

УДК 519.853.4

## Об особенностях целевой функции в задаче оценивания параметра квадратичного отображения \*

Николаева Н. Г., Шелудько А. С.

Южно-Уральский государственный университет

Одним из классов математических моделей временных процессов являются одномерные отображения вида

$$x_k = f(x_{k-1}, \lambda), \quad (1)$$

где  $x_k$  – переменная состояния;  $\lambda$  – параметр модели;  $k$  – номер временного шага. Некоторые нелинейные отображения при определенных значениях параметра  $\lambda$  могут порождать последовательности  $x_0, x_1, x_2, \dots$  со сложным, нерегулярным поведением [1]. Такие отображения, а также порожденные ими временные процессы, называются хаотическими [2]. Одним из самых известных примеров является квадратичное отображение

$$x_k = \lambda x_{k-1}(1 - x_{k-1}), \quad (2)$$

которое является хаотическим при  $x_0 \in (0; 1)$  и  $\lambda \in (3,569945\dots; 4]$ . Сложная динамика хаотического отображения отражается в различных аналитических характеристиках, таких как бифуркационная диаграмма, показатель Ляпунова, спектральная плотность, автокорреляционная функция [1, 3]. С точки зрения вычислительных методов, сильная чувствительность реализации отображения (1) к малым изменениям начального условия  $x_0$  и параметра  $\lambda$  проявляется в многоэкстремальности целевой функции при решении задачи оценивания параметров моделей хаотических процессов [4, 5].

В данной работе рассматривается задача оценивания параметра  $\lambda$  отображения (1) по зашумленным измерениям

$$y_k = x_k + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

где  $v_k$  – ошибки измерений;  $N$  – число измерений. В рассматриваемой задаче неизвестным также является начальное условие  $x_0$ , от которого неявно зависит значение переменной состояния  $x_k$  в момент времени  $k$ :

$$x_k = \underbrace{f(f(f \dots f(x_0, \lambda) \dots))}_k = f^k(x_0, \lambda).$$

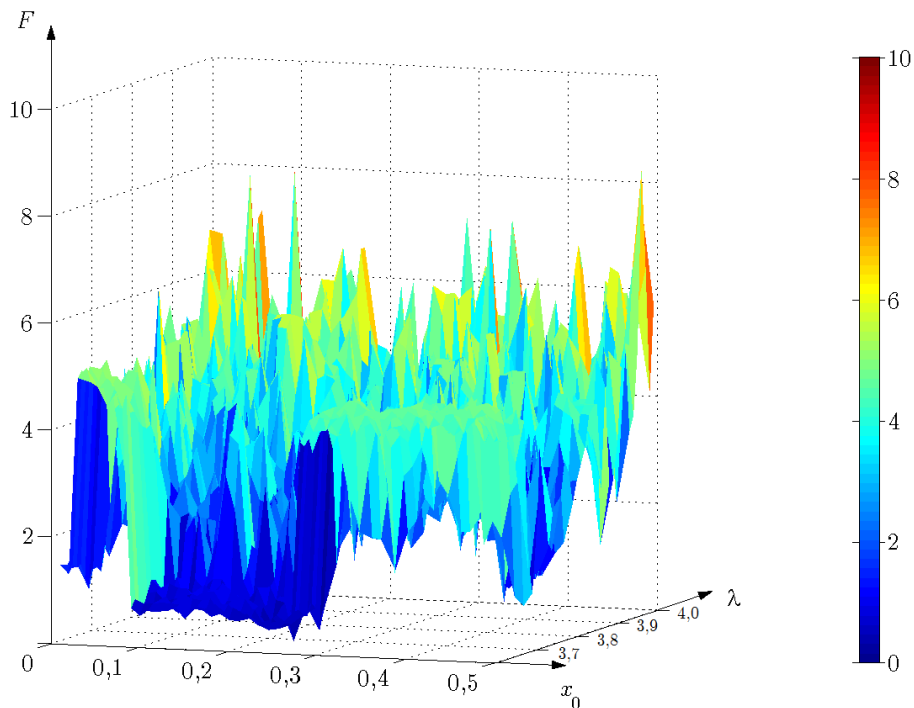
Решение задачи оценивания в рамках оптимизационного подхода основано на поиске глобального минимума целевой функции, которая определяет меру близости реализации отображения (1) к измеряемым значениям (3). Например, при применении метода наименьших квадратов целевая функция имеет вид:

$$F(x_0, \lambda) = (y_1 - f(x_0, \lambda))^2 + (y_2 - f(f(x_0, \lambda), \lambda))^2 + \dots = \sum_{k=1}^N (y_k - f^k(x_0, \lambda))^2. \quad (4)$$

В силу относительной простоты и отсутствия требований к свойствам отображения (1) метод наименьших квадратов остается самым распространенным методом оценивания параметров [6]. Однако следует также отметить исследования [7, 8], в которых используются другие варианты целевых функций.

