t),\ u_x(0,t) = u_x(1,t),\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t)\,(0 \le t \le T) \qquad (3)$$

и нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t)dx = 0 \quad (0 \le t \le T), \tag{4}$$

где $\delta \ne \pm 1$, $\alpha > 0$ – заданные числа, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$ – заданные функции, а $u(x,t)$ – искомая функция.

Определение 1. *Под классическим решением задачи* (1)-(4) *понимаем функцию* $u\,(x,t)$, *непрерывную в замкнутой области* D_T *вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение* (1), *и удовлетворяющую условиям* (1)-(4) *в обычном смысле.*

Справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть*

$$\delta \ne \pm 1,\, \varphi(x) \in C[0,1]\,, \int_0^1 \varphi(x)dx = 0, \psi(x) \in C[0,1],\, \int_0^1 \psi(x)dx = 0,$$

$$f(x,t) \in C(D_T),\, \int_0^1 f(x,t)dx = 0 \ (0 \le t \le T).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(4) *эквивалентна задаче определения функций* $u(x,t)$, *из* (1)-(3),

$$u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(1,t) = 0 \ \ (0 \le t \le T), \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u(x,t)$ является классическим решением задачи (1)-(4). Интегрируя уравнение (1) от 0 до 1 по x, имеем:

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\int_0^1 u(x,t)dx - \alpha(u_{ttx}(1,t) - u_{ttx}(0,t)) + u_{xxx}(1,t) - u_{xxx}(0,t) =$$

$$= \int_0^1 f(x,t)dx \ (0 \le t \le T). \tag{6}$$

Отсюда, с учётом $\int_0^1 f(x,t)dx = 0$ и (3), приходим к выполнению равенства (5).

Теперь предположим, что $u(x,t)$ является решением задачи (1)- (3), (5).
Тогда из (6), с учетом (3), (5), имеем:

$$y''(t) = 0 \ (0 \le t \le T), \tag{7}$$

где

$$y(t) = \int_0^1 u(x,t)dx(0 \le t \le T). \tag{8}$$

В силу (2) и $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)dx = 0$, $\displaystyle\int_0^1 \psi(x)dx = 0$, получаем:

$$y(0) + \delta y(T) \ = \int_0^1 (u(x,0) + \delta u(x,T))dx = \int_0^1 \varphi(x)dx = 0,$$

$$y'(0) + \delta y'(T) \ = \int_0^1 (u_t(x,0) + \delta u_t(x,T))dx = \int_0^1 \psi(x)dx = 0 \tag{9}$$

Из (7) с учетом (9) с очевидностью получаем, что $y(t) \equiv 0$ $(0 \le t \le T)$. Отсюда, в силу (8), приходим к выполнению равенства (4).

Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

2. Существование и единственность решения задачи

Покажем существование решения задачи (1)-(3), (5).

Рассмотрим спектральную задачу:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,\; 0 \le x \le 1, \tag{10}$$

$$X(0) = X(1),\; X'(0) = X'(1). \tag{11}$$

Известно [6], что собственные числа задачи (8), (9) состоят из чисел $\lambda_k = 2\pi\, k$ ($k = 0, 1, 2, ...$), причем при $k \ge 1$ каждому собственному значению λ_k соответствуют две линейно независимые собственные функции $\cos\lambda_k x$, $\sin\lambda_k x$; кроме того, система

$$1,\; \cos\lambda_1 x,\; \sin\lambda_1 x,\; ...,\; \cos\lambda_k x,\; \sin\lambda_k x, ...$$

образует в $L_2(0,1)$ ортогональный базис.

Классическое решение задачи (1)-(3), (5) будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t)\cos\,\lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t)\sin\,\lambda_k x, \tag{12}$$

где

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x,t)dx\,, u_{1k}(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\cos\,\lambda_k x dx\;(k = 1, 2, ...),$$

$$u_{2k}(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\sin\,\lambda_k x dx\;(k = 1, 2, ...).$$

