

УДК 001.891.573

Математическое моделирование эффективности введения противоэпидемических карантинных мер на примере распространения COVID-19

Еремеева Н. И., Марасова И. А., Савельева А. М.

Димитровградский инженерно-технологический институт – филиал НИЯУ МИФИ

Аннотация: В статье представлены результаты численного моделирования распространения эпидемии на основе SIR- и SEIRD-моделей. В работе рассматривается вопрос об изменении параметров течения эпидемии при введении карантинных мер. В частности, для модели SEIRD численно подобран оптимальный коэффициент, отражающий степень жесткости карантинных мер.

Ключевые слова: SIR-модель, SEIRD-модель, эпидемия, карантинные меры, COVID-19.

1. SIR-модель

Математическое моделирование охватывает все большее количество сфер жизни человечества. Широко развито математическое моделирование и в эпидемиологии. В марте 2020 года Всемирная организация здравоохранения объявила о пандемии COVID-19. Во многих странах были введены карантинные меры. Целью данной работы является:

1. Проведение численного эксперимента для сравнения распространения эпидемии в двух случаях: при отсутствии мер, предпринимаемых для сдерживания распространения вируса и при наличии карантинных мер;
2. Подбор на основе численного эксперимента таких объемов карантинных мер, которые одновременно минимальны и эффективны.

Для численного эксперимента выбраны две математические модели распространения эпидемий - SIR и SEIRD. В качестве исходных данных используются статистические данные распространения COVID-19 в Китае. Рассмотрим классическую модель распространения вирусного заболевания - SIR-модель. Будем считать популяцию фиксированной (то есть не учитывается смертность от других факторов и рождаемость). Количество особей складывается из неинфицированных $S(t)$, инфицированных $I(t)$ и выздоровевших или умерших (невосприимчивых) $R(t)$ людей. Так как популяция фиксирована:

$$S(t) + I(t) + R(t) = \text{const} = N$$

Перечислим основные факторы, влияющие на изменение количеств описанных категорий. Очевидно, что скорость роста количества невосприимчивых людей (выздоровевших или умерших) $\frac{dR(t)}{dt}$ растет пропорционально количеству инфицированных $I(t)$, то есть

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t)$$

Заметим, что заражение происходит в результате контакта неинфицированных и инфицированных людей, и относительная частота (вероятность) контакта уменьшается при

увеличении N . Значит, $\frac{dI(t)}{dt}$ пропорциональна $\frac{S(t)I(t)}{N}$, а $\frac{dS(t)}{dt}$ пропорциональна $-\frac{S(t)I(t)}{N}$. Кроме того, в ходе эпидемии часть заболевших становится невосприимчивой (излечивается или умирает), что отрицательно сказывается на росте вновь заболевших, то есть то $\frac{dI(t)}{dt}$ содержит слагаемое, пропорциональное $-I(t)$. Следовательно

$$\begin{aligned}\frac{dI(t)}{dt} &= \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) \\ \frac{dS(t)}{dt} &= -\frac{\beta S(t)I(t)}{N}\end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что данная модель описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\beta S(t)I(t)}{N}, \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t). \end{cases}$$

где β — скорость распространения вируса, учитывает вероятность получения заболевания при контакте с больным; γ^{-1} — скорость выздоровления или смерти.

Проведем численное моделирование на основе данной модели, используя данные распространения COVID-19 в Китае за март 2020. Согласно исследованиям китайских ученых [1] $\gamma^{-1} = 18$. $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ — репродуктивное число — число заражений от одного инфицированного человека. Модель реализовывалась при $R_0 = 3,5$ $\beta = 0,194$. Население Китая на 2019 год составляло 1,410 млрд. Время моделирования — 300 дней.

Реализуем модель с помощью пакета прикладных программ для решения задач технических вычислений MATLAB:

```
global N beta gamma; %Параметры модели:
N=1410000000; % население Китая
beta=0.194; % скорость распространения
gamma=1/18; % скорость выздоровления/смерти
t1 = [0 300]; %Время начала и окончания симуляции
x0=[N-1 1 0]; %Начальные данные x0=[S0, I0, R0]
[t, x]=ode45(@sir, t1, x0); % Решение системы дифф. уравнений
plot(t,x(:,1))
hold on
plot(t,x(:,2))
plot(t,x(:,3))
legend('Восприимчивые', 'Невосприимчивые', 'Инфицированные')
xlabel('Время (в днях)')
ylabel('Популяция')
title('Китай')
function y=sir(t,x)
global N beta gamma
xsir(1)=-beta*(1/N)*x(1)*x(2);
xsir(2)=beta*(1/N)*x(1)*x(2)-gamma*x(2);
xsir(3)=gamma*x(2);
y=[xsir(1);xsir(2);xsir(3)];
end
```

Рис. 1. Реализация SIR-модели в пакете MATLAB.