---

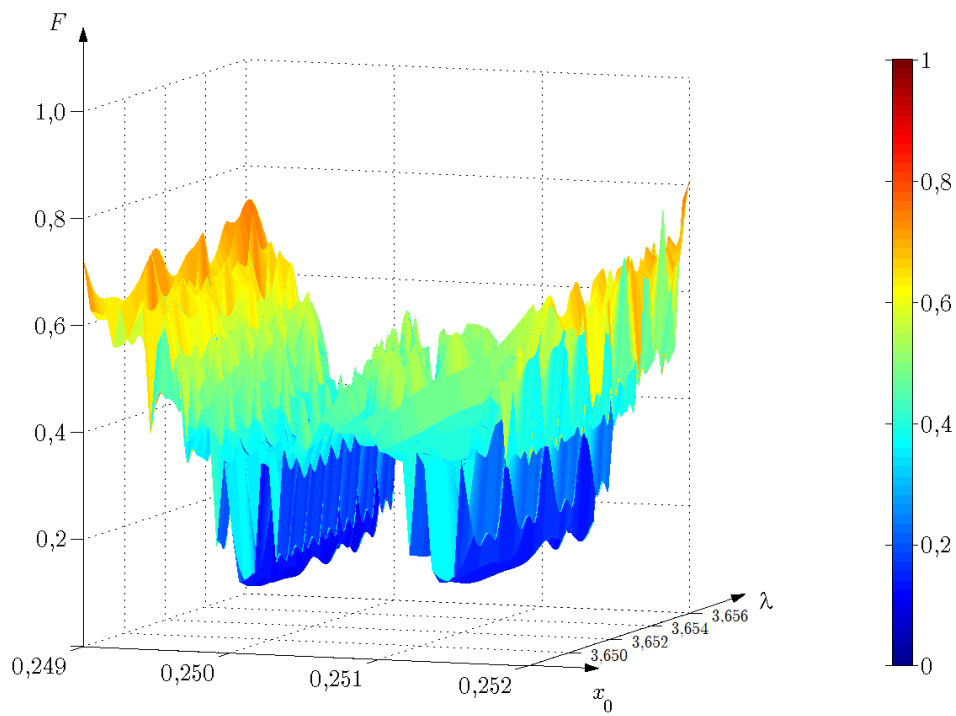
\*Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.А03.21.0011.



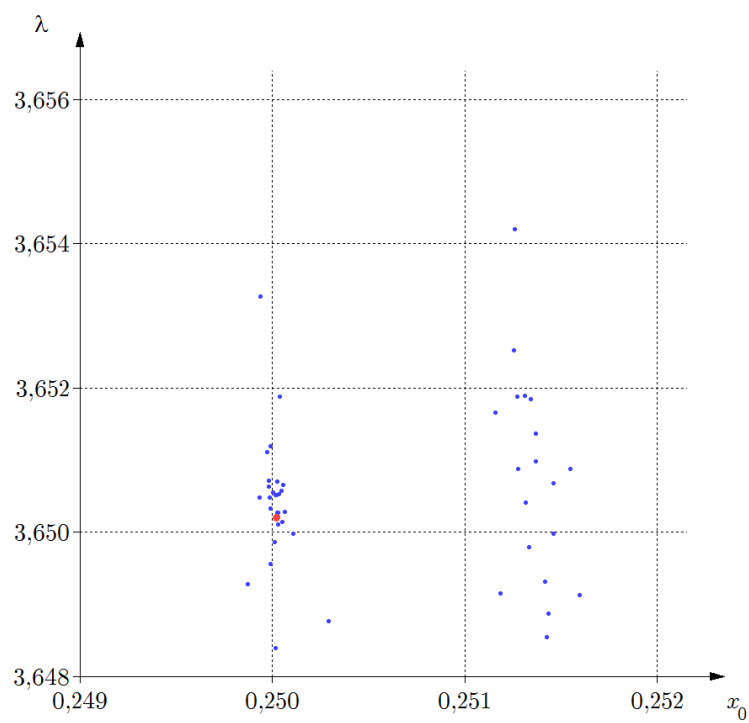
**Рис. 1.** Целевая функция в задаче оценивания параметра квадратичного отображения.

