УДК 519.6

Построение гибридных численных потоков для решения уравнений Эйлера *

Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

Численное моделирование сверхзвукового обтекания твердых тел представляет собой незаменимый инструмент для проектирования авиационно-космической техники. Ударные волны, которые формируются в сверхзвуковых потоках, создают некоторые вычислительные проблемы, которые увеличивают сложность моделирования: снижение порядка точности, проблемы сходимости, возникновение неустойчивостей. Одной из таких наиболее изученных неустойчивостей является возникновение «карбункула», которая влияет на профиль фронта ударной волны и деформирует его [1,2]. Эта неустойчивость, может резко повлиять на численное моделирование головной ударной волны перед носовой частью летательного аппарата.

Как известно, на возникновение неустойчивости карбункула влияют используемые численные потоки. В работе [2] проведено сравнение различных численных потоков и показано, что наиболее подвержены возникновению этой неустойчивости потоки, обладающие низкой диссипацией, а использование высоко диссипативных потоков позволяют избежать возникновения карбункула. С другой стороны, высокая диссипация приводит к понижению точности расчетной схемы. По этой причине было предпринято несколько попыток разработки новых методов, подавляющих развития неустойчивостей, при этом обеспечивают низкую диссипацию [3–6].

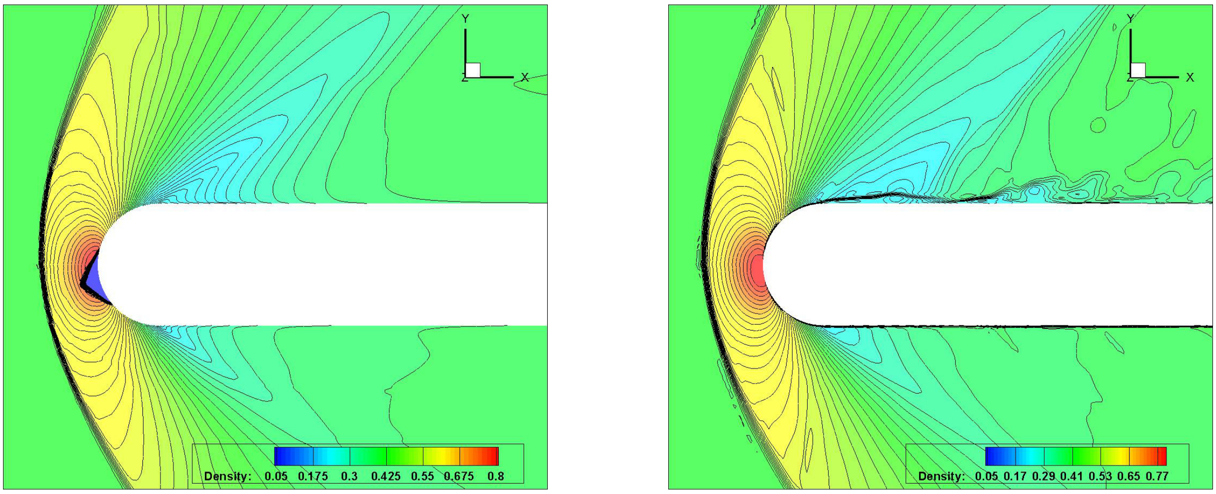
В настоящей работе предлагается новый гибридный численный поток для вычисления потоков Эйлеровой части системы уравнений Навье-Стокса, который позволяет избежать возникновения неустойчивости и сохраняет высокую точность на ударных волнах и пограничных слоях. Данный поток, представляет собой комбинацию численного потока Годунова [7] и численного потока Русанова-Лакса-Фридрихса [8,9]. Проведено тестирование данного алгоритма при численном моделирование сверхзвукового обтекания крылатой ракеты Tomahawk. Проведена серия численных расчетов обтекания сверхзвуковым вязким потоком с числом Рейнольдса $Re = 1.104E + 07$, с числом Маха в набегающем потоке $M_\infty = 1,\ 3$, угол атаки $\alpha = 5°$. Вычислительная область представляет собой структурированную сетку с $N = 1.1E + 07$ элементами. Расчеты выполнялись программным комплексом DG3D [10].

