УДК 519.63

Методы сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений в моделировании антенн*

Бойков И. В., Айкашев П. В.

Пензенский государственный университет

Аннотация: Работа посвящена обзору современных математических методов исследования электрических вибраторов и антенн. Отмечено, что основным математическим аппаратом при моделировании антенн являются интегральные уравнения - интегродифференциальное уравнение Поклингтона, интегральное уравнение Галлена, сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения. Показано, что физически и математически корректным аппаратом при моделировании электромагнитных процессов в вибраторе и исследовании электромагнитных полей антенн являются сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения. Представлена литература, в которой описаны методы сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений, используемых при моделировании электромагнитных процессов в антеннах различной топологии. Дан краткий обзор фрактальных антенн и отмечена связь между классическими фракталами и антеннами, построенными по топологии этих фракталов.

Ключевые слова: сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения, проволочные антенны, зеркальные антенны, фрактальные антенны

В настоящее время одним из основных технических средств получения и передачи информации являются антенны, выполненные из различных материалов, имеющие различную топологию и использующие при функционировании различные физические эффекты.

Поэтому исследование антенн является одним из наиболее быстро развивающихся направлений радиотехники. При этом наблюдается возрастающий интерес к построению и исследованию антенн, использующих композитные материалы и метаматериалы, фрактальных, лазерных и генетических антенн. Это связано с необходимостью миниатюризации электронных устройств, в том числе и антенн, как промышленного, так и бытового назначения. При этом антенны должны не только сохранять, но и улучшать свои электромагнитные характеристики. Экспериментальные исследования занимают много времени и обходятся очень дорого. В связи с этим возникает необходимость в разработке аналитических и численных методов анализа и синтеза антенн. При всем разнообразии антенн общим является математический аппарат, используемый при моделировании функционирования антенн - интегродифференциальные уравнения Поклингтона и Харрингтона [1], [2], интегральное уравнение Галлена [3], сингулярные интегральные уравнения [4], [5], [6] и гиперсингулярные интегральные уравнения [6], [7], [8]. В последнее время активно развиваются методы построения фрактальных [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], плазменных [18], [19] и генетических [20] антенн. Для интегродифференциальных уравнений Поклингтона и Харрингтона, интегрального уравнения Галлена, сингулярных интегральных уравнений и гиперсингулярный интегральных уравнений в общем случае не известны аналитические решения. Поэтому основным математическим аппаратом при исследовании антенн являются численные методы.

*Статья подготовлена при финансовой поддержке конкурса "Ректорские гранты договор № 1/РГ от 08.04.2020

Представляет интерес рассмотрение классов интегральных уравнений, используемых при моделировании различных типов антенн, и численных методов их решения.

Этим вопросам посвящена данная работа.

Впервые метод интегральных уравнений для исследования излучения вибратора был использован Поклингтоном [1]. Рассматривается прямолинейный симметричный проволочный вибратор длиной $2l$ с небольшим зазором посередине. Классическое уравнение Поклингтона прямолинейного вибратора имеет вид [21], стр. 222:

$$(k^2 + \frac{d^2}{dz^2}) \int\limits_{-l}^{l} I_z(z')G(a, z - z')dz' = A_z(a, z), \tag{1}$$

где $A_z(a, z)-$ продольная составляющая векторного электродинамического потенциала для электрического тока $I_z(z), 2l-$ длина вибратора, $a-$ радиус вибратора,

$$G(a, z - z') = \frac{1}{4\pi R_a(z - z')} \exp\{-ikR_a(z - z')\}$$

- функция Грина, $R_a(z - z') = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$, $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}/c, \varepsilon$ и $\mu-$ диэлектрическая и магнитная проницаемость среды, окружающая вибратор, $\omega-$ угловая частота, $c-$ скорость света.

Это уравнение соответствует модели тонкого вибратора, работающего на малых частотах. В этом случае ток распределяется по всему поперечному сечению провода и моделируется бесконечно тонкой линией, проходящей через центр цилиндра (провода) и точку разрыва.