Применяя формальный метод Фурье, из (1), (2) получаем:

$$(1 + \alpha{\lambda_k}^2)u''_{1k}(t) + {\lambda_k}^2 u_{1k}(t) = f_{1k}(t)\;\;(k = 0, 1, 2, ..., 0 \le t \le T\,), \tag{13}$$

$$\begin{gathered} u_{1k}(0) + \delta\, u_{1k}(T) = \varphi_{1k},\quad (k = 0, 1, 2, ...\,)\,, \\ u'_{1k}(0) + \delta\, u'_{1k}(T) = \psi_{1k}\quad (k = 0, 1, 2, ...), \end{gathered} \tag{14}$$

$$(1 + \alpha\lambda_k^2)u''_{2k}(t) + \lambda_k^2 u_{2k}(t) = f_{2k}(t)\;\;(k = 1, 2, ...; 0 \le t \le T\,), \tag{15}$$

$$\begin{gathered} u_{2k}(0) +\; \delta\, u_{2k}(T) = \varphi_{2k}\;\;(k = 1, 2, ...), \\ u'_{2k}(0) + \delta\, u'_{2k}(T) = \psi_{2k}\;\;(k = 1, 2, ...), \end{gathered} \tag{16}$$

где

$$\varphi_{10} = \int_0^1 \varphi(x)dx,\;\psi_{10} = \int_0^1 \psi(x)dx\;, f_{10}(t) = \int_0^1 f(x,t)dx\,,$$

$$\varphi_{1k} = 2\int_0^1 \varphi(x)\cos\lambda_k x dx,\;\psi_{1k} = 2\int_0^1 \psi(x)\cos\,\lambda_k x dx\;,\;\;(k = 1, ...)$$

$$f_{1k}(t) = 2\int_0^1 f(x,t)\cos\,\lambda_k x dx\;\;(k = 1, 2, ...),$$

$$\varphi_{2k} = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin\lambda_k x dx,\;\psi_{21k} = 2\int_0^1 \psi(x)\sin\,\lambda_k x dx\;(k = 1, 2, ...),$$

$$f_{2k}(t) = 2\int_0^1 f(x,t)\sin\,\lambda_k x dx\;\;(k = 1, 2, ...).$$

Из (13)-(16) имеем:

$$u_{10}(t)=(1+\delta)^{-1}\varphi_{10}+(1+\delta)^{-1}(t-(1+\delta)^{-1}\delta T)\psi_{10}-\delta(1+\delta)^{-1}\int_0^T (T(1+\delta)^{-1}+t-\tau)f_{10}(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t (t-\tau)f_{10}(\tau)d\tau \ (0\le t\le T), \tag{17}$$

$$u_{ik}(t)=\frac{1}{\rho_k(T)}\left\{(\cos\,\beta_k t+\delta\cos\,\beta_k(T-t))\varphi_{ik}+\frac{1}{\beta_k}(\sin\beta_k t-\delta\sin\,\beta_k(T-t))\psi_{ik}-\right.$$

$$\left.-\frac{\delta}{\beta_k(1+\alpha\lambda_k^2)}\int_0^T f_{ik}(\tau)(\sin\,\beta_k(T+t-\tau)+\delta\sin\,\beta_k(t-\tau))d\tau\right\}+$$

$$+\frac{1}{\beta_k(1+\alpha\lambda_k^2)}\int_0^t f_{ik}(\tau)\sin\,\beta_k(t-\tau)d\tau \quad i=1,2, \quad (k=1,2,...,0\le t\le T), \tag{18}$$

где

$$\beta_k=\frac{\lambda_k^2}{\sqrt{1+\alpha\lambda_k^2}},\ \rho_k(T)=1+2\delta\cos\,\beta_k T+\delta^2\ (k=1,2,...).$$

Очевидно, что

$$u'_{ik}(t)=\frac{1}{\rho_k(T)}\left\{\beta_k(-\sin\beta_k t+\delta\cos\,\beta_k(T-t)\,)\varphi_{ik}+(\cos\,\beta_k t+\delta\cos\,\beta_k(T-t))\psi_{ik}-\right.$$

$$\left.-\frac{\delta}{1+\alpha\lambda_k^2}\int_0^T f_{ik}(\tau)(\cos\,\beta_k(T+t-\tau)+\delta\cos\ \beta_k(t-\tau))d\tau\right\}+$$

$$+\frac{1}{1+\alpha\lambda_k^2}\int_0^t f_{ik}(\tau)\cos\,\beta_k(t-\tau)d\tau \quad (i=1,2, \quad k=1,2,...,(0\le t\le T)), \tag{19}$$

