УДК 539.376

Моделирование ползучести стержня, находящегося в агрессивной среде*

Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), МАИ

Рассматривается диффузионный процесс в длинном металлическом стержне прямоугольного поперечного сечения, который погружен в агрессивную среду с концентрацией $c(x,t)$. Ширина сечения значительно превосходит его толщину $2H$, так что влиянием диффузии со стороны узких сторон прямоугольника можно пренебречь. Также предполагается, что длина стержня во много раз превосходит его поперечные размеры, поэтому влияние продольной координаты стержня на диффузионный процесс тоже можно не учитывать. Координата x направлена вдоль толщины стержня таким образом, что значения $x = 0$ и $x = 2H$ соответствуют широким сторонам стержня. Из условия симметрии рассматривается только половина стержня $0 \le x \le H$. Пусть c_0 - концентрация агрессивной среды на границе с металлом. При моделировании взаимодействия конструкции с агрессивной средой важно знать как распространяется агрессивный фронт. Однако уравнение диффузии, является уравнением параболического типа и движение этого фронта не оисывает. Процесс диффузии будет моделироваться волновым уравнением гиперболического типа, описывающим движение тепловой волны [1]

$$\tau_r c_{tt} + c_t = D c_{xx}, \tag{1}$$

где $c = c(x,t)$ - концентрация агрессивной среды; τ_r - время релаксации; D - коэффициент диффузии окружающей среды в исходный материал; t - время. Индексы при функции c определяют частные производные. Перепишем уравнение (1) в безразмерной форме:

$$U_{TT} + 2b_1 U_T = U_{XX}, \tag{2}$$

где $U = \frac{c}{c_0}$; $X = \frac{x}{H}$; $T = \frac{t}{H}\sqrt{\frac{D}{\tau_r}}$; $b_1 = \frac{H}{2\sqrt{D\tau_r}}$.

Теперь вернемся к старым обозначениям уравнения (1) с заменой $U(x,t) = c(x,t)$. В этом случае уравнение (2) примет вид

$$c_{tt} + 2b_1 c_t = c_{xx}. \tag{3}$$

Полагаем, что в начальный момент времени внутри образца агрессивная среда отсутствует, а на границах стержня ее концентрация остается постоянной. Тогда начальные условия будут однородными:

$$c(x,0) = 0, \quad c_t(x,0) = 0, \tag{4}$$

а краевые примут вид

$$c(0,t) = 1, \quad c_x(1,t) = 0. \tag{5}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 19-08-00718 а, 18-38-00424 мол а.

Применяя метод разделения переменных Фурье, получаем аналитическое решение задачи (3)-(5):

$$c(x,t) = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{k_2 e^{k_1 t} - k_1 e^{k_2 t}}{(2n+1)(k_1 - k_2)} \sin \lambda_n x - \right. \\ \left. - e^{-b_1 t} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n^2 - b_1^2} \cos \sqrt{\lambda_n^2 - b_1^2}\, t + b_1 \sin \sqrt{\lambda_n^2 - b_1^2}\, t}{(2n+1)(b_1 + \sqrt{\lambda_n^2 - b_1^2})} \sin \lambda_n x \right), \tag{6}$$

где $\lambda_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ -собственные значения задачи; $k_1 = -b_1 + \sqrt{b_1^2 - \lambda_n^2}, k_2 = -b_1 - \sqrt{b_1^2 - \lambda_n^2}$ - корни характеристического уравнения; N - целая часть числа $\frac{b_1}{\pi} - \frac{1}{2}$.

Теперь можно рассмотреть ползучесть стержня, помещенного в агрессвную среду, распространение концентрации которой в образце определяется выражением (6). Процесс ползучести будем моделировать следующей системой уравнений [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varepsilon^c}{\partial t} = \gamma^c \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial t} = \dfrac{B}{A}\gamma^c, \end{cases} \tag{7}$$

где ε^c-деформация ползучести, ω-параметр поврежденности, γ^c-скорость деформации ползучести

$$\gamma^c = \frac{A\sigma_0^n e^{bc(x,t)}}{(1 - X(t))^n \omega(x,t)^n (1 - \omega(x,t))^n}. \tag{8}$$

Здесь A, B, n, b-параметры ползучести, причем безразмерные значения A, B удовлетворяют равенствам $A = \sqrt{\frac{\tau_r}{D}} H\sigma_b^n \bar{A}$, $B = \sqrt{\frac{\tau_r}{D}} H\sigma_b^n \bar{B}$, $x = \frac{\bar{x}}{H}$, $\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_b}$, $t = \sqrt{\frac{D}{\tau_r}} \frac{\bar{t}}{H}$, σ_0-растягивающее стержень начальное безразмерное напряжение, σ_b-предел прочности материала стержня. Черточкой сверху помечены размерные величины. $X(t)$-безразмерная координата фронта разрушения, удовлетворяющая уравнению

$$\omega(X(t), t) = 1. \tag{9}$$

Из-за разрушения стержня осевое безразмерное напряжение будет изменяться по закону

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0}{1 - X(t)}.$$

Систему (7) следует интегрировать при нулевых начальных условиях:

$$\varepsilon^c(x,0) = 0, \quad \omega(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1. \tag{10}$$

В силу симметрии должны выполняться следующие условия:

$$\varepsilon_x^c(1,t) = 0, \quad \omega_x(1,t) = 0.$$

Параметр поврежденности должен удовлетворять уравнению

$$\int_0^{\omega} \omega^n (1-\omega)^n d\omega = B\sigma_0^n \int_0^t \frac{e^{bc(x,t)}}{(1 - X(t))^n} dt. \tag{11}$$

В качестве времени разрушения стержня принимаем значение $t = t_*$, при котором либо безразмерное напряжение σ, либо координата фронта разрушения $X(t)$, принимают значение равное единице.

В течение первой стадии ползучести $0 \leq t \leq t_1$ координата фронта разрушения остается неизменной: $X(t) = 0$. Разрушение материала впервые наступит в том месте, где функция $c(x,t)$ максимальна. В случае граничного условия $c(0,t) = 1$ максимальное значение концентрации достигается при $x = 0$. Подставляя из выражения (6) в (11) функцию $c(0,t)$ при $X(t) = 0$, получаем выражение для вычисления времени скрытой стадии разрушения t_1

$$\int_0^1 \omega^n (1-\omega)^n d\omega = B\sigma_0^n \int_0^{t_1} e^{bc(0,t)} dt.$$

При $t = t_1$ поверхностный слой стержня разрушается и возникает фронт разрушения $X(t)$, перемещающийся от внешней поверхности стержня к его осевому сечению $x = 1$. На фронте разрушения параметр поврежденности принимает значение (9).

Таким образом, проблема состоит в решении уравнений (7)- (9) при условии (10).

Приближенный процесс ползучести стержня при малых деформациях вплоть до его разрушения описан в монографии [3].

Литература

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Гос. изд-во техн-теор. лит. 1952. 392 с.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М:. Физматлит, 2016. 503 с.

MSC2020 65N20, 74A45

Modeling the creep of a bar in an aggressive environment

E. B. Kuznetsov, S. S. Leonov

Moscow Aviation Institute (National Research University)