УДК 519.63

Об одном приближённом методе нахождения матрицы коэффициентов в обратной задаче для системы параболических уравнений

Бойков И. В., Рязанцев В. А.

Пензенский государственный университет

В работе рассматривается задача восстановления неизвестной матрицы $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, где $i = \overline{1,2}$, $j = \overline{1,2}$, в задаче Коши для системы из двух линейных параболических уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{u}, \qquad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} = (x_1, \, \ldots \, , \, x_m)^T \in \mathbb{R}^m, \tag{2}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \ u_2)^T$, $\mathbf{u}_0 = (u_{01}, \ u_{02})^T$, а Δ определяется формулой

$$\Delta \mathbf{u} = \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_m^2}, \ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_m^2} \right)^T .$$

Заметим, что описываемый ниже метод без труда обобщается на случай задачи (1)-(2), имеющей произвольную размерность n. Случай $n = 2$ здесь фиксируется из соображений простоты и наглядности изложения.

Пусть при каждом $t \geqslant 0$ выполняются условия $u_1(t, \mathbf{x}) \in L_2(\mathbb{R}^m)$, $u_2(t, \mathbf{x}) \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Предположим, что дополнительно известной является вектор-функция $\mathbf{u}(t^*, \mathbf{x})$.

Применив многомерное преобразование Фурье

$$\mathfrak{F}\left[f(\mathbf{x})\right] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \, \ldots \, , x_m) e^{-i(x_1\omega_1 + \, \ldots \, + x_m\omega_m)} \, dx_1 \, \ldots \, dx_m$$

к задаче (1)-(2), получим следующую систему уравнений в спектральной области:

$$\frac{\partial \mathbf{U}(t, \boldsymbol{\omega})}{\partial t} = \left[-\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{A} \right] \mathbf{U}(t, \boldsymbol{\omega}), \qquad \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \, \ldots \, , \, \omega_m)^T \tag{3}$$

$$\mathbf{U}(0, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega}) = (U_{01}(\boldsymbol{\omega}), U_{02}(\boldsymbol{\omega}))^T = \left(\mathfrak{F}\left[u_{01}(\mathbf{x})\right], \mathfrak{F}\left[u_{02}(\mathbf{x})\right]\right)^T, \tag{4}$$

где $\mathbf{U}(t, \boldsymbol{\omega}) = (U_1(t, \boldsymbol{\omega}), U_2(t, \boldsymbol{\omega}))^T = \left(\mathfrak{F}\left[u_1(t, \boldsymbol{x})\right], \mathfrak{F}\left[u_2(t, \boldsymbol{x})\right]\right)^T$, $\boldsymbol{\omega}^2 = \omega_1^2 + \ldots + \omega_m^2$.

Решение системы (3) с начальным условием (4) имеет следующий вид [1]:

$$\mathbf{U}(t, \boldsymbol{\omega}) = \exp\left[-t\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{A} \right] \mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega}). \tag{5}$$

Для того, чтобы на основании системы (5) осуществить восстановление матрицы $\mathbf{A}$, зафиксируем два ненулевых значения переменной $\boldsymbol{\omega}$, одно из которых ($\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^*$) произвольно, а другое ($\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{**}$) связано с первым при помощи формулы $\boldsymbol{\omega}^{**} = \sqrt{2}\boldsymbol{\omega}^*$. Поочерёдно зафиксировав в (5) значения $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^*$ и $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{**}$, получим следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} \mathbf{U}(t, \boldsymbol{\omega}^*) = \exp\left[-t(\boldsymbol{\omega}^*)^2 \mathbf{A} \right] \mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega}^*), \\ \mathbf{U}(t, \boldsymbol{\omega}^{**}) = \exp\left[-t(\boldsymbol{\omega}^{**})^2 \mathbf{A} \right] \mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega}^{**}). \end{cases} \tag{6}$$

Зафиксируем $t = t^*$ в системе (6) и обозначим $\mathbf{C} = \exp\left[-t^*(\boldsymbol{\omega}^*)^2\mathbf{A}\right]$. Легко видеть, что

$$\exp\left[-t^*(\boldsymbol{\omega}^{**})^2\mathbf{A}\right] = \exp\left[-2t^*(\boldsymbol{\omega}^*)^2\mathbf{A}\right] = \left\{\exp\left[-t^*(\boldsymbol{\omega}^*)^2\mathbf{A}\right]\right\}^2 = \mathbf{C}^2$$

Стало быть, система (6) при $t = t^*$ примет следующий вид.

$$\begin{cases} \mathbf{C}\mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega}^*) = \mathbf{U}(t^*, \boldsymbol{\omega}^*), \\ \mathbf{C}^2\mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega}^{**}) = \mathbf{U}(t^*, \boldsymbol{\omega}^{**}). \end{cases} \tag{7}$$