$$u''_{ik}(t)=\frac{1}{1+\alpha\lambda_k^2}f_{ik}(t)-\frac{\beta_k^2}{\rho_k(T)}\left\{(\cos\beta_k t+\delta\cos\beta_k(T-t))\psi_{ik}+\right.$$

$$+\tfrac{1}{\beta_k}(\sin\beta_k t-\delta\sin\beta_k(T-t))\psi_{ik}-$$

$$\left.-\tfrac{\delta}{\beta_k(1+\alpha\lambda_k^2)}\textstyle\int_0^T f_{ik}(\tau)(\sin\beta_k(T+t-\tau)+\delta\sin\beta_k(t-\tau))d\tau\right\}-$$

$$-\frac{\beta_k}{1+\alpha\lambda_k^2}\int_0^t f_{ik}(\tau)(\sin\beta_k(t-\tau)d\tau \quad (i=1,2, \quad k=1,2,...;0\le t\le T), \tag{20}$$

$$u'_0(t)=(1+\delta)^{-1}(\psi_{10}-\delta\int_0^T f_{10}(\tau)d\tau)+\int_0^t f_{10}(\tau)d\tau \quad (0\le t\le T). \tag{21}$$

Теорема 1. *Пусть* $\delta\neq\mp1$ *и*

1. $\varphi(x)\in C^4[0,1]$, $\varphi^{(5)}(x)\in L_2(0,1)$ *и* $\varphi(0)=\varphi(1)$, $\varphi'(0)=\varphi'(1)$, $\varphi''(0)=\varphi''(1)$, $\varphi'''(0)=\varphi'''(1)$, $\varphi^{(4)}(0)=\varphi^{(4)}(1)$.
2. $\psi(x)\in C^3[0,1]$, $\psi^{(4)}(x)\in L_2(0,1)$ *и* $\psi(0)=\psi(1)$, $\psi'(0)=\psi'(1)$, $\psi''(0)=\psi''(1)$, $\psi'''(0)=\psi'''(1)$.
3. $f(x,t), f_x(x,t)\in C(D_T)$, $f_{xx}(x,t)\in L_2(D_T)$ *и* $f(0,t)=f(1,t), f_x(0,t)=f_x(1,t)$.

Тогда функция

$$u(x,t) = (1+\delta)^{-1}\left\{\int_0^1 \varphi(x)dx + (t-\delta(1+\delta)^{-1}T)\int_0^1 \psi(x)dx + \right.$$
$$\left. -\delta\int_0^T\int_0^1 (T(1-\delta(1+\delta)^{-1}) + t - \tau) f(x,t)dxdt\right\} + \int_0^t\int_0^1 (t-\tau)f(x,t)dxd\tau +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\rho_k(T)}\left\{(\cos\beta_k t + \delta\cos\beta_k(T-t))\varphi_{1k} \quad + \frac{1}{\beta_k}(\sin\beta_k t - \delta\sin\beta_k(T-t))\psi_{1k} - \right.\right.$$
$$\left. -\frac{\delta}{\beta_k(1+\alpha\lambda_k^2)}\int_0^T f_{1k}(\tau)(\sin\beta_k(T+t-\tau) + \delta\sin\beta_k(t-\tau))d\tau\right\} +$$
$$\left. + \frac{1}{\beta_k(1+\alpha\lambda_k^2)}\int_0^t f_{1k}(\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right\}\cos\lambda_k x +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\rho_k(T)}\left\{(\cos\beta_k t + \delta\cos\beta_k(T-t))\varphi_{2k} \quad + \frac{1}{\beta_k}(\sin\beta_k t - \delta\sin\beta_k(T-t))\psi_{2k} - \right.\right.$$
$$\left. -\frac{\delta}{\beta_k(1+\alpha\lambda_k^2)}\int_0^T f_{2k}(\tau)(\sin\beta_k(T+t-\tau) + \delta\sin\beta_k(t-\tau))d\tau\right\} +$$
$$\left. + \frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2)}\int_0^t f_{2k}(\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right\}\sin\lambda_k x \tag{22}$$