На рис. 1 показан пример целевой функции (4) в задаче оценивания параметра  $\lambda$  квадратичного отображения (2). В рассматриваемом примере истинное значение параметра  $\lambda^* = 3,65$ , начальное условие  $x_0^* = 0,25$ . Значения ошибок измерений  $v_k$  получены с помощью генератора псевдослучайных чисел с нормальным распределением, нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением  $\sigma = 0,05$  (используется функция *randn* из стандартной библиотеки *Matlab*). При построении графика на рис. 1 шаг изменения переменных  $\Delta = 10^{-2}$ . В данном масштабе целевая функция визуально имеет негладкий «рельеф» и только несколько точек локального экстремума, которые являются кандидатами на выбор в качестве точки глобального минимума. На самом деле функция (4) является дифференцируемой, а в окрестности точки  $(x_0^*, \lambda^*)$  расположено много близких по значению функции локальных экстремумов. Это можно увидеть на рис. 2, где шаг изменения переменных  $\Delta = 5 \cdot 10^{-5}$ .

Указанные особенности целевой функции влияют на результаты вычислительных методов. Одним из алгоритмов глобальной оптимизации, который часто используется при решении задачи оценивания параметров моделей хаотических процессов, является метод роя частиц [9, 10]. Алгоритм основан на рассмотрении множества частиц, которые перемещаются по индивидуальным траекториям в пространстве переменных целевой функции (4). Каждая частица хранит информацию о своем наилучшем положении – точке траектории, в которой значение функции было минимальным. Между частицами также происходит обмен информацией о наилучшем положении среди всех частиц – точке, которая принимается за приближение к точке глобального минимума (в рассмотренном примере  $\hat{x}_0 = 0,25002119$ ,  $\hat{\lambda} = 3,65020120$ ). На рис. 3 показаны наилучшие положения частиц после  $M = 10^3$  итераций, которые как видно находятся в окрестности двух вытянутых «впадин» целевой функции. Данные особенности целевой функции целесообразно учитывать при разработке алгоритма поиска глобального минимума.



**Рис. 2.** Целевая функция в окрестности глобального минимума.



**Рис. 3.** Наилучшие положения частиц в методе роя частиц (красной точкой обозначено найденное решение задачи минимизации целевой функции).

## Литература

1. Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Основы теории сложных систем. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. 620 с.
2. Аникин В. М., Голубенцев А. Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М.: Физматлит, 2007. 328 с.
3. Ширяев В. И. Финансовые рынки. Нейронные сети, хаос и нелинейная динамика. М.: Либроком, 2009. 232 с.
4. Елсаков С. М., Ширяев В. И. О многоэкстремальности в задачах оценивания состояния систем детерминированного хаоса // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2009. № 3. С. 37-41.
5. Шелудько А. С. Гарантированное оценивание параметров дискретных моделей хаотических процессов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Вычислительная математика и информатика». 2018. Т. 7, № 1. С. 25-39.
6. Безручко Б.П., Смирнов Д.А. Современные проблемы моделирования по временным рядам // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2006. Т. 6, № 1-2. С. 3-27.
7. Смирнов Д. А., Власкин В. С., Пономаренко В.И. Метод оценки параметров одномерных отображений по хаотическим временным рядам // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, № 3. С. 18-26.
8. Jafari S., Sprott J.C., Pham V.-T., Golpayegani S., Jafari A. A New Cost Function for Parameter Estimation of Chaotic Systems Using Return Maps as Fingerprints. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. Vol. 24, № 10.
9. He Q., Wang L., Liu B. Parameter estimation for chaotic systems by particle swarm optimization. Chaos, Solitons & Fractals. 2007. Vol. 32, № 2. P. 654-661.
10. Карпенко А. П., Селиверстов Е. Ю. Глобальная оптимизация методом роя частиц. Обзор // Информационные технологии. 2010. № 2. С. 25-34.

MSC2020 90C26

## Some features of the cost function in the parameter estimation problem for the logistic map

N. G. Nikolaeva, A. S. Sheludko  
South Ural State University