

УДК 532.582.7

Динамика твердых частиц взвеси в параболическом потоке вязкой жидкости

Сыромясов А. О., Меньшакова Т. В.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В статье изучается обтекание твердой сферы ползущим потоком несжимаемой вязкой жидкости. Скорость потока квадратично зависит от координат, что соответствует течению по трубам круглого и эллиптического течения. Возмущение, вносимое частицей в поток, найдено методом мультипольного разложения. На основе полученного решения уравнения Стокса найдены силы, действующие на взвешенную сферу, и ее скорость относительно потока. Найдены траектории частиц взвеси в параболическом потоке.

Ключевые слова: уравнение Стокса, вязкая жидкость, суспензия, параболический поток, динамика частицы.

1. Постановка задачи

Как правило, жидкости, участвующие в природных или технологических процессах, не являются чистыми, а содержат примеси: твердые инородные частицы или мелкие капли другой жидкости. Примерами служат нефть, краски, лекарственные суспензии и эмульсии, кровь и т.д. [1].

Огибая частицы примеси, жидкость изменяет свое течение. Если они расположены достаточно близко, то на каждую из них набегающий поток, уже искаженный другими частицами. Моделирование течения жидкости, имеющей примеси, является актуальным как с естественнонаучной, так и технической точки зрения. Поэтому рассмотрим такую задачу более детально.

Пусть задан внешний поток $\vec{U} = (U_1, U_2, U_3)$, набегающий на частицу A , а сама она представляет из себя одиночный шарик радиуса a (рис. 1).

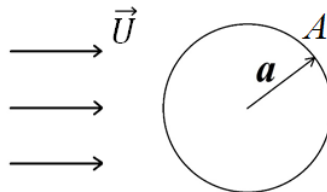


Рис. 1. Обтекание шарика внешним потоком.

Возникает несколько вопросов: как сама частица будет двигаться в этом потоке? Как она будет искажать данный поток?

Т.к. практическую значимость имеет течение жидкостей по трубам, то мы будем рассматривать набегающие потоки, в которых скорость является многочленом от координат не выше второй степени. Например, таковым является решение задачи Пуазейля [2]. Систему координат $Ox_1x_2x_3$ будем считать декартовой прямоугольной.

При моделировании течения примем следующие упрощения:

- Температура жидкости постоянна, следовательно, и ее вязкость постоянна.

- Скорость жидкости $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ на поверхности частицы равна скорости самой этой поверхности (условие прилипания).
- Жидкость несжимаема, частица мала, а вязкость жидкости η достаточно велика. Поэтому число Рейнольдса много меньше единицы и справедливы уравнения Стокса:

$$\eta \Delta u_i = \nabla p, \quad i = 1, 2, 3; \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1)$$

Буквой p обозначено давление в жидкости. Повторение буквенного индекса означает, что по этому индексу происходит суммирование в пределах от 1 до 3.

Как показано в [3], эти упрощения имеют реальное обоснование и применение.

В начале статьи было сказано, что твердая частица искажает течение. Поэтому запишем скорость жидкости и давление как

$$\vec{u} = \vec{U} + \vec{v}, \quad p = P + p', \quad (2)$$

где \vec{v} и p' – искажения, вызванные твердым шариком, а давление P соответствует \vec{U} . Функции \vec{U} и P заданы заранее и удовлетворяют уравнениям Стокса. Необходимо найти \vec{v} и p' , для которых также справедливо (1).

Укажем граничные условия задачи.

Далеко от шарика поток не возмущен, т.е.

$$\vec{v} \rightarrow \vec{0}, \quad p' \rightarrow 0, \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Движение точек поверхности шарика складывается из движения его центра со скоростью \vec{U}^A и вращения вокруг центра с угловой скоростью Γ_{ij} . Отсюда, используя условие прилипания и выражение (2), получим, что

$$U_i + v_i = U_i^A + \Gamma_{ij} x_j, \quad |\vec{x}| = a. \quad (4)$$

Здесь предполагается, что центр частицы находится в начале координат.

2. Решение задачи. Силы, действующие на частицу

Вне зависимости от U_i и Γ_{ij} , общее выражение для возмущений скорости и давления, удовлетворяющих (1) и (3), известно [4]:

$$\begin{aligned} p' &= H_j L_j(\vec{x}) + F_{jk} L_{jk}(\vec{x}) + G_{jkl} L_{jkl}(\vec{x}) + D_{jklm} L_{jklm}(\vec{x}) + T_{jklms} L_{jklms}(\vec{x}) + \dots \\ \eta v_i &= -\frac{2}{3} H_i L_0(\vec{x}) - \frac{1}{6} H_j L_{ij}(\vec{x}) |\vec{x}|^2 - \frac{3}{5} F_{ij} L_j(\vec{x}) - \frac{1}{10} F_{jk} L_{ijk}(\vec{x}) |\vec{x}|^2 - \\ &\quad - \frac{4}{7} G_{ijk} L_{jk}(\vec{x}) - \frac{1}{14} G_{jkl} L_{ijkl}(\vec{x}) |\vec{x}|^2 - \frac{5}{9} D_{ijkl} L_{jkl}(\vec{x}) - \frac{1}{18} D_{jklm} L_{ijklm}(\vec{x}) |\vec{x}|^2 - \\ &\quad - \frac{6}{11} T_{ijklms} L_{jklm}(\vec{x}) - \frac{1}{22} T_{jklms} L_{ijklms}(\vec{x}) |\vec{x}|^2 - \dots \end{aligned}$$