Для заданных коэффициентов и при различных начальных условиях получим графики, отображающие изменения количества неинфицированных, инфицированных и невоспри-

имчивых людей. На рис. 2 представлен график распространения инфекции при начальных условиях $S(0) = N - 1, I(0) = 1, R(0) = 0$, на рис. 3 при $S(0) = 0.99N, I(0) = 0.01N, R(0) = 0$.

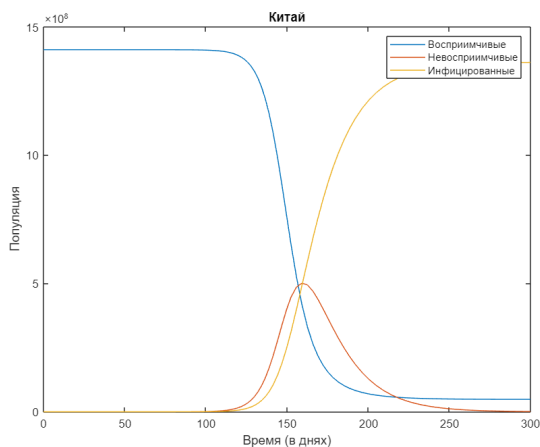


Рис. 2. График распространения COVID-19. 1 человек инфицирован.

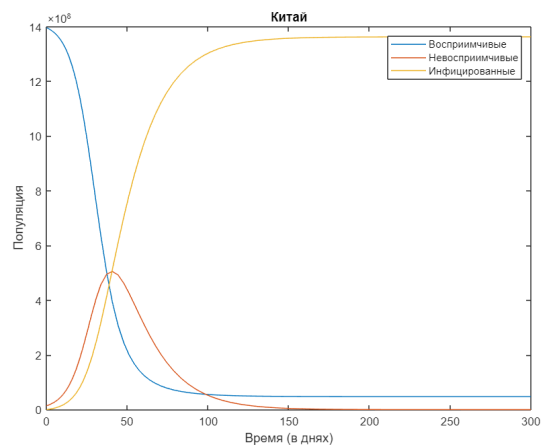


Рис. 3. График распространения COVID-19. 1% населения инфицирован.

Как показывает численный эксперимент, согласно данной модели при отсутствии мер по изоляции населения инфицированными оказывается более 30% населения Китая.

2. SEIRD-модель

Для сравнения результатов рассмотрим уточненную математическую модель распространения эпидемии - SEIRD-модель [2], которая, в отличие от SIR-модели учитывает людей, находящихся в латентном периоде заболевания.

Введем следующие обозначения: $S(t)$ — восприимчивые, $E(t)$ — латентные, $I(t)$ — инфицированные, $R(t)$ — невосприимчивые, $D(t)$ — умершие. Аналогично SIR-модели будем полагать, что популяция фиксирована и представляет собой сумму компонент:

$$S(t) + E(t) + I(t) + R(t) + D(t) = \text{const} = N$$

Для данной модели факторы, влияющие на изменение количеств описанных категорий, будет частично совпадать с SIR-моделью. В частности, скорость роста количества невосприимчивых остается пропорциональна количеству инфицированных. Рассуждения для $\frac{dS(t)}{dt}$ остаются прежними.

Аналогично SIR-модели заражение происходит при контакте неинфицированных людей с инфицированными, однако в SEIRD-модели зараженные переходят не в класс инфицированных, а в класс латентных больных. Значит $\frac{dE(t)}{dt}$ пропорциональна $\frac{\beta S(t)I(t)}{N}$. Через время, равное инкубационному периоду, больные покидают класс латентных, следовательно $\frac{dE(t)}{dt}$ содержит слагаемое $-\delta E(t)$:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \delta E(t)$$

$\frac{dD(t)}{dt}$ будет пропорционально количеству инфицированных и коэффициенту смертности, то есть

$$\frac{dD(t)}{dt} = \mu I(t)$$

Рассмотрим класс инфицированных людей. В класс инфицированных попадают больные после латентного периода и выбывают в случае выздоровления или смерти, значит $\frac{dI(t)}{dt}$ содержит слагаемые $\delta E(t)$, $-\gamma I(t)$, $-\mu I(t)$:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \delta E(t) - \gamma I(t) - \mu I(t)$$

Таким образом получаем систему дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\beta S(t) I(t)}{N}, \\ \frac{dE(t)}{dt} = \frac{\beta S(t) I(t)}{N} - \delta E(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \delta E(t) - \gamma I(t) - \mu I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t), \\ \frac{dD(t)}{dt} = \mu I(t). \end{array} \right.$$

где β и γ аналогичны SIR-модели, δ – (среднее время инкубационного периода)⁻¹, μ – коэффициент смертности.