Известна [22] следующая модификация уравнения Поклингтона:

$$E_s^r(s) = -\frac{i}{\omega\varepsilon} \int\limits_{s'} I_s(s')[k^2(s \cdot s') + \frac{\partial^2}{\partial s \partial s'}] \frac{e^{-ik|r-r'|}}{4\pi|r - r'|} ds', \tag{2}$$

где E_s^t - тангенциальное наложенное электрическое поле. Учитывая скин-эффект в тонкой проволоке, в уравнении (2) электрическое поле выражается в виде криволитейного интеграла по длине дуги s'.

Уравнение (2) можно использовать при любой топологии тонкой проволочной антенны.

Наряду с уравнением Поклингтона при исследовании вибраторов часто используется уравнение Галлена [3], [23]

$$\int\limits_{-l}^{l} I_z(z')G(a, z - z')dz' = A\cos\beta z + B\sin\beta z - \frac{i2\pi v}{w}\sin\beta|z|, \tag{3}$$

где A и B - произвольные константы, определяемые из граничных условий обращения тока в нуль на концах вибратора; $w = \beta/(\omega\varepsilon)$.

Так как решения уравнений (1)-(3) в аналитическом виде неизвестны, то для их решения широко применяются численные методы. Современные системы автоматического проектирования для решения этих уравнений используют следующие численные методы: метод моментов, конечно-разностные методы, метод конечных элементов. Наиболее широко применяются методы моментов и Галеркина [2], [22], [23], [24].

Уравнения (1)-(3) являются уравнениями Фредгольма первого рода, т.е. их решения некорректны по Адамару. При применении уравнений (1)-(3) к моделированию электромагнитных процессов в вибраторах приходится сталкиваться с проблемой построения методов регуляризации. В качестве алгоритмов регуляризации в работах авторов используется метод локальных невязок [14] и непрерывный метод решения операторных уравнений [17].

В работах [25] и [26] показано, что физически корректным является описание задач радиотехники и связи сингулярными интегральными уравнениями, и представлен алгоритм трансформации уравнения Поклингтона к сингулярным интегральным уравнениям. Сингулярные интегральные уравнения, как первого, так и второго рода (кроме исключительных случаев), являются корректными по Адамару задачами и для их численного решения используется широкий арсенал методов [27]. Такими же свойствами обладают гиперсингулярные интегральные уравнения. Обзор аналитических и численных методов решения последних представлен в [28], [29]. Таким образом, применение сингулярных интегральных уравнений к моделированию антенн является корректным, как с физической, так и с математической точки зрения.

Наряду с вычислительными, при моделировании электрических вибраторов уравнениями Поклингтона, Харрингтона и Галлена возникают следующие проблемы.

В работе [26] показано что определение неизвестного тока по уравнению

$$\int_{-l}^{l} I_z(z')G(a, z-z')dz' = A_z^a(z),$$

где $A_z(z)-$ z-составляющая векторного электродинамического потенциала для электрического тока, определяемая через z-составляющую тока $I_z(z)$ на вибраторе, приводит к несогласованной постановке задачи, т.к. отсутствует предельный переход от поля в ближней зоне к полю (току) на поверхности вибратора. Это связано с использованием при расчете поля функции Грина $G(a, z-z') = \frac{1}{4\pi R_a(z-z')}\exp\{-ikR_a(z-z')\}, R_a(z-z') = \sqrt{(z-z')^2+a^2}$. В статье [26] функция Грина определяется другим выражением, приводящим к моделированию вибратора сингулярным интегральным уравнением.

В работе [8] в уравнениях Поклингтона и Галлена в функции Грина положено $a = 0$. Для решения полученных гиперсингулярных интегральных уравнений предложено несколько приближенных методов.

Сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения широко применяются при моделировании проволочных антенн.

В работах [31], [32] исследованы составные особые уравнения теории проволочных антенн

$$Kx \equiv \frac{a}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} + \frac{b}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{\tau-t} + \frac{c}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-t|x(\tau)d\tau +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} h(t,\tau)d\tau = f(t), t \in (-1,1).$$

Здесь a, b, c - константы.

В нескольких частных случаях получено аналитическое решение приведенного выше уравнения. В общем случае предложен и обоснован приближенный метод.

В работе [33] предложен численно-аналитический метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений и дано приложение этого метода к анализу вибраторных антенн.

В монографии [6] представлены сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения, моделирующие различные антенны (зеркальные с рефлектором произвольной формы, зеркальные с плоским рефлектором, зеркальные с параболическим цилиндрическим рефлектором, полосковые, рамочные) и описаны численные методы их решения.

В последние годы сложилось новое направление в теории антенн - антенны с киральными элементами [34]. Основным математическим аппаратом при исследовании антенн с киральными включениями являются сингулярные интегральные уравнения [35], [36].

Начиная с конца прошлого века активно развиваются методы проектирования и конструирования фрактальных антенн. Это произошло благодаря уникальным характеристикам антенн с фрактальной геометрией. Фрактальные антенны обладают существенными преимуществами по сравнению с другими видами антенн.

Интересно проследить связь между построением фракталов, как математических объектов, и конструированием фрактальных антенн. Большинство фракталов, построенных в первой половине 20 века, получили воплощение в фрактальных антеннах: снежинка Коха - [37], [38]; ("ковер") Серпинского - [39], [40]; кривые Пеано, Гильберта - [41]; совершенное множество Кантора ("пыль"Кантора) - [42].

Подробному изложению методов построения антенн на классических фракталах посвящена глава в книге А.А Потапова [10].

Построение первых фракталов было связано с решением ряда фундаментальных проблем математического анализа, в частности проблемы связи непрерывности и дифференцируемости функций действительной переменной. Как отмечено в [10], первый пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции был построен Б. Больцано в 1830 г., но его рукопись «учение о функции» почти через 100 лет была найдена в Венской государственной библиотеке и опубликована только в 1920 г. В [10] отмечено, что непрерывные нигде не дифференцируемые функции относят к фрактальным функциям (или фракталам).

В 1861 г. К. Вейерштрасс построил функцию

$$f(x) = W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

которая в интервале $(0, 2\pi)$ нигде не дифференцируема. Здесь $0 < a < 1, b > 1-$ нечетное целое число, $ab > 1 + 3\pi/2$. Этот результат был опубликован только в 1875 г.

Позднее усилиями многих математиков было показано, что множество непрерывных функций, дифференцируемых хотя бы в одной точке пренебрежительно мало по сравнению с множеством нигде не дифференцируемых функций. В течение столетия, начиная с функции Римана (1961 г.)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2},$$

которая дифференцируема только в точках вида $\xi\pi$, где ξ – рациональное число с нечетным числителем и знаменателем, до публикации книги Б. Мандельброта [43], был построен ряд непрерывных нигде не дифференцируемых функций. Построение практически каждой такой функции было связано с решением внутренних проблем математики и требовало огромных усилий и изобретательности. После публикации книги Б. Мандельброта [43] идеи и методы фрактальной геометрии стали проникать в различные сферы физики и технологий. В отличии от математиков, многие из которых относились с предубеждением к исследованиям фрактальных функций, физики восприняли новое направление с энтузиазмом. В письме к Ф. Клейну Л. Больцман пишет (цитируется по книге [10]) «в природе существуют такие физические проблемы (статистическая механика), для решения которых не дифференцируемые функции совершенно необходимы, и если бы К. Вейерштрасс не придумал такие функции, то физикам просто не осталось бы ничего другого, как самим их изобрести». Востребованность фракталов в физике и технике стимулировала развитие общих методов их построения. В настоящее время существует несколько методов построения фракталов. Один из них - метод итеративных функций основан на методе сжимающих отображений в банаховых пространствах [44]. Этот метод подробно изложен в [45] стр. 96-126. В частности, представлены алгоритмы построения многих классических фракталов.

Термин "фрактальная антенна"появился впервые в статье [46]. Первые работы по применению фрактальной геометрии при конструировании антенн принадлежат Кохену [47],

[48]. В этих работах элементы фрактальной геометрии вводятся в конструкции стандартных дипольных и рамочных антенн. Это было сделано путем систематического придания проволоке антенны геометрии соответствующего фрактала таким образом, чтобы длина проволки не уменьшалась, а размеры антенны уменьшались с введением каждой следующей итерации. Этот подход позволяет проводить миниатюризации антенн. Были исследованы характеристики антенн, построенных в соответствии с геометрией фракталов Минковского и Коха [37], [47], [48]. Было показано, что характеристики фрактальных антенн Коха превосходят характеристики обычных антенн с прямыми проводами. Это явилось стимулом для разработки технологии быстрой оценки электрических характеристик фрактального диполя [37]. Различные варианты дипольных антенн Коха были представлены в работе [49]. Многодиапазонные фрактальные монопольные антенны, построенные на основе треугольника (салфетки, прокладки) Серпинского, исследовались в работах [39], [50]. В работе [39] представлена антенна, являющаяся пятым предфракталом прокладки Серпинского, построенная на равностороннем треугольнике с вершиной вниз, установленном на металлической подложке. Высота антенны 8.89 см. Переходные характеристики многодиапазонного монополя Серпинского исследованы в [50]. Многосторонние свойства предфракталов пятого порядка салфетки Сперанского исследованы в [40]. Наряду с моноблоками для построения антенн используются фрактальные деревья, причем исследованы двумерные и трехмерные деревья [51]. В конце прошлого столетия началось исследование и производство печатных фрактальных антенн [52], включая монополи Серпинского и Коха.

Моделированию фрактальных антенн с помощью аппарата гиперсингулярных интегральных работ посвящены работы [14], [15]. В них были рассмотрены антенны с геометрией предфракталов «пыли» Кантора, «салфетки» и «ковра» Серпинского второй и третьей итерации.

В настоящее время активно исследуются краевая задача Римана и сингулярные интегральные уравнения на фракталах [53]. На очереди теория гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах и приближенные методы решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах. Развитие этих направлений необходимо для создания математического аппарата исследования задач электродинамики на фракталах.

Литература

1. Pocklington H.C. Electrical Oscillations in Wires // Cambridge Phil. Soc. 1897. pp. 324-332.

2. Harrington R.F. Field Computation by Moment Methods. Macmillan. NY. 1956.

3. Hallen E. Nova Acta Regual Sci. Upsaliensis. 1938. Ser. 4. V. 11.

4. Неганов В. А., Матвеев И. В. Применение сингулярного интегрального уравнения для расчета тонкого электрического вибратора. // Докл. РАН. 2000. 373.1. С. 36-38.

5. Неганов В.А., Корнев М.Г. Применение метода сингулярного интегрального уравнения к анализу рамочной антенны // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2003. Т. 6. № 1. С.41-45.

6. Дементьев А. Н., Клюев Д. С., Неганов В. А., Соколова Ю. В. Сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения в теории зеркальных и полосковых антенн. Монография под ред. Д.С. Клюева. М.: Радиотехника. 2015. 216 с.

7. Клюев Д.С., Соколова Ю.В. Расчет характеристик зеркальных антенн методом гиперсингулярных интегральных уравнений. // Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60, № 1. С. 38-44.

8. Бойков И. В., Тарасов Д. В. Применение гиперсингулярных интегральных уравнений к численному моделированию электрического вибратора // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2008. № 4. С. 94-106.

9. Werner D.H., Gangul S. An Overview of Fractal Antenna. Engineering Research // IEEE Anlennas and Propagation Magazine. 2003. V. 45, N. 1. P. 38-57.

10. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки.–М.: Университетская книга. 2005. 848 с.

11. Потапов А.А. Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Пахомов А.А., Герман В.А. Новейшие методы обработки изображений/ Под редакцией А.А. Потапова. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2008. 496 с.

12. Потапов А. А. Фракталы, скейлинг и дробные операторы в физике и радиотехнике // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2009 № 1. С. 64-108.

13. Ахмед А. Проектирование антенн на основе геометрии фракталов. // Антенны. 2017. № 2. С. 33-39.

14. Бойков И.В., Айкашев П.В. Об одном численном методе синтеза фрактальных антенн // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. №1. С. 51-67.

15. Бойков И.В., Айкашев П.В. К вопросу об анализе и синтезе фрактальных антенн // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2018. №1. С. 92-100.

16. Boykov I.V., Aikashev P.V. To the numerical method for synthesis of fractal antennas // 2019 International Seminar on Electron Devices Desing and Production (SED). Prague, Czech Republic. 23-24 April 2019. P. 119-125.

17. Бойков И. В., Айкашев П.В. Применение непрерывного операторного метода к решению уравнений Поклингтона и Галлена для тонких проволочных антенн // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 3 (55). С. 131 - 150.

18. Пахотин В.А. Излучение электрически короткой антенны из ограниченного объема газоразрядной плазмы // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33, №8. С. 22-29.

19. Гусейн-заде Н.Г., Минаев И.М., Рухадзе К.З. Принципы работы плазменных антенн // Радиотехника и электроника. 2011. Т. 56, № 10. С. 1216-1220.

20. Altsuler E. Electrically Small Self–Resonant wire Antennas Optimized Using a Genetic Algorithm // IEEE Trans Ant Prop. 2003. V. 50, № 3. P. 297-300.

21. Сазонов Д. М. Антенны и устройства СВЧ. М.: Высшая школа. 1988. 434 с.

22. Barrera–Figueroa V., Sosa–Pedroza J., Lopez–Bonilla J. Simplification of Poklington's integral equation for arbitrary bent thin wires // WIT Transactions on Modelling and Simulation. 2005. V. 39. P. 563-574.

23. Вычислительные методы в электродинамике // Под редакцией Р. Митры. М.: Мир. 1977. 488 с.

24. Rawle W.D. The Method of Moments: A Numerical Technique for Wire Antenna Design // Higt Fraquency Electronics. 2006. V. 2. P. 43-47.

25. Неганов, В. А., Матвеев И.В., Медведев С.В. Метод сведения уравнения Поклингтона для электрического вибратора к сингулярному интегральному уравнению // Письма в ЖТФ. 2000. № 12. С.86-94.

26. Неганов, В. А. Сингулярные интегральные уравнения как метод физической регуляризации некорректных электродинамических задач радиотехники и связи // Успехи современной радиотехники. 2005. № 12. С. 16-24.

27. Бойков И.В. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений. Издательство ПГУ. 2004. 316 с.

28. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения М: Янус-К. 2001. 508 с.

29. Бойков И. В. Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений // Динамические системы. 2019. Т. 9(37), №3. С. 244-272.

30. Неганов В. А., Клюев В.С., Ефремова А.А. Сингулярные интегральные представления электромагнитного поля в ближней зоне // Антенны. 2005. № 4 (95). С. 22-26.

31. Лифанов И.К. Ненашев А.С. Исследование некоторых вычислительных схем для гиперсингулярного интегрального уравнения на отрезке // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 9. С. 1270-1275.

32. Лифанов И.К. К решению составных интегральных уравнений // Успехи современной радиоэлектроники. 2006. № 8. С. 62-67.

33. Эминов С.И. Аналитическое обращение гиперсингулярного оператора и его приложение в теории антенн// Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30, №.22. С. 8-16.

34. Неганов В. А., Осипов О.В. Отражающие, волноведущие и излучающие структуры с киральными элементами.- Радио и связь. 2006. 280 с.

35. Нещерет А.М. Применение сингулярных интегральных уравнений для анализа микрополосковых антенн, расположенных на киральной структуре из левовинтовых спиралей//Радиотехника. 2016. №4. С. 118-126.

36. Клюев Д.С., Нещерет А.М. Сингулярные интегральные уравнения для расчета микрополоскового вибратора, расположенного на киральной подложке// Евразийский союз ученых. 2015. № 14. С. 63-66.

37. Tang P. Scaling Property of the Koch Fractal Dipole // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest. 2000. V. 3. pp. 150-153.

38. Puente C., Romeu J., Pous R., Ramis J., Hijazo A. Small but Long Koch Fractal Monopole // IEE Electronics Letters. 1998. pp. 9-10.

39. Puente C., Romeu J., Pous R., Cardama A. On the Behavior of the Sierpinski Multiband Fractal Antenna // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1998. pp. 517-524.

40. Castany J. S., Robert J. R., C. Puente C. Mod-P Sierpinski Fractal Multiband Antenna // Proceedings of the Millennium Conference on Antennas and Propagation. 2000. Davos, Switzerland, April.

41. Anguera J., Puente C., and Soler J., "Miniature Monopole Antenna Based on the Fractal Hilbert Curve," // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest. 2002. V. 4. pp. 546-549.

42. Jaggard D. L. and Jaggard A. D., "Polyadic Cantor Superlattices with Variable Lacunarity" // Opt. Lett. 1997. pp. 145-147.

43. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований. 2002. 656 с.

44. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука. 1965. 520 с.

45. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Техносфера. 2006. 488 с.

46. Ким И., Джаггард Д. Л. Фрактальные случайные решетки // Труды Института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. 1986. Т. 74. № 9. С. 124–126.

47. Cohen N. Fractal Antennas: Part I// Communications Quarterly. 1995. pp. 7-22.

48. Cohen N. Fractal Antennas: Part 2// Communications Quartrrly. 1996. pp. 53-66.

49. Cohen N. Are Fractals Naturally Frequency Invariant Independent // 15 Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnatics (ACES). 1999. V. I. pp. 101-106.

50. Callejon J., Bretones A. R., Gomez M. R. On the Application of Parametric Models to the Transient Analysis of Resonant and Multiband Antennas // IEEE Transactions on Antennas and propagotion. 1998. pp. 312-317.

51. Gianvittorio J. P., Rahmat-Samii Y. Fractal Element Antennas: A Compilation of Configurations with Novel Characteristics // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digesl. 2000. V. 3. pp. 1688-1691.

52. Breden R., Langley R. J. Printed Fractal Antennas // Proceeding of the IEE National Conference on Antennas and Propagation. 1999. pp. 1-4.

53. Кац Б.А., Кац Д.Б. Интегрирование по неспрямляемым дугам и его приложения// Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60, № 1. С. 95-108.

MSC2020 78-03

Methods of singular and hypersingular integral equations in antenna modeling

I.V. Boykov [1], P.V. Aykashev [1]
Penza State University [1]

Abstract: The work is devoted to a review of modern mathematical methods for studying electric vibrators and antennas. It is noted that the main mathematical apparatus for modeling antennas are integral equations - Pocklington's integro-differential equation, Gallen's integral equation, singular and hypersingular integral equations. It is shown that singular and hypersingular integral equations are physically and mathematically correct apparatus for modeling electromagnetic processes in a vibrator and studying electromagnetic fields of antennas. The literature is presented, which describes the methods of singular and hypersingular integral equations used in modeling electromagnetic processes in antennas of various topologies. A brief review of fractal antennas is given and the connection between classical fractals and antennas constructed according to the topology of these fractals is noted.

Keywords: singular and hypersingular integral equations, wire antennas, mirror antennas, fractal antennas

References

1. Pocklington H.C. Electrical Oscillations in Wires *Cambridge Phil. Soc.*, 1897, pp. 324-332.
2. Harrington R.F. Field Computation by Moment Methods. Macmillan. NY. 1956.
3. Hallen E. Nova ActaRegual Sci. Upsaliensis. 1938. S. 4. vol. 11.
4. Neganov vol. A., Matveev I. vol. Application of the singular integral equation for calculating a Thin electric vibrator. *Dokl. RAS.*, 2000, 373, 1, pp. 36-38. (in Russian)
5. Neganov vol. A., Kornev M. G. Application of the singular integral equation method to the analysis of the frame antenna *Physics of wave processes and radio engineering systems*, 2003, Vol. 6, No. 1, pp. 41-45. (in Russian)
6. Dementiev A. N., Klyuev D. S., Neganov vol. A., Sokolova Yu. vol. Singular and hypersingular integral equations in the theory of mirror and strip antennas. Monograph under the editorship of D. S. Klyuyevol. M.: Radio Engineering. 2015. 216 p. (in Russian)
7. Kluev D. S., Sokolova Yu. vol. Calculation of the characteristics of mirror antennas by the method of hypersingular integral equations. *Radio engineering and electronics*, 2015, Vol. 60, No. 1, pp. 38-44.(in Russian)
8. Boikov I. vol., Tarasov D. vol. Application of hypersingular integral equations to numerical modeling of an electric vibrator *News of higher educational institutions. Volga region. Technical science*, 2008, N. 4, pp. 94-106. (in Russian)
9. Werner D.H., Gangul S. An Overview of Fractal Antenna. Engineering Research *IEEE Anlennas and Propagation Magazine*, 2003, vol. 45. N. 1. pp. 38-57.

10. Potapov A. A. Fractals in Radiophysics and radar: The topology of the sample. Moscow: Universitetskaya kniga. 2005. 848 p. (in Russian)

11. Potapov A. A., Gulyaev Yu. vol., Nikitov S. A., Pakhomov A. A., Herman vol. A. Latest image processing methods/ Edited by A. A. Potapovol. - M.: FIZMATLIT. 2008. 496 p. (in Russian)

12. Potapov A. A. Fractals, scaling and fractional operators in physics and radio engineering *Radionics. Nanosystems. Information technology*, 2009, N. 1, pp. 64-108. (in Russian)

13. Ahmed A. Antenna design based on fractal geometry. *Antennae*, 2017, N. 2, pp. 33-39. (in Russian)

14. Boikov I. vol., Aikashev P. vol. On a numerical method for the synthesis of fractal antennas *News of higher educational institutions. Volga region. Physical and mathematical Sciences*, 2017, N. 1, pp. 51-67. (in Russian)

15. Boykov I. vol., Akashev P. vol. To the question about the analysis and synthesis of fractal antennas *University proceedings, Volga region, Technical science*, 2018, N. 1, pp. 92-100. (in Russian)

16. Boykov I. vol., Aikashev P. vol. To the numerical method for synthesis of fractal antennas *2019 International Seminar on Electron Devices Desing and Production (SED)*, Prague, Czech Republic, 23-24 April 2019, pp. 119 -125.

17. Boykov I. vol., P. vol. Akashev the continuous Application of operational method to the solution of the equations of Pocklington and Gallen for thin wire antennas *University proceedings, Volga region, Physical and mathematical sciences, Mathematics*, 2020, N. 3 (55), pp. 131-150. (in Russian)

18. Pakhotin vol. A. Radiation of an electrically short antenna from a limited volume of gas-discharge plasma. 2007. vol. 33. N. 8. pp. 22-29. (in Russian)

19. Huseyn-zade N. G., Minaev I. M., Rukhadze K. Z. Principles of operation of plasma antennas *Radio engineering and electronics*, 2011, vol. 56, N. 10, pp. 1216-1220 (in Russian) .

20. Altsuler E. Electrically Small Self-Resonant Wire Antennas Optimized Using a Genetic Algorithm *IEEE Trans Ant Prop*, 2003, vol. 50, N. 3, pp. 297-300.

21. Sazonov, D. M. Antennas and microwave devices. Moscow: Higher school. 1988. 434 p. (in Russian)

22. Barrera-Figueroa vol., Sosa-Pedroza J., Lopez-Bonilla J. Simplification of Poklington's integral equation for arbitrary bent thin wires *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, 2005, vol. 39, pp. 563-574.

23. Computational methods in electrodynamics Edited by R. Mitra. M.: Mir. 1977. 488 p. (in Russian)

24. Rawle W.D. The Method of Moments: A Numerical Technique for Wire Antenna Design *Higt Fraquency Electronics* 2006, vol. 2, pp. 43-47.

25. Neganov vol. A., Matveev I. vol., Medvedev S. vol. Method for reducing the Pocklington equation for an electric vibrator to a singular integral equation *Technical physics letters*, 2000, N. 12, pp. 86-94. (in Russian)

26. Neganov, vol. A. Singular integral equations as a method of physical regularization of ill-posed electrodynamic problems in radio engineering and communications *Successes of modern radio engineering*, 2005, N. 12, pp. 16-24. (in Russian)

27. Boykov I. vol., An approximate solution of singular integral equations. Publishing house of the University. 2004. 316 p. (in Russian)

28. Vainikko G. M., Lifanov I. K., Poltavsky L. N. Numerical methods in hypersingular integral equations and their applications M: Janus-K. 2001. 508 p. (in Russian)

29. Boykov I. vol. Analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations *Dynamical systems 2019*, vol. 9(37), N. 3, 244-272. (in Russian)

