УДК 517.9

Условия нелокальной разрешимости системы со свободными членами для случая положительных коэффициентов

Донцова М. В.

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \partial_t u\,(t,x) + (a(t)u(t,x) + b(t)v(t,x))\partial_x u\,(t,x) = f_1(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + (c(t)u(t,x) + g(t)v(t,x))\partial_x v(t,x) = f_2(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x),\ v(t,x)$ – неизвестные функции, $f_1,\ f_2,\ a(t),\ b(t),\ c(t),\ g(t)$ – известные функции, $a(t) > 0,\ b(t) > 0,\ c(t) > 0,\ g(t) > 0, \quad t \in [0,T]$.

Для системы уравнений (1) определим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x). \tag{2}$$

Задача (1), (2) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T, x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

С помощью метода дополнительного аргумента и преобразований получена система интегральных уравнений [1], [2]:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int_0^t (a(\nu)w_1 + b(\nu)w_3)d\nu) + \int_0^s f_1(\nu, x - \int_\nu^t (a(\tau)w_1 + b(\tau)w_3)d\tau)d\nu, \tag{3}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int_0^t (c(\nu)w_4 + g(\nu)w_2)d\nu) + \int_0^s f_2(\nu, x - \int_\nu^t (c(\tau)w_4 + g(\tau)w_2)d\tau)d\nu, \tag{4}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int_s^t (a(\nu)w_1 + b(\nu)w_3)d\nu), \tag{5}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int_s^t (c(\nu)w_4 + g(\nu)w_2)d\nu). \tag{6}$$

Обозначим $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ - пространство функций один раз дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых по переменной x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T,

$\bar{C}^{\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n}(\Omega_*)$ – пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка α_m по m-му аргументу, $m = \overline{1,n}$, на неограниченном подмножестве $\Omega_* \subset R^n, n = 1,2....$,

$C^2([0,T])$ – пространство функций, определенных, непрерывных вместе со своими производными первого и второго порядка на отрезке $[0,T]$.

Общим итогом исследования является следующая теорема [1]:

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R),\ f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T),\ a, b, c, g \in C^2([0,T])$ *и выполняются условия*

$$a(t) > 0,\ b(t) > 0,\ c(t) > 0,\ g(t) > 0, \quad t \in [0,T],$$

$$\varphi_1'(x) \geq 0,\ \varphi_2'(x) \geq 0 \text{ на } R,\ \ \partial_x f_1 \geq 0,\ \partial_x f_2 \geq 0 \text{ на } \Omega_T.$$

Тогда для любого $T > 0$ *задача Коши (1), (2) имеет единственное решение*

$$u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T),$$

которое определяется из системы интегральных уравнений (3)–(6).

В теореме 1 сформулированы условия нелокальной разрешимости задачи Коши (1), (2), где $u(t,x) = w_1(t,t,x),\ v(t,x) = w_2(t,t,x)$.

Литература

1. Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости системы со свободными членами для случая положительных коэффициентов // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 19, № 4. С. 23-32.

2. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады РАН. 2001. Т. 379, № 1. С. 16-21.

MSC2020 35F50, 35F55, 35A01, 35A02, 35A05

The nonlocal solvability for a system with constant terms for the case of positive coefficients

M. V. Dontsova

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod