УДК 517.938.5

Построение энергетической функции Морса-Ботта для регулярных топологических потоков*

Зинина С. Х.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Функцией Ляпунова динамической системы, заданной на замкнутом топологическом многообразии M^n называется непрерывная функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$, которая постоянна на каждой цепной компоненте системы и убывает вдоль её орбит вне цепно рекуррентного множества. В силу результатов Ч. Конли [1], функция Ляпунова существует для любой динамической системы, а сам факт существования носит название "Фундаментальная теорема динамических систем". Критическими значениями функции φ Ч. Конли назвал числа, принадлежащие образу цепно рекуррентного множества. Однако для гладкой функции ее критическим значением принято называть образ критической точки (точки, где градиент функции обращается в ноль), которая, вообще говоря, не обязана принадлежать цепно рекуррентному множеству. В связи с чем, наряду с функцией Ляпунова, в гладкой категории используется понятие *энергетической функции*, то есть гладкой функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством системы.

Первые результаты по построению энергетической функции принадлежат С. Смейлу [2], который в 1961 году доказал существование энергетической функции Морса у градиентно-подобных потоков. К. Мейер [3] в 1968 году обобщил этот результат, построив энергетическую функцию Морса-Ботта для произвольного потока Морса-Смейла. В работе [4] О. В. Починкой и С. Х. Зининой рассматривались топологические потоки с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством на замкнутых поверхностях и было доказано, что они обладают энергетической (непрерывной) функцией Морса.

Введем класс G непрерывных потоков f^t на M^n, обобщающих понятие потоков Морса-Смейла. Такие потоки имеют гиперболическое (в топологическом смысле) цепно рекуррентное множество R_{f^t}, состоящее из конечного числа орбит (*цепных компонент*). Каждая неблуждающая орбита является либо неподвижной точкой, либо периодической орбитой $\mathcal{O}$, для которой корректно определено понятие устойчивого $W^s_{\mathcal{O}}$ и неустойчивого $W^u_{\mathcal{O}}$ многообразий. Можно доказать, что цепные компоненты рассматриваемых потоков не образуют циклов и, следовательно, могут быть полностью упорядочены $O_1 \prec \dots \prec \mathcal{O}_k$ с сохранением отношения Смейла: $W^s_{\mathcal{O}_i} \cap W^u_{\mathcal{O}_j} \neq \emptyset \Rightarrow i < j$.

Верна следующая теорема, устанавливающая основные динамические свойства потоков из класса G.

Теорема 1. *Пусть $f^t \in G$. Тогда*

1) $M = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^u_{\mathcal{O}_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^s_{\mathcal{O}_i}$;

2) Для любой неподвижной точки $\mathcal{O}_i$ существует число $\lambda_i \in \{0, \dots, n\}$ (индекс Морса точки $\mathcal{O}_i$) такое, что ее неустойчивое многообразие $W^u_{\mathcal{O}_i}$ является топологическим подмногообразием многообразия M, гомеоморфным $\mathbb{R}^{\lambda_i}$ и устойчивое многообразие $W^s_{\mathcal{O}_i}$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931, работа также поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «Базис» (проект 19-7-1-15-1) и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20-31-90069.

является топологическим подмногообразием многообразия M, гомеоморфным $\mathbb{R}^{n-\lambda_i}$;

3) Для периодической орбиты $\mathcal{O}_i$ существует число $\lambda_i \in \{0, \dots, n-1\}$ (индекс Морса орбиты $\mathcal{O}_i$) и пара чисел $\mu_i, \nu_i \in \{-1, +1\}$ (тип орбиты $\mathcal{O}_i$) такие, что ее неустойчивое многообразие $W^u_{\mathcal{O}_i}$ является топологическим подмногообразием многообразия M, гомеоморфным $\mathbb{R}^{\lambda_i} \times \mathbb{S}^1$ для $\mu_i = +1$ и $\mathbb{R}^{\lambda_i} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ для $\mu_i = -1$; устойчивое многообразие $W^s_{\mathcal{O}_i}$ является топологическим подмногообразием многообразия M, гомеоморфным $\mathbb{R}^{n-\lambda_i} \times \mathbb{S}^1$ для $\nu_i = +1$ и $\mathbb{R}^{n-\lambda_i} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ для $\nu_i = -1$;

4) $(cl(W^u_{\mathcal{O}_i}) \setminus W^u_{\mathcal{O}_i}) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} W^u_{\mathcal{O}_j}$; $(cl(W^s_{\mathcal{O}_i}) \setminus W^s_{\mathcal{O}_i}) \subset \bigcup\limits_{j=i+1}^{k} W^s_{\mathcal{O}_j}$.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 2. *Каждый поток $f^t \in G$ обладает энергетической функцией Морса-Ботта, критические точки которой либо являются невырожденными, либо имеют степень вырождения 1.*

Литература

1. Conley C. Isolated invariant sets and the Morse index. CBMS Regional Conference Series in Math. Vol. 38. Providence, RI: AMS. 1978.

2. Smale S. On gradient dynamical systems. Ann. of Math. 1961. vol. 74. pp. 199-206.

3. Meyer K. R. Energy functions for Morse Smale systems. Amer. J. Math. 1968. vol.90. pp. 1031-1040.

4. Починка О. В., Зинина С. Х. Энергетическая функция Морса для топологических потоков с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством на поверхностях // Математические заметки. 2020. Т. 107, № 2. С. 276-285.

MSC2020 37D05

Construction of the Morse-Bott energy function for regular topological flows

S. Kh. Zinina

National Research Mordovia State University