Количество населения, β и γ возьмем из SIR-модели; время моделирования – 500 дней, среднее время инкубационного периода примем 5,2; коэффициент смертности – 0.034. Аналогично реализуем модель с помощью кода в MATLAB:

```
global N beta gamma delta mu;
N=141000000; % Населения Китая
beta=0.194; % скорость распространения
gamma=1/18; % скорость выздоровления/смерти
delta=1/5.2; % время инкубационного периода
mu=0.034; % коэффициент смертности
t1 = [0 500] % Время начала и окончания симуляции
x0=[N-1 0 1 0 0]; % Начальные данные x0=[S0, E0, I0, R0, D0]
[t, x]=ode45(@xseird, t1, x0); % Решение системы дифф. уравнений
plot(t,x(:,1))
hold on
plot(t,x(:,2))
plot(t,x(:,3))
plot(t,x(:,4))
plot(t,x(:,5))
legend('Восприимчивые', 'Латентные', 'Инфицированные', 'Выздоровевшие', 'Умершие')
xlabel('Время (в днях)')
ylabel('Популяция')
title('Китай')
function y=xseird(t,x)
global N beta gamma delta mu
xsierd(1)=-beta*(1/N)*x(1)*x(3);
xsierd(2)=beta*(1/N)*x(1)*x(3)-delta*x(2);
xsierd(3)=delta*x(2)-gamma*x(3)-mu*x(3);
xsierd(4)=gamma*x(3);
xsierd(5)=mu*x(3);
y=[xsierd(1);xsierd(2);xsierd(3);xsierd(4);xsierd(5)];
end
```

Рис. 4. Реализация SEIRD-модели в пакете MATLAB.

Для заданных параметров получим графики количеств восприимчивых, латентных, инфицированных, невосприимчивых и умерших людей при двух наборах начальных данных.

На рис. 5 изображены графики, соответствующие начальным условиям $S(0) = N - 1$, $E(t) = 0$, $I(0) = 1$, $R(0) = 0$, $D(0) = 0$, рис. 6 – графики, соответствующие начальным условиям $S(0) = 0.99N$, $E(t) = 0$, $I(0) = 0.01N$, $R(0) = 0$, $D(0) = 0$.

Как видно из представленных графиков, вирус развивается менее интенсивно, пик заболевания происходит позже. Причина этого – добавление класса латентных $E(t)$, то есть

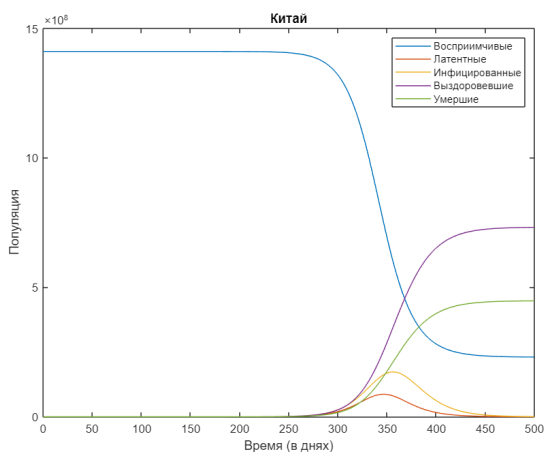


Рис. 5. График распространения COVID-19. 1 человек инфицирован.

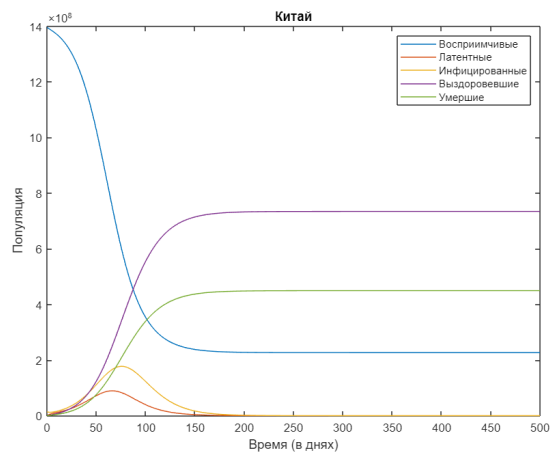


Рис. 6. График распространения COVID-19. 1% населения инфицирован.