Обозначим $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega}^*) = (y_1, y_2)^T$, $\mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega}^{**}) = (y_3, y_4)^T$, $\mathbf{U}(t^*, \boldsymbol{\omega}^*) = (f_1, f_2)^T$, $\mathbf{U}(t^*, \boldsymbol{\omega}^{**}) = (f_3, f_4)^T$. Тогда система (7) в развёрнутом виде запишется следующим образом.

$$\begin{cases} v_1y_1 + v_2y_2 = f_1, \\ v_3y_1 + v_4y_2 = f_2, \\ \left(v_2v_3 + v_1^2\right)y_3 + \left(v_2v_4 + v_1v_2\right)y_4 = f_3, \\ \left(v_3v_4 + v_1v_3\right)y_3 + \left(v_4^2 + v_2v_3\right)y_4 = f_4. \end{cases} \tag{8}$$

Система (8) может быть решена любым алгоритмом решения таких задач.

Отметим, что система (8) может иметь более одного решения. Для этих решений должна быть проведена процедура отбраковки, заключающаяся в проверке условий существования вещественной матрицы $\mathbf{A}$, являющейся решением уравнения $\mathbf{C} = \exp\left[-t^*(\omega^*)^2\mathbf{A}\right]$. Эти условия, приведенные в книге [2, стр. 212], формулируются следующим образом.

Утверждение 1. *Уравнение* $\exp[\mathbf{X}] = \mathbf{F}$, *где* $\mathbf{F}$ *— вещественная невырожденная матрица размерности* $n \times n$, *имеет решение — вещественную матрицу* $\mathbf{X} = \ln(\mathbf{F})$ *размерности* $n \times n$, *тогда и только тогда, когда у матрицы* $\mathbf{F}$ *либо совсем нет элементарных делителей, соответствующих отрицательным характеристическим числам, либо каждый такой элементарный делитель повторяется чётное число раз.*

Тем самым, каждое найденное решение $\mathbf{C}$ системы уравнений должно быть проверено на справедливость для данного решения утверждения 1, и в случае, если утверждение 1 не имеет места, найденное решение должно быть исключено из дальнейшего рассмотрения.

Таким образом, алгоритм восстановления матрицы $\mathbf{A}$ в задаче (1)-(2) в предположении об априорной известности функции $\mathbf{u}(t^*, \mathbf{x})$ может быть сформулирован в виде следующей последовательности шагов.

1. Вычисляются преобразования $\mathbf{U}(t^*, \boldsymbol{\omega})$, $\mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega})$ функций $\mathbf{u}(t^*, \mathbf{x})$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ соответственно.

2. Выполняется построение системы нелинейных уравнений (8), которая затем решается при помощи одного из методов решения систем нелинейных уравнений.

3. На основании каждой найденной матрицы $\mathbf{C}$, удовлетворяющей условиям утверждения 1, находится матрица $\mathbf{B} = -t^*(\boldsymbol{\omega}^*)^2\mathbf{A}$ в результате решения уравнения

$$\exp\left(\mathbf{B}\right) = \mathbf{C}. \tag{9}$$

Это уравнение может быть решено различными способами; в частности, достаточно простым способом является вычисление отрезка ряда

$$\ln(\mathbf{C}) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p}(\mathbf{C} - \mathbf{I})^p, \tag{10}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица, имеющая ту же размерность, что и $\mathbf{C}$. Ряд (10) является [2, стр. 113] сходящимся, если каждое характеристическое число λ матрицы $\mathbf{C}$ удовлетворяет условию

$$|\lambda - 1| < 1. \tag{11}$$

4. Алгоритм завершается построением матрицы $\mathbf{A}$ на основе матрицы $\mathbf{B}$, выполняемом в соответствии с формулой

$$\mathbf{A} = \frac{1}{t^*(\boldsymbol{\omega}^*)^2}\mathbf{B}. \tag{12}$$

При этом в случае, если таких матриц оказывается несколько, может потребоваться проведение дополнительной отбраковки найденных решений исходной задачи. В частности, достаточно простым способом является вычисление при $t = t^*$ правой части уравнения (5) в достаточно большом количестве различных точек $\boldsymbol{\omega}$ и проверка (приближённого) равенства вычисленнных значений соответствующим значениям $\mathbf{U}(t^*, \boldsymbol{\omega})$.

Приведём модельный пример.