является решением задачи (1)-(3), (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что

$$\frac{\lambda_k^2}{\sqrt{\alpha+1}} < \beta_k < \frac{\lambda_k^2}{\sqrt{\alpha}},\ |\rho_k(T)| \geq 1 + \delta^2 - 2|\delta| \equiv \frac{1}{\rho}.$$

Учитывая это, из (18)-(20), соответственно, находим:

$$|u_{ik}(t)| \leq \rho(1+\delta)|\varphi_{ik}| + \frac{\sqrt{\alpha+1}}{\lambda_k}\rho(1+\delta)\psi_{ik} +$$

$$+\frac{\sqrt{\alpha+1}}{\alpha}\frac{1}{\lambda_k^3}(1+\rho\delta(1+\delta))\sqrt{T}\left(\int_0^T |f_{ik}(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, (i=1,2)$$

$$|u'_{ik}(t)| \leq \rho(1+\delta)\frac{\lambda_k^2}{\sqrt{\alpha}}|\varphi_{ik}| + \rho(1+\delta)\psi_{ik} + \frac{1}{\alpha\lambda_k^2}(1+\rho\delta(1+\delta))\sqrt{T}\left(\int_0^T |f_{ik}(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}},\ \ (i=1,2)$$

$$|u''_{ik}(t)| \leq \frac{1}{\alpha\lambda_k^2}|f_{ik}(t)| + \frac{\lambda_k^2}{\sqrt{\alpha}}\rho(1+\delta)|\varphi_{ik}| + \sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}\lambda_k}|\psi_{ik}| +$$
$$+\frac{\sqrt{(\alpha+1)T}}{\alpha^2\lambda_k}(1+\rho\delta(1+\delta))\left(\int_0^T |f_{ik}(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\ \ (i=1,2)$$

$$|u''_{ik}(t)| \leq \lambda_k^{-2}|f_{ik}(t)| + \rho(1+|\delta|)(|\varphi_{ik}| + |\psi_{ik}|) +$$
$$+(1+\rho|\delta|(1+|\delta|))\sqrt{T}\lambda_k^{-2}\left(\int_0^T |f_{ik}(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\ \ (i=1,2).$$

Отсюда имеем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{3}\rho(1+\rho)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5|\varphi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{3(\alpha+1)}\rho(1+\rho)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^4|\psi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{\sqrt{\alpha+1}}{\alpha}(1+\rho\delta(1+\delta))\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2|f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\ \ (i=1,2),$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k \left\|u'_{ik}(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{3}\rho\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(1+\delta)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\left|\varphi_{ik}\right|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{3}\rho(1+\rho)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\left|\psi_{ik}\right|)^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{1}{\alpha}(1+\rho\delta(1+\delta))\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left|f_{ik}(\tau)\right|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \ (i=1,2),$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{ik}^3\left\|u''_k(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{2}{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\left|f_{ik}(\tau)\right|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\alpha}\rho(1+\rho)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\left|\varphi_{ik}\right|)^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{\sqrt{\alpha+1}}{\sqrt{\alpha}}\rho(1+\rho)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^4\left|\psi_{ik}\right|)^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{2\sqrt{\alpha+1}}{\alpha^2}(1+\rho\delta(1+\delta))\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left|f_{ik}(\tau)\right|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \ (i=1,2).$$

или

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\left\|u_{ik}(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{3}\rho(1+\rho)\left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{3(\alpha+1)}\rho(1+\rho)\left\|\psi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} +$$

$$+\frac{\sqrt{\alpha+1}}{\alpha}(1+\rho\delta(1+\delta))\sqrt{T}\left\|f_{xx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)} \ (i=1,2), \tag{23}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\left\|u'_{ik}(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{3}\rho\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(1+\delta)\left\|\varphi''(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{3}\rho(1+\rho)\left\|\psi'(x)\right\|_{L_2(0,1)} +$$

$$+\frac{1}{\alpha}(1+\rho\delta(1+\delta))\sqrt{T}\left\|f(x,t)\right\|_{L_2(D_T)} i=1,2), \tag{24}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{ik}^3\left\|u''_k(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{2}{\alpha}\left\|f_x(x,t)\right\|_{L_2(D_T)} +$$

$$+\frac{2}{\alpha}\rho(1+\rho)\left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \frac{\sqrt{\alpha+1}}{\sqrt{\alpha}}\rho(1+\rho)\left\|\psi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} +$$

$$+\frac{2\sqrt{\alpha+1}}{\alpha^2}(1+\rho\delta(1+\delta))\sqrt{T}\left\|f_{xx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)} \quad (i=1,2). \tag{25}$$