рассматривается период, когда инфицированный человек еще не может распространить вирус. Данная модель точнее описывает распространение эпидемии.

Приведенные выше модели описывают распространение эпидемии без вмешательства, то есть не учитывают меры, предпринимаемые для сдерживания распространения вируса; в том числе, не учитывают изоляцию людей. Эффект от введения изоляции можно проиллюстрировать, изменяя коэффициент β , отражающий количество контактов инфицированных людей. Введем коэффициент $\beta_1 = \rho\beta$, где ρ можно считать показателем степени изоляции населения. Так, $\rho = 0$ будет означать, что никто не контактирует и все помещены в карантин, тогда как $\rho = 1$ будет соответствовать рассмотренным выше случаям.

Так как изоляция напрямую влияет на количество инфицированных, рассмотрим данный класс при начальных условиях $S(0) = 0.99N$, $I(0) = 0.01N$, $R(0) = 0$. На рис. 7 приведен график изменения количества инфицированных людей при $\rho = 1$, рис. 8 при $\rho = 0,7$ (изолированы 30%), рис. 9 при $\rho = 0,4$ (изолировано 60%) и рис. 10 $\rho = 0,1$ (изолировано 90%).

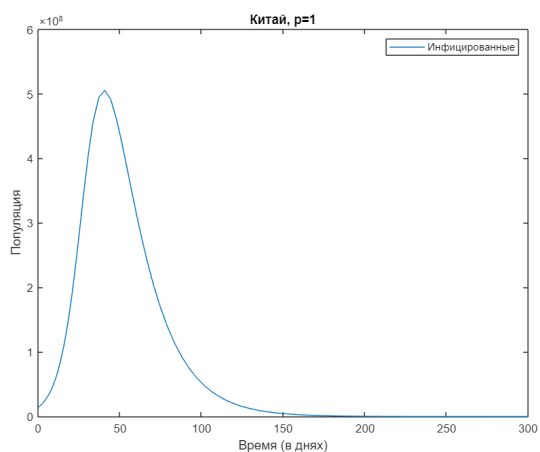


Рис. 7. График распространения COVID-19 при $\rho=1$.

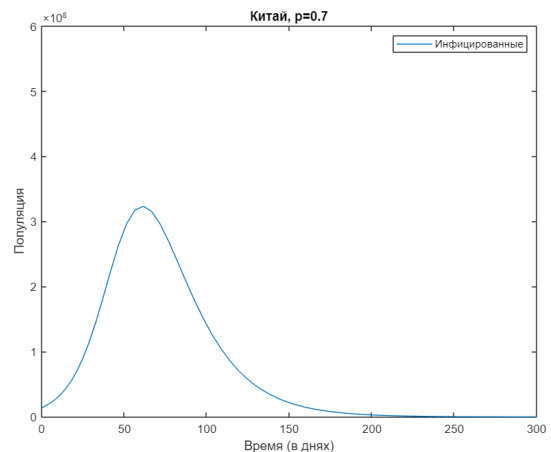


Рис. 8. График распространения COVID-19 при $\rho=0,7$.

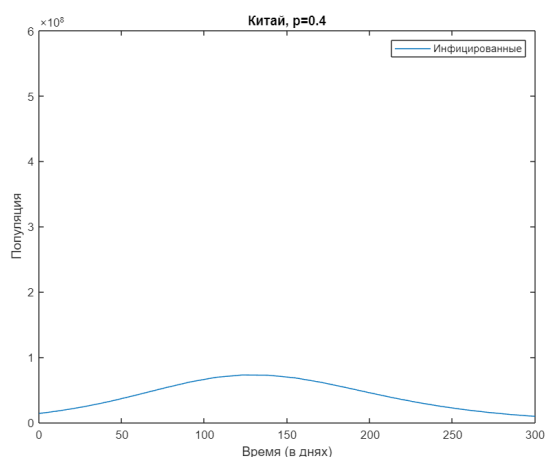


Рис. 9. График распространения COVID-19 при $\rho=0,4$.

