

УДК 004.93

Восстановление цветных изображений с помощью низкоранговой матрицы аппроксимации

Донскова М. А., Башаров И. В.

Московский физико-технический институт

Цель проекта — реализация эффективного алгоритма [1] восстановления цветных изображений. Простые методы низкоранговой аппроксимации матрицы с пропущенными или зашумленными значениями подходят только для одноканальных картинок, т.е. в градациях серого. Если изображение цветное, то есть имеет 3 канала, то оно приводится каким-нибудь эвристическим методом к одноканальному. Например, взвешенной суммой каналов.

Такой подход неоптимален, поскольку из взаимодействия цветов можно извлечь дополнительную информацию. Однако непосредственная работа с трёхмерными тензорами — это очень трудоёмкие вычисления, поскольку задача низкорангового приближения трёхмерного тензора является NP-полной. В традиционных методах на основе матриц используются два подхода: разложение низкого ранга и минимизация ядерной нормы. В нашем проекте, объединяем два подхода в нашей модели на основе кватернионных матриц. Вместо ядерной нормы матрицы кватернионов будет использована сумма норм Фробениуса двух матриц кватернионов малого ранга. Основываясь на связи между матрицей кватернионов и ее эквивалентной комплексной матрицей, задача в конечном итоге преобразуется из поля чисел кватернионов в поле комплексных чисел [1]. Чередующийся метод минимизации применяется для решения модели.

Результаты моделирования восстановления реальных цветных изображений показывают превосходную производительность и эффективность предложенного алгоритма по сравнению с некоторыми современными тензорными алгоритмами (см. рис. 1, 2).

Чтобы работать с двумерными тензорами, необходимо представлять изображение в виде матрицы кватернионов. Непосредственные вычисления с ними также сложны, но можно ввести взаимно обратное отображение матриц кватернионов в множество матриц комплексных чисел большего размера. Схема восстановления изображений следующая:

1. Трёхканальная картинка с пропущенными/зашумленными пикселями
2. Матрица кватернионов
3. Матрица комплексных чисел
4. Низкоранговая аппроксимация
5. Восстановленная матрица кватернионов
6. Восстановленная картинка.

Результатом работы является реализация алгоритма восстановления цветных изображений с помощью матрицы кватернионов низкого ранга и сравнительный анализ с некоторыми известными алгоритмами. В работе используются математические теоремы и выкладки, а также поставлена модель оптимизации для заполнения матрицы, которые были представлены в статьях и докладах [1]- [3].

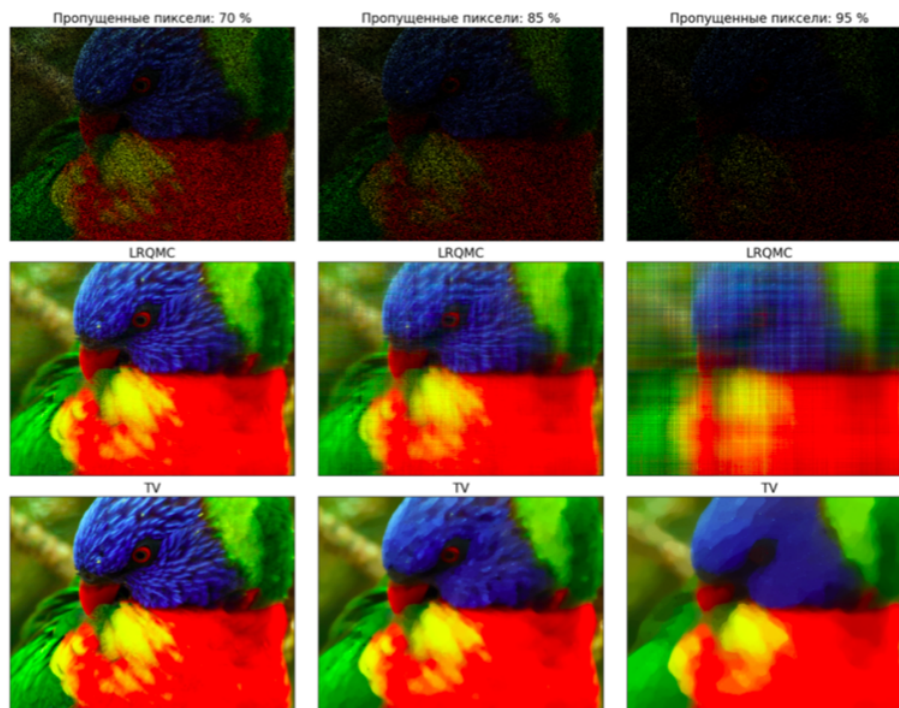


Рис. 1. Сравнение работы двух алгоритмов LRQMC, предложенного в [1] и стандартного TV (Total Variation).