Далее, из (12) и (16), соответственно, получаем:

$$|u_{10}(t)| \le |1+\delta|^{-1}\left(\left\|\varphi(x)\right\|_{L_2(0,1)} + T(1+|\delta|\,|1+\delta|^{-1}|\delta|)\left\|\psi(x)\right\|_{L_2(0,1)}\right)+$$

$$+T\sqrt{T}(2+|\delta|\,(3+|\delta|\,|1+\delta|^{-1}))\left\|f(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}, \tag{26}$$

$$\left\|u'_0(t)\right\| \le |1+\delta|^{-1}\left\|\psi(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{T}(1+|\delta|\,|1+\delta|^{-1})\left\|f(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}. \tag{27}$$

Очевидно, что

$$|u(x,t)| \le \left\|u_0(t)\right\|_{C[0,T]} + (\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-6})^{1/2}\sum_{i=1}^{2}(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\left\|u_{ik}(t)\right\|_{C[0,T]})^2)^{1/2}, \tag{28}$$

$$|u_t(x,t)| \le \left\|u'_0(t)\right\|_{C[0,T]+}(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-6})^{1/2}\sum_{i=1}^{2}(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\left\|u'_{ik}(t)\right\|_{C[0,T]})^2)^{1/2}, \tag{29}$$

$$|u_{tt}(x,t)| \leq \left\|u_0''(t)\right\|_{C[0,T]+} (\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-6})^{1/2} \sum_{i=1}^{2} (\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \left\|u_{ik}''(t)\right\|_{C[0,T]})^2)^{1/2}, \tag{30}$$

$$|u_{xxxx}(x,t)| \leq (\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2})^{1/2} \sum_{i=1}^{2} (\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \left\|u_{ik}(t)\right\|_{C[0,T]})^2)^{1/2}, \tag{31}$$

$$|u_{ttxx}(x,t)| \leq (\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2})^{1/2} \sum_{i=1}^{2} (\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \left\|u_k''(t)\right\|_{C[0,T]})^2)^{1/2}. \tag{32}$$

Из (28)-(32) с учетом (24)-(27) следует, что функции $u(x,t)$, $u_t(x,t)$, $u_{tt}(x,t)$, $u_{xxxx}(x,t)$, $u_{ttxx}(x,t)$ непрерывны в D_T. Непосредственной проверкой убеждаемся , что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3) в обычном смысле.

Д о к а з а т е л ь с т в о   з а в е р ш е н о.
С помощью Леммы 1 доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия Теоремы 1 и*

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = 0, \int_0^1 \psi(x)dx = 0, \int_0^1 f(x,t)dx = 0 \ (0 \leq t \leq T).$$

Тогда функция

$$u(x,t) = -\tfrac{\delta}{1+\delta} \int_0^T \int_0^1 (T(1-\delta(1+\delta)^{-1}) + t - \tau) f(x,t)dxdt + \int_0^t \int_0^1 (t-\tau) f(x,t) dx d\tau +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ \tfrac{1}{\rho_k(T)} \{ (\cos\beta_k t + \delta \cos\beta_k(T-t))\varphi_{1k} \quad + \tfrac{1}{\beta_k}(\sin\beta_k t - \delta \sin\beta_k(T-t))\psi_{1k} -$$
$$- \tfrac{\delta}{\beta_k(1+\alpha\lambda_k^2)} \int_0^T f_{1k}(\tau)(\sin\beta_k(T+t-\tau) + \delta \sin\beta_k(t-\tau))d\tau \Big\} +$$
$$+ \tfrac{1}{\beta_k(1+\alpha\lambda_k^2)} \int_0^t f_{1k}(\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau \Big\} \cos\lambda_k x +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ \tfrac{1}{\rho_k(T)} \{ (\cos\beta_k t + \delta \cos\beta_k(T-t))\varphi_{2k} \quad + \tfrac{1}{\beta_k}(\sin\beta_k t - \delta \sin\beta_k(T-t))\psi_{2k} -$$
$$- \tfrac{\delta}{\beta_k(1+\alpha\lambda_k^2)} \int_0^T f_{2k}(\tau)(\sin\beta_k(T+t-\tau) + \delta \sin\beta_k(t-\tau))d\tau \Big\} +$$
$$+ \frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2)} \int_0^t f_{2k}(\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau \Big\} \sin\lambda_k x$$

является классическим решением задачи (1)- (5).