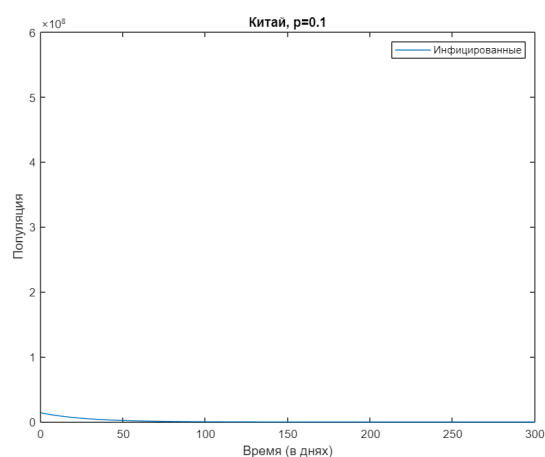


Рис. 10. График распространения COVID-19 при $\rho=0,1$.

В SEIRD-модели рассмотрим, какие изменения будут происходить в классах $E(t)$ и $I(t)$ в зависимости от степени изоляции при начальных условиях $S(0) = 0,99N$, $E(0) = 0$, $I(0) = 0,01N$, $R(0) = 0$, $D(0) = 0$. Рис. 11 соответствует случаю при $\rho = 1$, рис. 12 при $\rho = 0,7$, рис. 13 при $\rho = 0,4$ и рис. 14 $\rho = 0,1$.

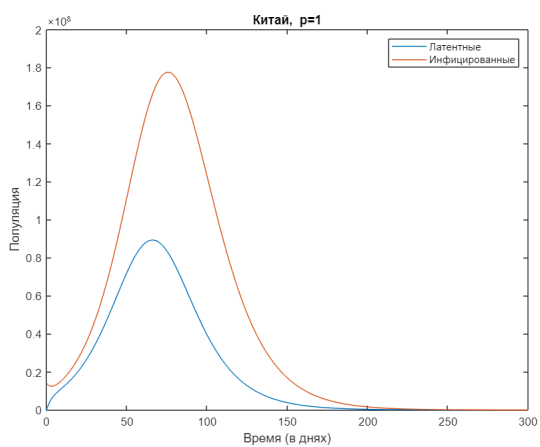


Рис. 11. График распространения COVID-19 при $\rho=1$.

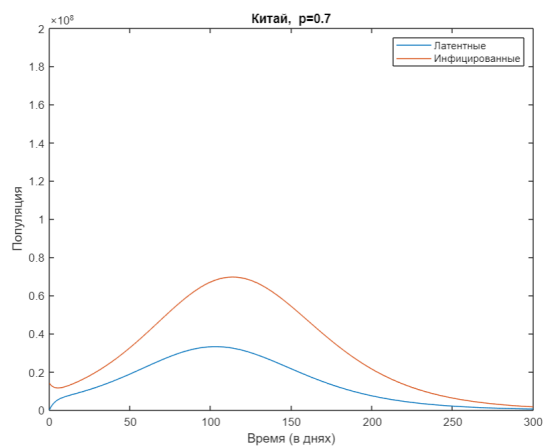


Рис. 12. График распространения COVID-19 при $\rho=0,7$.

Численный эксперимент демонстрирует, что при увеличении количества изолированных людей наблюдается значимое уменьшение числа инфицированных, что качественно влияет на распространении эпидемии.

Кроме того, математическое моделирование не только дает возможность прогнозировать течение эпидемии, но и на основе численного эксперимента подбирать такие объемы предпринимаемых мер, которые одновременно минимальны и эффективны.

Например, с помощью численного моделирования может быть реализован поиск оптимального коэффициента ρ , при котором количество инфицированных не превышает заданного порога.

Проведем исследование на основе SEIRD-модели. Смоделируем распространение вируса, при котором количество инфицированных не должно превышать 5% населения, при

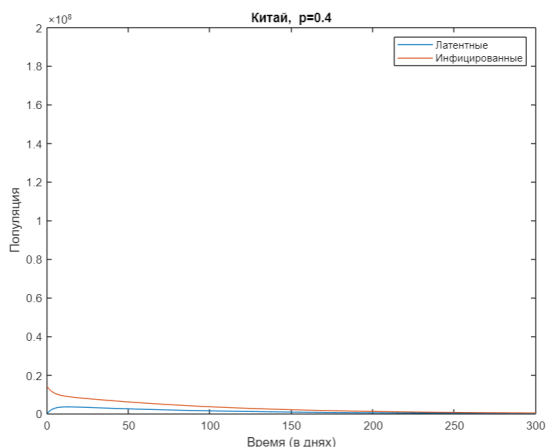


Рис. 13. График распространения COVID-19 при $\rho=0,4$.

