УДК 512.644

Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений с малым параметром методом Ляпунова-Шмидта в регулярном случае

Шаманаев П. А., Прохоров С. А.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

В работе рассматривается задача о нахождении решений линейного уравнения с возмущением в виде малого линейного слагаемого вида [1], [2]

$$Bx = h + \varepsilon Ax, \tag{1}$$

где $x, h \in R^m$, B и A – $(m \times m)$-постоянные матрицы, ε – малый вещественный параметр.

Предполагается, что для любого достаточно малого ε существует матрица, обратная к матрице $B - \varepsilon A$ (регулярный случай). В этом случае согласно [2] существует полный A- жорданов набор матрицы B и система (1) при достаточно малом ε имеет единственное решение.

Отличительная особенность реализации метода Ляпунова-Шмидта в настоящей работе от изложения, содержащегося в работе [2], заключается в использовании обобщенного жорданова набора сопряженной матрицы B^*.

Алгоритм по реализации метода Ляпунова-Шмидта для решения системы (1):

1. Определить входные данные:

   B, A – постоянные $(m \times m)$-матрицы;

   B^*, A^* – сопряжённые матрицы к B и A, соответственно;

   h – постоянный m-ый вектор;

   ε – малое вещественное число.

2. Найти базис пространства $N(B) = span\left\{\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}\right\}$ как решения уравнения $Bx = 0$.

3. Найти базис пространства $N(B^*) = span\left\{\psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)}, \dots, \psi_n^{(1)}\right\}$ как решения уравнения $B^*y = 0$.

4. Построить A-жорданов набор матрицы B:

   4.1 Для k от 1 до n выполнить цикл

   4.2 $\quad j = 1$;

   4.3 $\quad z_k^{(j)} = A\varphi_k^{(j)}$;

   4.4 $\quad$ Если $(z_k^{(j)}, \psi_s^{(1)}) = 0$ для всех $s = \overline{1, n}$

   то найти $\varphi_k^{(j+1)}$ из уравнения

   $B\varphi_k^{(j+1)} = z_k^{(j)}$;

   $j = j + 1$;

   Переход к пункту 4.3;

   иначе

   $p_k = j$;

   КонецЕсли;

   4.5 Конец цикла по k.

5. Проверить условие полноты A-жорданова набора матрицы B:

5.1 Вычислить элементы матрицы D по формулам

$$d_{ks} = (z_k^{(p_k)}, \psi_s^{(1)}), \quad k, s = \overline{1, n},$$

где $z_k^{(p_k)} = A\varphi_k^{(p_k)}$.

5.2 Если определитель матрицы D равен нулю, то пополнить A-жорданов набор матрицы B до полного [3], [4]. После построения полного A-жорданова набора определитель матрицы D должен быть отличен от нуля.

6. Построить базис $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ биортогональный к $z_1^{(p_1)}, z_2^{(p_1)}, \ldots, z_n^{(p_1)}$:

6.1 Если $d_{ks} = \delta_{ks}$, где δ_{ks} – символ Кронекера, то базисы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ и $z_1^{(p_1)}, z_2^{(p_2)}, \ldots, z_n^{(p_n)}$ являются биортогональными и переходим к пункту 7.

6.2 Найти обратную матрицу D^{-1}.

6.3 Построить новый базис $\hat{\psi}_1$, $\hat{\psi}_2$, …, $\hat{\psi}_n$ по формулам

$$\hat{\psi}_s = \sum_{k=1}^{n} \hat{d}_{ks}\psi_k, \quad s = \overline{1, n},$$

где $\hat{d}_{ks}$ - элементы обратной матрицы D^{-1}.

6.4. В качестве базиса $\psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)}, \ldots, \psi_n^{(1)}$ взять $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \ldots, \hat{\psi}_n$.

7. Построить A^*-жорданов набор матрицы B^*:

7.1 Для s от 1 до n выполнить цикл

7.2 $\quad$ l = 1;

7.3 $\quad \gamma_s^{(l)} = A^*\psi_s^{(l)}$;

7.4 $\quad$ Если $(\varphi_k^{(1)}, \gamma_s^{(l)}) = 0$ для всех $k = \overline{1, n}$,

то найти $\psi_s^{(l+1)}$ из уравнения

$B^*\psi_s^{(l+1)} = \gamma_s^{(l)}$;

$l = l + 1$;

Переход к 7.3;

КонецЕсли;

7.5 Конец цикла по s.

8. Проверить условия биортогональности базисов $\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(1)}$ и $\gamma_1^{(p_1)}, \gamma_2^{(p_2)}, \ldots, \gamma_n^{(p_n)}$

$$(\varphi_k^{(1)}, \gamma_s^{(p_s)}) = \delta_{ks}, \quad k, s = \overline{1, n}.$$

где $\gamma_s^{(p_s)} = A^*\psi_s^{(p_s)}$.

9. Найти коэффициенты c_{sl} по формулам

$$c_{sl} = (h, \psi_s^{(l)}),$$
$$l = \overline{2, p_s}, \quad s = \overline{1, n}.$$

10. Найти величины ξ_k по формулам

$$\xi_k = -\frac{1}{\varepsilon^{p_k}} \sum_{j=2}^{p_k} c_{kj}\varepsilon^{j-1}, \quad k = \overline{1, n}.$$

11. Найти дополнительное слагаемое $y(\varepsilon)$, принадлежащее к дополнению корневого пространства до R^m, как решение уравнения

$$[B - \varepsilon A + \sum_{k=1}^{n} S_k]y = h;$$

где $S_k = z_k^{(p_k)} \cdot \bar{\gamma}_k^{(p_k)}$ - $(m \times m)$-матрицы, $k = \overline{1, n}$.
12. Построить решение системы (1) в виде

$$x(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \varepsilon^{p_k}} \xi_k \sum_{j=1}^{p_k} \varepsilon^{j-1} \varphi_k^{(j)} + y(\varepsilon).$$

Алгоритм по методу Ляпунова-Шмидта был реализован в математическом пакете Maple. Нахождение нулей матриц B, B^*, и присоединенных элементов обобщенных жордановых наборов, организовано в виде библиотек.

Литература

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. УМН. 1960. Т. 15, 3(93). С. 3—80.

2. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука. 1964. 524 с.

3. Логинов Б. В., Русак Ю. Б. Обобщённая жорданова структура аналитической оператор-функции и её роль в теории ветвления. Известия АН УзССР. Ташкент. 1977. 82 с.

4. Логинов Б. В., Русак Ю. Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления, "Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными сб. н. работ, ред. М. С. Салахитдинов, Изд-во "Фан"АН Узб.ССР, Ташкент. 1978. С. 133-148.

MSC2020 15A06

Algorithm for solving systems of linear algebraic equations with a small parameter by the Lyapunov-Schmidt method in the regular case

P. A. Shamanaev, S. A. Prokhorov

National Research Mordovia State University