

УДК 517.9

К вопросу о частичной устойчивости нулевого решения нелинейных систем по линейному приближению

Шаманаев П. А., Язовцева О. С.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

В работе рассматривается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x), \quad (1)$$

где $x \in R^n$, A – постоянная $(n \times n)$ -матрица, $f \in C^{(0,1)}([T, +\infty) \times R^n, R^n)$, $f(t, 0) \equiv 0$,

$$|f_j(t, x_1, \dots, x_n)| \leq \psi_j(t, |x_1|, \dots, |x_n|), \quad \forall x \in D, \quad j = \overline{1, n},$$

здесь $\psi_j \in C([T, +\infty) \times U_+, [0, +\infty))$, $U_+ = \{x : x \in D, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}$, $\psi_j(0, \dots, 0) \equiv 0$, $\psi_j(t, |x_1|, \dots, |x_n|) \leq \psi_j(t, |\tilde{x}_1|, \dots, |\tilde{x}_n|)$, $|x_i| \leq |\tilde{x}_i|$, $x, \tilde{x} \in D$, $t \in [T, +\infty)$, D – некоторая область пространства R^n , содержащая окрестность нуля.

Ставится задача об исследовании покомпонентных асимптотических свойств (частичной устойчивости, асимптотической устойчивости, неустойчивости и асимптотического равновесия) нулевого решения системы (1) по линейному приближению

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad (2)$$

где $y \in R^n$.

Основные результаты по теории устойчивости по отношению к части переменных (частичной устойчивости) содержатся в работах А. М. Ляпунова [1], И. Г. Малкина [2], В. В. Румянцева [3], В. В. Румянцева и А. С. Озиранера [4], В. И. Воротникова [5].

Вопросы о сохранении частичной устойчивости нулевого решения по линейному приближению изложены в работе А. С. Озиранера [6], в том числе в критическом случае - И. Г. Малкина [7], А. С. Озиранера [8], В. П. Прокопьева [9].

Для решения поставленной задачи используется подход [10]-[15], заключающийся в установлении локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности между системами (1) и (2). В этом случае, между множествами решений $x(t : t_0, x^{(0)})$ и $y(t : t_0, y^{(0)})$ соответствующих систем (1) и (2) устанавливается соответствие вида

$$x(t : t_0, x^{(0)}) = y(t : t_0, y^{(0)}) - \int_t^{+\infty} Y(t-s)f(s, x(s : t_0, x^{(0)}))ds, \quad (3)$$

где $x^{(0)} \in U$, $y^{(0)} \in V$, $U, V \subseteq D$, $Y(t-t_0)$ – нормированная в нуле фундаментальная матрица системы (2). Существование соотношения вида (3) доказывается с помощью принципа Шаудера о существовании неподвижной точки.

Далее показывается, что соответствие вида (3) сохраняет покомпонентные асимптотические свойства решений в некоторой окрестности нуля при переходе от линейной системы (2) к нелинейной системе (1).

Полученные новые достаточные условия наличия покомпонентных асимптотических свойств решений системы (1), аналогичные соответствующим свойствам решений линейной системы (2), дополняют результаты работ [5], [6], [9] для случая, когда матрица линейного приближения содержит собственные значения с нулевыми вещественными частями, причем алгебраические и геометрические кратности этих собственных значений могут не совпадать.

Литература

1. Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Л.: Изд-во ЛГУ, 1963. 116 с.
2. Малкин И. Г. Об устойчивости движения в смысле Ляпунова // Мат. сб., 1949. Т. 3(61), № 1. С. 63-100.
3. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник Моск. ун-та, сер. мат., мех., астроном., физ., хим. 1957. № 4. С. 9-16.
4. Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных М.: Наука, 1987. 253 с.
5. Воротников В. И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука. 1991. 288 с.
6. Озиранер А. С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 4. С. 659-665.
7. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
8. Озиранер А. С. Об устойчивости движения в критическом случаях // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 415-421.
9. Прокопьев В.П. Об устойчивости движения относительно части переменных в критическом случае одного нулевого корня // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 422-426.
10. Воскресенский Е. В. Методы сравнения в нелинейном анализе. Саранск: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. 224 с.
11. Воскресенский Е. В. Асимптотические методы: теория и приложения. Саранск: СВМО, 2000. 300 с.
12. Язовцева О. С. Локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность и ее применение к исследованию устойчивости по части переменных [Электронный ресурс] // Огарев-online. 2017. № 13. Режим доступа: <http://journal.mrsu.ru/arts/lokalnaya-pokomponentnaya-asimptoticheskaya-ekvivalentnost-i-ee-primeneniye-k-issledovaniyu-ustojchivosti-po-chasti-peremennykh>.
13. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложение к устойчивости по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 19, № 1. С. 102-115.

14. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия полиустойчивости по части переменных нулевого решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, № 3. С. 304–317.
15. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Исследование устойчивости положения равновесия системы динамики биоценоза в условиях межвидового взаимодействия // Вестник Мордовского университета. 2018. Т. 28, № 3. С. 321-332.

MSC2020 34D20

On the question of partial stability of the zero solution of nonlinear systems in the linear approximation

P. A. Shamanaev, O. S. Yazovtseva
National Research Mordovia State University