При моделировании данной задачи разрывным методом Галеркина второго порядка точности с численным потоком HLLC [11] было обнаружено развитие неустойчивости. В носовой части летательного аппарата возникала область вакуума (рис. 1a) в виде клина, перпендикулярная направлению набегающего потока, которая возрастала со временем, искривляла ударную волну и приводила к разваливанию расчета на достаточно раннем временном моменте.

Происхождение данного вида неустойчивости мы связываем с происхождением, аналогичным возникновению карбункула [2]: высокие числа Рейнольдса, порядка 10^7, низко диссипативный поток HLLC, первый порядок точности схемы. Несмотря на то, что расчет проводился разрывным методом Галеркина второго порядка, но, как известно, в области за фронтом ударной волны порядок схемы может падать до первого порядка [11]. При расчете

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 20-01-00578-а.

с численным потоком Русанова-Лакса-Фридрихса (RLF) такой неустойчивости не возникло (рис. 1б), но высокая диссипативность потока создала более размытые области.



а) численный поток HLLC; б) численный поток RLF.

Рис. 1. Распределение поля плотности.

Далее были проведены два расчета с новыми гибридными численными потоками (рис. 2). Первый поток представляет собой линейную комбинацию высокоточного потока Годунова (Godunov) и устойчивого потока Русанова-Лакса-Фридрихса

$$\hat{F} = \theta F^{\text{Godunov}} + (1-\theta) F^{\text{RLF}}.$$

Где

$$\theta = \begin{cases} \frac{|\mathbf{\Delta u} \cdot n|}{|\mathbf{\Delta u}|} = \frac{|\Delta u n_x + \Delta v n_y + \Delta w n_z|}{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2}}, & |\mathbf{\Delta u}| > \varepsilon, \\ 1, |\mathbf{\Delta u}| \leq \varepsilon \end{cases}$$

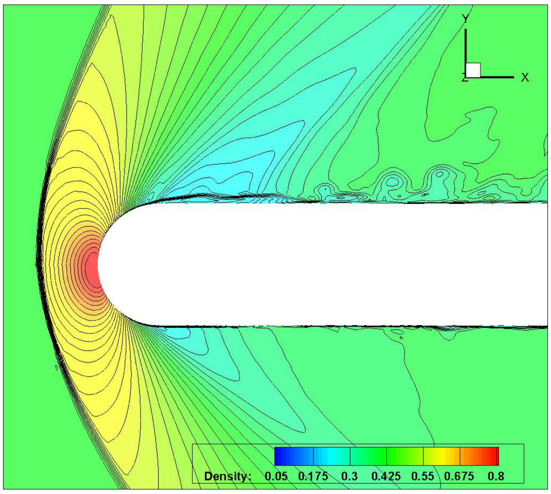
где ε - малая константа, чтобы избежать деления на ноль (например, $\varepsilon = 10^{-6}$), n - нормаль к границе ячейки, а Δu - скачок вектора скорости через границу. Параметр θ вычисляется из нормали к границе ячейки и скачка скорости через поверхность границы ячейки. Направление скачка скорости определяет нормаль к ударной волне: когда граница ячейки совпадает с фронтом ударной волны, используется поток Годунова, а когда граница раздела перпендикулярна ударной волне, применяется поток RLF. Таким образом, увеличивается диссипация в направлении, совпадающим с ударной волной, и устраняется неустойчивость. Алгоритм является локальным и может быть легко реализован в разрывном методе Галеркина. Поскольку стоимость потока RLF значительно ниже по сравнению с потоком Годунова, предлагаемый гибридный подход не увеличивает значительно вычислительные затраты по сравнению с исходным потоком Годунова. Однако надежность значительно улучшена. Иной подход к построению гибридного потока заключается в добавлении диссипативного члена в областях где это необходимо.