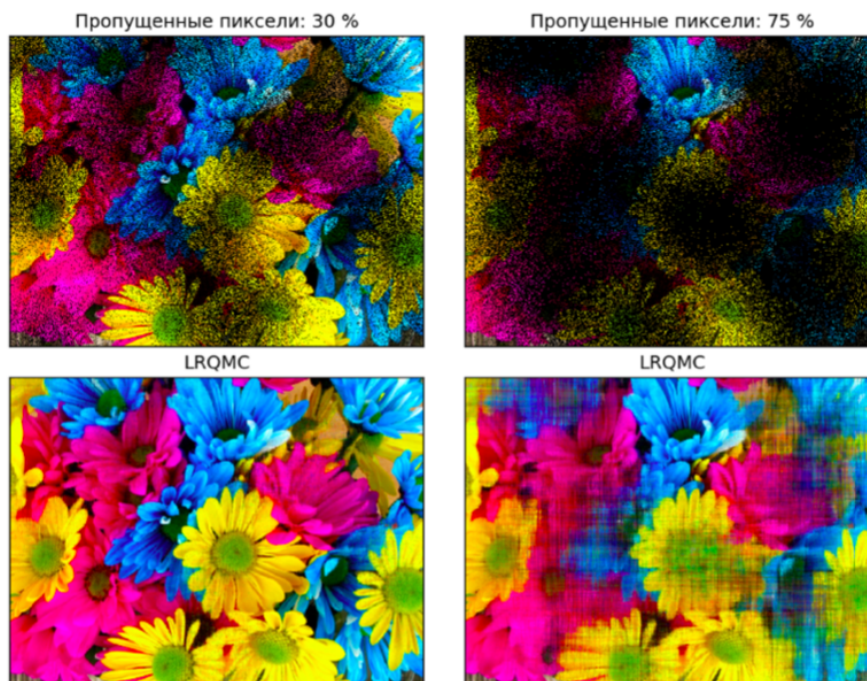


Рис. 2. Сравнение работы двух алгоритмов LRQMC, предложенного в [1] и стандартного TV (Total Variation).

Математические выкладки статьи [2] объемны, поэтому приведем основную теорему для алгоритма восстановления изображений.

Теорема 1. Пусть имеются 3 матрицы кватернионов (H) размера

$$X \in H^{M \times N}, P \in H^{M \times N}, Q \in H^{N \times M}.$$

Тогда выполняются следующие свойства

1) если $\text{rank}(X) = K$, то существуют две матрицы $P \in H^{M \times K}, Q \in H^{K \times M}$ кватернионов, для которых верно $X = UV$ и они удовлетворяют

$$\text{rank}(U) = \text{rank}(V) = K;$$

2) $\text{rank}(PQ) \leq \min(\text{rank}(P), \text{rank}(Q))$;

3) Пусть X выходная заполненная матрица, T - входная матрица с пропусками (битыми пикселями) с рангом $K_0 \leq K$. Тогда задача оптимизации [1] может быть представлена следующим образом:

$$\text{minimize} \|f(X)\|_*$$

при условии

$$P_\Omega(X - T) = 0,$$

где $P_\Omega(X - T)$ - означает копирование элементов T в X , если X небитый пиксель, $f(X)$ - оператор перевода матриц кватернионов размера $M \times N$ в комплексную матрицу $2M \times 2N$, определенный в [4].

Литература

1. Miao J., Kou K. I. Color image recovery using low-rank quaternion matrix completion algorithm: Conference: 2013 6th International Congress on Image and Signal Processing.
2. Golub G., Van Loan C.F. Matrix Computations: The John Hopkins University Press Baltimore and London, 1996.
3. Bengua J. A., Phien H. N., Tuan H. D., Do M. N. Efficient tensor completion for color image and video recovery: Low-rank tensor train 26: IEEE Trans. Image Processing, 2017
4. Bihan N. L., Mars J. I. Singular value decomposition of quaternion matrices: a new tool for vector-sensor signal processing. Signal Processing. 2004. vol. 84, No. 7. pp. 1177-1199.

MSC2020 15B33

Reconstruction of color images using a low-rank approximation matrix

M. A. Donskova, I. V. Basharov
Moscow Institute of Physics and Technology