Т.н. мультиполи $L_{i\dots j}$ находятся по формулам

$$L_0(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}, \quad L_{i\dots j}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \dots \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \right),$$

а тензорные коэффициенты H_i, F_{ij}, \dots не зависят от \vec{x} . Они должны выражаться через компоненты вектора \vec{U} , описывающего внешний поток. Для этого используется условие (4).

В свою очередь, выражения для сил \mathcal{F}_i , действующих на частицу, записываются с помощью этих тензорных коэффициентов:

$$\mathcal{F}_i = 4\pi H_i. \quad (5)$$

При течении вязкой жидкости по трубам круглого и эллиптического сечения U_i включает в себя одновременно и однородную, и квадратичную составляющие [2]:

$$U_i = U_i^{const} + C_{ijk}x_jx_k, \quad (6)$$

где U_i^{const} и C_{ijk} суть некоторые константы. Поэтому отдельно рассмотрим задачи для однородного потока и отдельно – для квадратичного. Вращение частицы нас не интересует, и далее предполагается, что $\Gamma_{ij} = 0$.

Направим ось трубы вдоль Ox_1 . Тогда для движения по трубе круглого сечения

$$U_1 = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - x_2^2 - x_3^2), \quad U_2 = U_3 = 0,$$

где R – радиус поперечного сечения, а Δp – перепад давления на длине l . Поэтому

$$U_1^{const} = \frac{\Delta p}{4\eta l}R^2, \quad C_{122} = C_{133} = -\frac{\Delta p}{4\eta l}, \quad (7)$$

а остальные компоненты U_i^{const} и C_{ijk} равны нулю.

Если труба имеет эллиптическое сечение, то

$$U_1^{const} = \frac{\Delta p}{2\eta l} \cdot \frac{R_2^2 R_3^2}{R_2^2 + R_3^2}, \quad C_{122} = -\frac{\Delta p}{2\eta l} \cdot \frac{R_3^2}{R_2^2 + R_3^2}, \quad C_{133} = -\frac{\Delta p}{2\eta l} \cdot \frac{R_2^2}{R_2^2 + R_3^2}, \quad (8)$$

иные компоненты вновь равны нулю. Здесь R_2 и R_3 – полуоси эллипса вдоль осей Ox_2 и Ox_3 , соответственно.

Граничные условия для задачи с однородным потоком включают в себя скорость частицы относительно жидкости $V_i = U_i^A - U_i^{const}$:

$$v_i = V_i, \quad |\vec{x}| = a.$$

В данном случае коэффициент, отвечающий за действующую силу, имеет вид $H_i = -3aV_i/2$, а следовательно, сила (5), действующая на частицу, равна $-6\pi\eta aV_i$.

Аналогично, для параболического потока с коэффициентами C_{ijk} имеем

$$H_i = \frac{a^3}{2}C_{ikk}, \quad \mathcal{F}_i = 2\pi a^3 C_{ikk}.$$

Суммарная сила, действующая на частицу, равна нулю. Следовательно, сумма сил, действующих на нее в однородном и параболическом потоках – нулевая. Значит, скорость частицы относительно жидкости выражается через параметры квадратичного потока:

$$-6\pi\eta aV_i + 2\pi a^3 C_{ikk} = 0 \Rightarrow V_i = \frac{a^2}{3}C_{ikk}.$$

3. Траектории взвешенных частиц

Знание скорости частицы относительно жидкости позволяет построить и траекторию частицы. Для этого нужно решить дифференциальные уравнения

$$\frac{dr_i^A}{dt} = U_i^A, \quad i = 1, 2, 3, \quad (9)$$

относительно координат радиус-вектора центра частицы \vec{r}^A . Скорость $U_i^A = U_i + V_i$ нам известна, поскольку U_i заранее задана, а V_i найдена выше.

Нюанс состоит в том, что ранее мы решали задачу, в которой центр частицы находился в начале координат, а в реальности его нужно сдвинуть на \vec{r}^A . Соответственно, из (6) и (9) получается

$$\frac{dr_i^A}{dt} = \frac{a^2}{3} C_{ikk} + U_i^{const} + C_{ijk} r_j^A r_k^A, \quad i = 1, 2, 3$$

Эта система уравнений решалась при различных начальных данных с помощью системы Wolfram Mathematica; предполагалось, что шарик движется в течение 10 условных единиц времени.

