УДК 519.624

Итеративный метод второго порядка с постоянными коэффициентами для монотонных уравнений в гильбертовом пространстве

Рязанцева И. П.

Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева

Исследована сходимость неявного итеративного метода второго порядка с постоянными коэффициентами для нелинейных монотонных уравнений в вещественном гильбертовом пространстве H.

Пусть (u, v) – скалярное произведение элементов u и v из H, $A : H \to H$ – нелинейный оператор, обладающий свойствами:
а) A – сильно монотонный оператор, т.е. справедливо неравенство

$$(Au - Av, u - v) \geq M\|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in H, \;\; M > 0; \tag{1}$$

б) A удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$\|Au - Av\| \leq L\|u - v\| \quad \forall u, v \in H, \;\; L > 0. \tag{2}$$

Рассмотрим в H уравнение

$$Ax = f, \quad f \in H. \tag{3}$$

В наших предположениях оно имеет единственное решение x в H (см., например, [1], [2]).

Построим в H итеративный процесс второго порядка следующего вида

$$\frac{1}{\tau}\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{\tau}\right) + \lambda\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} + \mu[Ay_n - f] = 0, \quad n = 1, 2, \; \ldots\,, \tag{4}$$

где элементы y_{-1}, y_0 из H задаются, τ, λ и μ – некоторые положительные постоянные. Методы вида (4) рассматривались ранее в предположении, что $\lambda = \lambda_n$, $\tau = \tau_n$, где $\{\lambda_n\}$ и $\{\tau_n\}$ – бесконечно малые последовательности (см., например, [3], регуляризованный вариант в [4]).

Уравнение (4) перепишем в следующем виде

$$\mu\tau Ay_n + \left(\frac{1}{\tau} + \lambda\right) y_n = \mu\tau f + \frac{2y_{n-1} - y_{n-2}}{\tau} + \lambda y_{n-1}. \tag{5}$$

Таким образом, для нахождения элемента y_n при любом $n \geq 1$ имеем уравнение с сильно монотонным непрерывным оператором. Следовательно (см., например, [1], [2]), элемент y_n определяется из (4) однозначно при всех $n \geq 1$.

Построим оценки сверху для решений разностных числовых неравенств первого и второго порядка.

Всюду далее $\{\omega_k\}$ и $\{b_k\}$ – последовательности неотрицательных чисел, τ – положительное число.

Справедливо утверждение (см. [5]).

Лемма 1. *Пусть члены последовательности $\{\omega_k\}$ удовлетворяют разностному неравенству первого порядка вида*

$$\frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{\tau} - d\omega_k \le b_k, \qquad d < 0, \quad b_k \ge 0,$$

где элемент $\omega_0 \ge 0$ задаётся, тогда

$$\omega_k \le \omega_0 \mathrm{exp}(-ck) + \tau \sum_{i=1}^{k} b_i \mathrm{exp}(c(i-k)), \quad k \ge 1, \qquad c = \frac{d\tau}{d\tau - 1}. \tag{6}$$

Пусть теперь члены последовательности $\{\omega_n\}$ удовлетворяют разностному неравенству второго порядка следующего вида

$$\frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{\tau}(1 + p\tau) - \frac{\omega_{k-1} - \omega_{k-2}}{\tau} + \tau\omega_k \le b_k\tau, \quad k \ge 1, \tag{7}$$

где $\tau_0 > 0$, и неотрицательные значения ω_0 и ω_{-1} задаются, p и q – некоторые действительные числа.

Лемма 2. *Пусть p и q в (7) таковы, что уравнение $s^2 + ps + q = 0$ имеет различные отрицательные корни d_1 и d_2. Тогда имеет место оценка*

$$\omega_k \le \omega_0 \mathrm{exp}(-h_2 k) +$$
$$+\tau \sum_{i=1}^{k} \left[|u_0| \mathrm{exp}(-h_1 i) + \tau \sum_{j=1}^{i} b_j \mathrm{exp}(h_1(j-i)) \right] \mathrm{exp}(h_2(i-k)),$$

где

$$h_j = \frac{d_j\tau}{d_j\tau - 1}, \;\; j = 1, 2.$$

Таким образом, для неотрицательных решений разностного числового неравенства второго порядка установлена оценка сверху. Эта оценка используется при доказательстве сходимости изучаемого итеративного метода (4). Достаточные условия сходимости предложенного метода включают некоторые соотношения, связывающие параметры, определяющие свойства (1) и (2) оператора решаемого уравнения, и коэффициенты разностного уравнения второго порядка, определяющего изучаемый метод, и имеют вид

$$q > 0, \quad p^2 - 4q > 0,$$

где

$$p = \lambda + 3\lambda_1\mu L\alpha_1\tau^2, \quad q = 2M\mu\tau - 4\lambda_1\mu L\alpha_1\tau^2, \;\; \alpha_1 > 1, \quad \lambda_1 = \frac{1}{1 - \mathrm{exp}(-\tilde{\mu}_1)},$$

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1\tau + 1}, \;\; \mu_1 = 2\lambda - \mu L.$$

Параметрическое обеспечение предложенного метода подтверждено примером. Предложенный метод второго порядка с постоянными коэффициентами имеет лучшую оценку сверху скорости сходимости по сравнению с тем же методом с переменными коэффициентами, который изучался ранее [3, 4].

Литература

1. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 416 с.

2. Alber Ya., Ryazantseva I. Nonlinear ill-posed problems of monotone type. Dordrecht: Springer, 2006. 410 p.

3. Рязанцева И.П. Итеративные процессы второго порядка для монотонных включений в гильбертовом пространстве // Изв. вузов. Математика. 2013. № 7. С. 52-61.

4. Рязанцева И.П. Метод второго порядка для аккретивных включений в банаховом пространстве //Дифференц. уравнения. 2014. Т.50, № 9. С. 1264-1275.

5. Апарцин А.С. К построению сходящихся итерационных процессов в гильбертовом пространстве// Труды по прикладной математике и кибернетике. Иркутск: Иркутский университет, 1972. С. 7-14.

MSC2020 65J15

Continuous method of second order with constant coefficients for monotone equations in Hilbert space

I. P. Ryazantseva
Nizhny Novgorod State Tehnical University after R. E. Alekseev