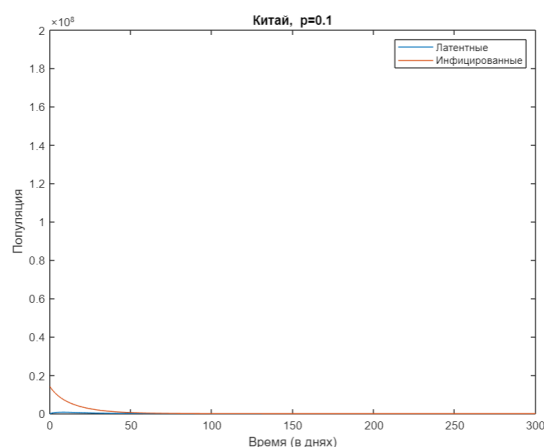


Рис. 14. График распространения COVID-19 при $\rho=0,1$.

условии, что изначально заражен 1% населения. Из рис. 15 видно, что такому максимальному количеству инфицированных людей соответствует значение $\rho = 0,702$. То есть при значении $\beta_1 = \rho\beta = 0,136$ максимальное число заразившихся людей будет равно 70410000 (<5%)

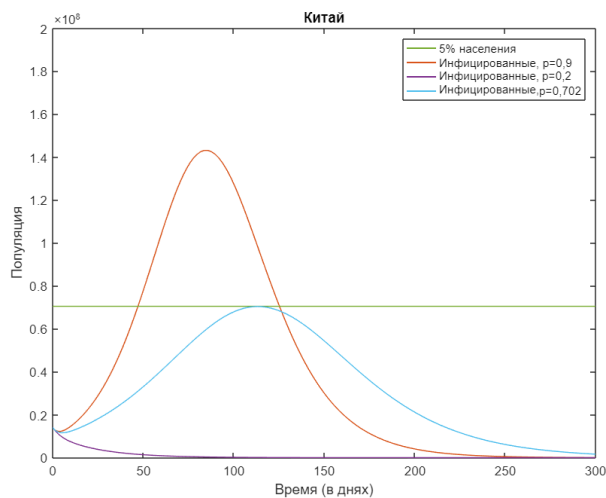


Рис. 15. Распространение COVID-19 при $\rho = 0,9$, $\rho = 0,2$, $\rho = 0,702$.

На основе проделанной работы можно сделать следующие выводы:

- SEIRD-модель по сравнению SIR-моделью точнее описывает распространение инфекции;
- введение карантинных мер качественно меняет распространение эпидемии;
- на основе рассмотренных математических моделей можно проводить не только прогнозирование распространения COVID-19, но и рассчитывать оптимальный показатель изоляции населения по заданным критериям.

Численный эксперимент на основе рассмотренных в статье математических моделей подтверждает пользу карантинных мер и режима самоизоляции. При достаточном ограни-

чений контактов между людьми можно не только сгладить пик эпидемии, но и обеспечить её быстрый спад, что говорит об эффективности подобных мер. Во многом благодаря мерам по изоляции населения к концу марта 2020 года Китаю удалось остановить распространение вируса внутри страны.

Литература

1. Huwen Wang, Zezhou Wang, Yinqiao Dong и др. Phase-adjusted estimation of the number of Coronavirus Disease 2019 cases in Wuhan. China. 2020.
2. Edelstein-Keshet L. Mathematical Models in Biology. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2005.

MSC2020 92C60 37N25

Mathematical modeling of the effectiveness of the initiation of anti-epidemic quarantine measures by the example of the spread of COVID-19

N. I. Eremeeva, I. A. Marasova, A. M. Saveleva

Dimitrovgrad Engineering and Technological Institute of the National Research Nuclear University MEPHI

Abstract: The article presents the results of numerical modeling of the spread of the epidemic based on SIR and SEIRD models. The study examines the matter of changing the parameters of the course of the epidemic when quarantine measures are initiated. In particular, for the SEIRD model, the optimal coefficient reflecting the severity of the quarantine measures was selected numerically.

Keywords: SIR model, SEIRD model, epidemic, quarantine, isolation, COVID-19.

References

1. Huwen Wang, Zezhou Wang, Yinqiao Dong и др. Phase-adjusted estimation of the number of Coronavirus Disease 2019 cases in Wuhan. China. 2020.
2. Edelstein-Keshet L. Mathematical Models in Biology. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2005.