В случае круглой трубы всегда считалось, что $R = 1$. Для радиуса частицы были рассмотрены три варианта: $a = 0.25$, $a = 0.1$ и $a = 0.01$. Для каждого из них были взяты различные начальные положения центра шарика: $(0, 0, a)$ – частица располагается практически на оси трубы Ox_1 ; $(0, 0, R/2)$ – частица находится посередине между осью x_1 и стенкой трубы; $(0, 0, R - a)$ – частица касается стенки трубы.

Первоначальная гипотеза состояла в том, что шарик в зависимости от его начального положения будет относить либо к оси трубы, либо к ее стенкам. Если бы она подтвердилась, это помогло бы организовать сбор и фильтрацию твердых примесей в вязких жидкостях, текущих по трубам, – было бы известно, где эта примесь концентрируется. Однако в результате построения у нас всегда получается прямая линия (рис. 2). Предположение, что частицу отнесет от стенки трубы к центру или наоборот – не подтвердилось.

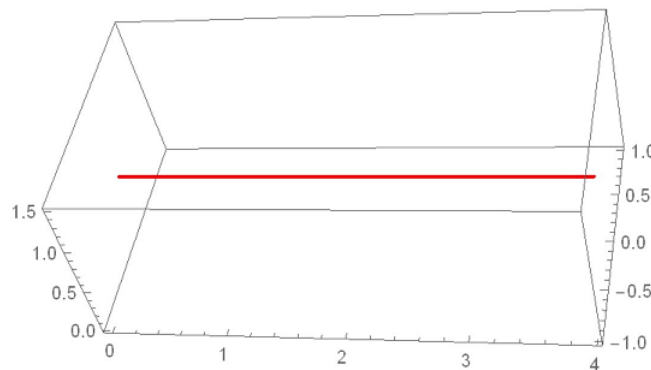


Рис. 2. Траектория шарика радиуса $a = 0.25$ и начальным положением центра $(0, 0, R - a)$.

Аналогично, при течении по трубам эллиптического сечения выдвигалась гипотеза, что частицы взвеси могут собираться в “карманах” трубы – возле наиболее удаленных друг от друга вершин эллипса. Однако она также не подтвердилась.

На основании всего вышесказанного делаем выводы:

- Если труба круглая, то C_{2jk} и C_{3jk} в (7) и в (8) равны нулю. Поэтому $V_2 = V_3 = 0$, частица движется горизонтально, параллельно оси x_1 трубы и не движется вдоль по двум другим осям x_2, x_3 .
- Относительная скорость частицы получилась равной $V_1 = a^2 C_{1kk} / 3$, что меньше нуля, и значит, частица отстает от потока жидкости.
- Относительная скорость частицы не зависит от ее начального положения, а только от ее размера: чем меньше радиус шарика, тем меньше отставание от потока жидкости.

Сделанные выводы не зависят от того, по какой трубе течет жидкость, – по круглой или по эллиптической.

Литература

1. Фридрихсберг Д. А. Курс коллоидной химии. 3-е изд., испр. СПб. : Химия, 1995. 399 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М. : Наука, 1986. 736 с.
3. Меньшакова Т. В. Математическая модель термогидродинамического взаимодействия частиц в вязкой жидкости и ее упрощения // XLVIII Огаревские чтения : материалы науч. конф. В 3 ч. Ч. 2 : Естественные науки. — Саранск : Изд-во Мордов. ун-та, 2020. — С. 576–580.
4. Мартынов С. И. Гидродинамическое взаимодействие частиц // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 2. С. 112–119.

MSC2020 76D07, 76T20, 70E15, 35Q35, 35C99

Dynamics of rigid particles in a parabolic flow of viscous fluid

A. O. Syromyasov, T. V. Menshakova

National Research Mordovia State University

Abstract: The authors investigate rigid spherical particle in a creeping incompressible flow. Far from the suspended sphere the flow is parabolic that corresponds to fluid movement in a tube with circular or elliptic cross-section. Disturbance caused by the particle is found by the method of multipole expansion. Basing on the solution obtained the forces acting on the particle and the particle's relative velocity are found. Finally the trajectories of rigid spheres, which are straight lines, are obtained.

Keywords: Stokes equation, viscous fluid, suspension, parabolic flow, particle dynamics.

References

1. Fridrihsberg D. A. [Colloidal chemistry course]. 3rd ed. SPb., Himija, 1995, 399 p. (In Russian).
2. Landau L. D., Lifshitz E. M. Fluid Mechanics. 2nd ed. Butterworth–Heinemann, 1987. (In Russian).
3. Menshakova T. V. [Mathematical model of thermohydrodynamic interaction of particles in a viscous fluid and its simplification]. XLVIII Ogarev readings. Pt. 2. Saransk, 2020. pp. 576–580. (In Russian).
4. Martynov S. I. Hydrodynamic interaction of particles. Fluid Dynamics. 1998. V. 33(2). DOI: 10.1007/BF02698709. (In Russian).