Докажем единственность решения (1)- (3), (5).

Имеет место теорема.

Теорема 3. *Если* $\delta \neq \pm 1$, *то задача* (1)-(3), (5) *не может иметь более одного решения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что существуют два решения рассматриваемой задачи:

$$u_1(x,t), u_2(x,t)$$

и рассмотрим разность $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$.

Очевидно,что функция $v(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$v_{tt}(x,t) - \alpha v_{ttxx}(x,t) + v_{xxxx}(x,t) = 0 \tag{33}$$

и условиям:

$$v(0,t) = v(1,t), \ v_x(0,t) = v_x(1,t), \ v_{xx}(0,t) = v_{xx}(1,t), v_{xxx}(0,t) = v_{xxx}(1,t) \, (0 \leq t \leq T), \tag{34}$$

$$v(x,0)+\delta v(x,T)=0,\ v_t(x,0)+\delta\, v_t(x,T)=0\ (\,0\le x\le 1\,). \tag{35}$$

Докажем, что функция $v(x,t)$ тождественно равна нулю.

Умножим обе части уравнения (33) на функцию $2v_t(x,t)$ и проинтегрируем полученное равенство по x от 0 до 1 :

$$2\int_0^1 v_{tt}(x,t)v_t(x,t)dx-2\alpha\int_0^1 v_{ttxx}(x,t)v_t(x,t)dx+2\int_0^1 v_{xxxx}(x,t)v_t(x,t)dx=0. \tag{36}$$

Пользуясь граничными условиями (34), имеем:

$$2\int_0^1 v_{tt}(x,t)v_t(x,t)dx=\frac{d}{dt}\int_0^1 v_t^2(x,t)dx;$$

$$\begin{aligned}&2\textstyle\int_0^1 v_{ttxx}(x,t)v_t(x,t)dx=2(v_{ttx}(1,t)v_t(1,t)-v_{ttx}(0,t)v_t(0,t))-\\ &-2\textstyle\int_0^1 v_{ttx}(x,t)v_{tx}(x,t)dx=-\frac{d}{dt}\int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2\textstyle\int_0^1 v_{xxxx}(x,t)v_t(x,t)dx=2(v_{xxx}(1,t)v_t(1,t)-v_{xxx}(0,t)v_t(0,t))-\\ &-2\textstyle\int_0^1 v_{xxx}(x,t)v_{tx}(x,t)dx=-2\int_0^1 v_{xxx}(x,t)v_{tx}(x,t)dx=\\ &=-2(v_{xx}(1,t)v_{tx}(1,t)-v_{xxx}(0,t)v_{tx}(0,t))+2\textstyle\int_0^1 v_{xx}(x,t)v_{txx}(x,t)dx=\frac{d}{dt}\int_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx.\end{aligned}$$

Тогда из (36) имеем:

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 v_t^2(x,t)dx+\frac{d}{dt}\int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx+\frac{d}{dt}\int_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx=0,$$

или

$$y(t)\equiv\int_0^1 v_t^2(x,t)dx+\int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx+\int_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx=C.$$

Отсюда, с учетом (35), получаем:

$$\begin{aligned}&y(0)-\delta^2y(T)=\textstyle\int_0^1(v_t^2(x,0)-\delta^2v_t^2(x,T))dx+\\ &+\textstyle\int_0^1(v_{tx}^2(x,0)-\delta^2v_{tx}^2(x,T))dx+\int_0^1(v_{xx}^2(x,0)-\delta^2v_{xx}(x,T))dx=0.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$y(0)-\delta^2y(T)=C(1-\delta^2)=0.$$

Так как $\delta\neq\pm1$, то $C=0$. Следовательно,

$$\int_0^1 v_t^2(x,t)dx+\int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx+\int_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx\equiv 0.$$