$$\hat{F} = \frac{F^{\text{Godunov}}\left(U^{+}\right) + F^{\text{Godunov}}\left(U^{-}\right)}{2} - W\frac{U^{+} + U^{-}}{2}.$$

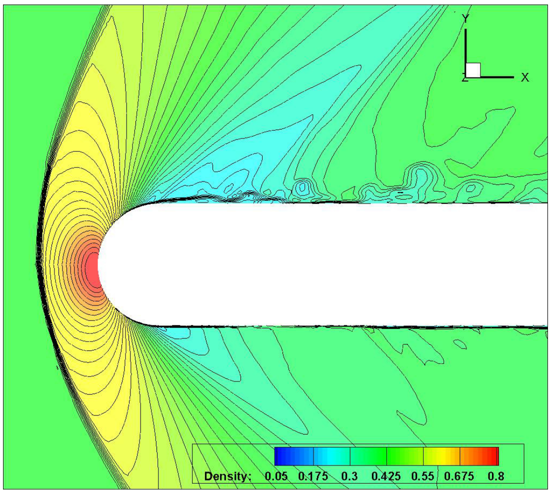
$$W = \theta W^{*}, W^{*} = max\left(|u_n + c|, |u_n - c|\right)$$

где W^{*} - максимум собственных значений матрицы $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{A_n} = \frac{dG}{dU}$, $G = F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z$, U - вектор консервативных переменных, F - вектор потоковых функций в уравнении

Эйлера, θ – параметр, определенный выше, W - скорость, вдоль которой решается задача Римана в численном потоке Годунова.



а) численный поток 1 типа;



б) численный поток 2 типа.

Рис. 2. Распределение поля плотности.

Оба предложенных потока показали устойчивую работу при расчетах, позволили избежать возникновения неустойчивостей, сохранили точность и структуру ударной волны и показали хорошую точность решения в пограничном слое.

Литература

1. Родионов А. В. Искусственная вязкость для подавления ударно-волновой неустойчивости в схемах типа Годунова повышенной точности Препринт / ФГУП "Российский федеральный ядерный центр ВНИИЭФ"116-2018.

2. Pandolfi M., D'Ambrosio D. Numerical Instabilities in Upwind Methods: Analysis and Cures for the “Carbuncle” Phenomenon. Journal of Computational Physics. 2001. vol. 166. pp. 271-301.

3. Nishikawa H., Kitamura K. Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers. Journal of Computational Physics. 2008. vol. 227, No 4. pp. 2560-2581.

4. Guo S., Tao W.-Q. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals. 2018. vol. 73, pp. 33-47.

5. Hu L. J., Yuan L. A robust hybrid hllc-force scheme for curing numerical shock instability. Applied Mechanics and Materials. 2014. vol. 577. pp. 749–753.

6. Ferrero A., D'Ambrosio D. An Hybrid Numerical Flux for Supersonic Flows with Application to Rocket Nozzles. 17th International conference of numerical analysis and applied mathematics, 23-28 september 2019, Rhodes, Greece.

7. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник, 1959. Т.47(89), №3, с. 271-306.

8. В. В. Русанов. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // Журнал вычислительной математ. и математ. физики, 1961. Т.I, №2. с.267-279.

9. Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1954. vol. 7, №1, pp.159-193.

10. Краснов М. М., Кучугов П. А., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф. Разрывный метод Галёркина на трёхмерных тетраэдральных сетках. Использование операторного метода программирования, Матем. моделирование. 2017. Т. 29:2. с. 3-22.

11. Toro E F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Springer, Third Edition, 2010 HLLC.

12. Ладонкина М. Е. Неклюдова О. А., Остапенко В. В., Тишкин В. Ф. О точности разрывного метода Галеркина при расчете ударных волн, ЖВМиМФ. 2018. Т. 58, № 8. С. 148-156.

MSC2020 35Q30, 76N15

Construction of hybrid numerical fluxs to solve the Euler equations

M. E. Ladonkina, V. F. Tishkin

Keldysh Institute of Applied Mathematics