30. Neganov vol. A., Klyuev vol. S., Efremova A. A. Singular integral representations of the electromagnetic field in the near zone *Antennas*, 2005, № 4 (95), pp. 22-26. (in Russian)

31. Lifanov I. K. Nenashev A. S. Investigation of some computational schemes for a hypersingular integral equation on a segment *Differential equations*, 2005, vol. 41, N. 9, pp. 1270-1275. (in Russian)

32. Lifanov I. K. On solving composite integral equations *Advances in modern radio electronics*, 2006, N. 8, pp. 62-67. (in Russian)

33. Eminov S. I. Analytical inversion of the hypersingular operator and its application in antenna theory *Technical physics letters*, 2004, vol. 30, N.22, pp. 8-16. (in Russian)

34. Neganov vol. A., Osipov O. vol. Reflecting, wave-conducting and radiating structures with chiral elements. Radio and communications. 2006. 280 p. (in Russian)

35. Neshcheret A.M. Application of singular integral equations for the analysis of microstrip antennas located on a chiral structure of levovint spirals *Radio Engineering*, 2016, N. 4, pp. 118–126. (in Russian)

36. Klyuev D. S., Neshcheret A.M. Singular integral equations for calculating a microstrip vibrator located on a chiral substrate *Eurasian Union of scientists*, 2015, N. 14, pp. 63-66. (in Russian)

37. Tang P. Scaling Property of the Koch Fractal Dipole *IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest*, 2000, vol. 3, pp. 150-153.

38. Puente C., Romeu J., Pous R., Ramis J., Hijazo A. Small but Long Koch Fractal Monopole *IEE Electronics Letters*, 1998, pp. 9-10,

39. Puente C., Romeu J., Pous R., Cardama A. On the Behavior of the Sierpinski Multiband Fractal Antenna *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1998, pp. 517-524.

40. Castany J. S., Robert J. R., C. Puente C. Mod-P Sierpinski Fractal Multiband Antenna *Proceedings of the Millennium Conference on Antennas and Propagation*, 2000, Davos, Switzerland, April.

41. Anguera J., Puente C., and Soler J., “Miniature Monopole Antenna Based on the Fractal Hilbert Curve,” *IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest*, 2002, vol. 4, pp. 546-549.

42. Jaggard D. L. and Jaggard A. D., “Polyadic Cantor Superlattices with Variable Lacunarity” *Opt. Lett.*, 1997, pp. 145-147.

43. Mandelbrot B. Fractal geometry of nature. Moscow: Institute of computer research. 2002. 656 p. (in Russian)

44. Lyusternik L. A., Sobolev vol. I. Elements of functional analysis. Moscow: Nauka. 1965. 520 p. (in Russian)

45. Kronover R. M. Fractals and chaos in dynamic systems. M.: Technosphere. 2006. 488 p. (in Russian)

46. Kim I. Jaggard D. L. Fractal random lattices *Proceedings institute of electrical and radio electronics engineers*, 1986, vol. 74, N. 9, pp. 124-126. (in Russian)

47. Cohen N. Fractal Antennas: Part I *Communications Quarterly*, 1995, pp. 7-22.

48. Cohen N. Fractal Antennas: Part 2 *Communications Quartrrly*, 1996, pp. 53-66.

49. Cohen N. Are Fractals Naturally Frequency Invariant Independent *15 Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnatics (ACES)*, 1999, vol. 1, pp. 101-106.

50. Callejon J., Bretones A. R., Gomez Martin R. On the Application of Parametric Models to the Transient Analysis of Resonant and Multiband Antennas *IEEE Transactions on Antennas and Propagotion*, 1998, pp. 312-317.

51. Gianvittorio J. P., Rahmat-Samii Y. Fractal Element Antennas: A Compilation of Configurations with Novel Characteristics *IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digesl*, 2000, vol. 3, pp. 1688-1691.

52. Breden R., Langley R. J. Printed Fractal Antennas *Proceeding of the IEE National Conference on Antennas and Propagation*, 1999, pp. 1-4.

53. Katz B. A., Katz D. B. integration over non-straight arcs and its applications *Siberian mathematical journal*, 2019, vol. 60, N. 1, pp. 95-108. (in Russian)