Пример 1. *Пусть требуется восстановить матрицу* $\mathbf{A}$ *в задаче* (1)-(2), *если известными являются начальные условия*

$$u_{01}(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right] - \exp\left[-\frac{x^2}{8}\right], \qquad u_{02}(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right] + \exp\left[-\frac{x^2}{8}\right],$$

а также функции

$$u_1(1,x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[-\frac{x^2}{8}\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[-\frac{x^2}{16}\right], \quad u_2(1,x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[-\frac{x^2}{8}\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[-\frac{x^2}{16}\right].$$

Точное решение поставленной задачи даётся матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы решение задачи Коши (1)-(2) *определяют функции*

$$u_1(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}\exp\left[-\frac{x^2}{4(t+1)}\right] - \frac{1}{\sqrt{t+1}}\exp\left[-\frac{x^2}{8(t+1)}\right],$$
$$u_2(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}\exp\left[-\frac{x^2}{4(t+1)}\right] + \frac{1}{\sqrt{t+1}}\exp\left[-\frac{x^2}{8(t+1)}\right],$$

В соответствии с предложенным алгоритмом, поставленная задача решается следующим образом. Известно [3], что преобразования Фурье функций $u_{01}(x)$, $u_{02}(x)$, $u_1(1,x)$, $u_2(1,x)$ *определяются следующим образом.*

$$\mathfrak{F}\left[u_{01}(x)\right] = \sqrt{2}e^{-\omega^2} - 2e^{-2\omega^2}, \qquad \mathfrak{F}\left[u_{02}(x)\right] = \sqrt{2}e^{-\omega^2} + 2e^{-2\omega^2},$$
$$\mathfrak{F}\left[u_1(1,x)\right] = \sqrt{2}e^{-2\omega^2} - 2e^{-4\omega^2}, \qquad \mathfrak{F}\left[u_2(1,x)\right] = \sqrt{2}e^{-2\omega^2} + 2e^{-4\omega^2}.$$

Зафиксируем $\omega^* = 1/\sqrt{2}$; *тогда* $\omega^{**} = 1$. *Для того, чтобы построить систему* (8), *определим значения* y_k, f_k, *где* $k = 1,2,3,4$.

$$f_1 = 2e^{-1} - 2\sqrt{2}e^{-2} \approx 0.24959, \qquad f_2 = 2e^{-1} + 2\sqrt{2}e^{-2} \approx 0.79093,$$
$$f_3 = 2e^{-2} - 2\sqrt{2}e^{-4} \approx 0.15476, \qquad f_4 = 2e^{-2} + 2\sqrt{2}e^{-4} \approx 0.22802,$$
$$y_1 = 2e^{-1/2} - 2\sqrt{2}e^{-1} \approx 0.12201, \qquad y_2 = 2e^{-1/2} + 2\sqrt{2}e^{-1} \approx 1.59352,$$
$$y_3 = 2e^{-1} - 2\sqrt{2}e^{-2} \approx 0.24959, \qquad y_4 = 2e^{-1} + 2\sqrt{2}e^{-2} \approx 0.79093.$$

Определённая таким образом нелинейная система (8) *имеет три решения:*

$$\mathbf{C}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.48721 & 0.11932 \\ 0.11931 & 0.48720 \end{pmatrix},\ \mathbf{C}^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.75963 & 0.0.21479 \\ 1.36606 & 0.39175 \end{pmatrix},\ \mathbf{C}^{(3)} = \begin{pmatrix} -1.22481 & 0.25041 \\ -1.59262 & 0.61828 \end{pmatrix},$$

Характеристические числа найденных матриц:

$$\begin{aligned} &\textit{для } \mathbf{C}^{(1)}: \quad \lambda_1^{(1)} = 0.36789, \quad \lambda_2^{(1)} = 0.60652, \\ &\textit{для } \mathbf{C}^{(2)}: \quad \lambda_1^{(2)} = -0.97441, \quad \lambda_2^{(2)} = 0.60653, \\ &\textit{для } \mathbf{C}^{(3)}: \quad \lambda_1^{(3)} = -0.97441, \quad \lambda_2^{(3)} = 0.36788. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что условиям утверждения 1 удовлетворяет только матрица $\mathbf{C}^{(1)}$. *Зафиксируем поэтому* $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{(1)}$ *и найдём матрицу* $\ln(\mathbf{C})$. *Поскольку, как нетрудно видеть, все характеристические числа матрицы* $\mathbf{C}$ *удовлетворяют условию* (11), *то матрицу* $\ln(\mathbf{C})$ *восстановим приближённо, вычислив частичную сумму ряда* (10), *ограничившись первыми* 100 *его членами.*

В результате последующего вычисления элементов матрицы $\mathbf{A}$ *в соответствии с формулой* $\mathbf{A} = -\mathbf{B}/\left(t^*(\omega^*)^2\right)$. *получена матрица*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.49996792259 & -0.499974674491 \\ -0.49993277249 & 1.50000982459 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что эта матрица лишь на незначительную погрешность отличается от точного решения исходной задачи.

Литература

1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 535 с.

2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 560 с.

3. Снеддон И. Преобразование Фурье. М.: Издательство иностранной литературы, 1955. 668 с.

MSC2020 65M32

On the approximate method for determination of coefficient matrix in inverse problem for a system of parabolic equation

I. V. Boykov, V. A. Ryazantsev

Penza State University