Отсюда заключаем, что

$$v_t(x,t)\equiv 0,\ v_{tx}(x,t)\equiv 0,\ v_{xx}(x,t)\equiv 0,$$

Откуда, с учетом (34) , и следует тождество

$$v(x,t)=const=C_0.$$

Пользуясь нелокальным условием (6), имеем:

$$v(x,0)+\delta v(x,T)=C_0(1+\delta)=0.$$

Следовательно, $C_0=0$, ибо $\delta \neq -1$.
Тем самым доказано, что

$$v(x,t)=0.$$

Таким образом, если существуют два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$задачи (1)-(3),(5), то $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$. Отсюда следует, что если решение задачи (1)-(3),(5) существует, то оно единственное.

Доказательство завершено.
С помощью Леммы 1 из последней теоремы немедленно вытекает единственность исходной задачи (1)-(5).

Теорема 4. *Пусть выполняются условия Теоремы 3 и*

$$\varphi(x)\in C[0,1]\,, \int_0^1 \varphi(x)dx=0, \psi(x)\in C[0,1], \int_0^1 \psi(x)dx=0,$$

$$f(x,t)\in C(D_T), \int_0^1 f(x,t)dx=0 \ (0\leq t\leq T\,).$$

Тогда задача (1)-(5) *не может иметь более одного классического решения.*

Литература

1. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Диф. уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.

2. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math.. 1963. Vol. 5, № 21. pp. 155–160.

3. Ионкин, Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Диф. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.

4. Нахушев А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике померенной влаги и грунтовых вод // Диф. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 72–81.

5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.: ФИЗМАТЛИТ. 1957. Т. 5. 657 с.

6. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: ФИЗМАТЛИТ. 1972. 686 с.

7. Мегралиев Я. Т. О разрешимости одной обратной краевой задачи для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка с дополнительным интегральным условием // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2013. № 1 (25). С. 19-33.

8. Мегралиев Я. Т. Обратная краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с интегральным условием // Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ. 2011. № 5. С. 51–56.

MSC2020 35G16, 35A01, 35A02, 35A09

On a Boundary Value Problem for the fourth-order partial differential equation with the non-local conditions

M. B. Mursalova, T. M. Kasimov
Baku State University

Abstract: One boundary-value problem is investigated for a fourth-order partial differential equation with an integral boundary condition. First, an original problem is reduced to the equivalent problem, the theorem on existence and uniqueness of solution is proved for the latter. Then, using these facts authors prove existence and uniqueness of the classical solution of the original problem.

Keywords: boundary value problem, differential equations, existence of solution, uniqueness of solution, classical solution.

References

1. A. A. Samarsky. ["On some problems of the theory of differential equations"]. Diff. Eq. 1980. Vol. 16, No. 11. pp. 1925-1935. (In Russ.)

2. J. R. Cannon. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. Quart. Appl. Math. 1963. Vol. 5, No. 21. pp. 155–160.

3. N. J. Ionkin. ["Solution of one Boundary Value problem of the Heat Transmission Theory with the non-classic boundary condition"]. Dif. Eq. 1977. Vol. 13, No. 2. pp. 294-304. (In Russ.)

4. A. M. Nakhushev. ["On one approximate method of solution of the Boundary Value problems for differential equations and its approximation for measured moisture dynamics and groundwater"]. Dif. Eq. 1982. Vol. 18, No. 1. pp. 72-81. (In Russ.)

5. V. J. Smirnov. Kurs vysshey matematiki ["Higher Mathematics Course"]. Moscow, FIZMATLIT. 1972. 686 p. (In Russ.)

6. B. M. Budak, A. A. Samarsky, A. N. Tikhonov. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. ["Problems for the Mathematical Physics equations"]. Moscow, FIZMATLIT. 1972. 686 p. (In Russ.)

7. Y. T. Meqraliyev. ["On the solvability of an inverse boundary value problem for a pseudo-hyperboic equation of the 4-th order with the additional integral condition"]. University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences". 2013. No. 1 (25). pp. 19-33. (In Russ.)

8. Y. T. Meqraliyev. ["Inverse boundary value problem for the partial differential equation of the 4-th order with integral condition"]. Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz. 2011. No. 5. pp. 51–56 (In Russ.)