УДК 519.63

Проекционно-итерационные методы решения одного класса гиперсингулярных интегральных уравнений *

Бойков И. В., Айкашев П. В., Бойкова А. И.

Пензенский государственный университет

Аннотация: В работе исследуются итерационно-проекционные методы решения линейных и нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений типа Прандтля. Рассматриваются уравнения Прандтля, определенные на сегменте $[-1,1]$ и на числовой оси $R_1 = (-\infty, \infty)$. Для построения вычислительных схем используются сплайн-коллокационные методы со сплайнами первого порядка. Обоснования сходимости предложенных вычислительных схем основаны на непрерывном методе решения операторных уравнений, позволяющем упростить условия, налагаемые на исходное уравнение. Дополнителной особенностью непрерывного операторного метода является его устойчивость к возмущению коэффицентов и правых частей уравнений.

Ключевые слова: гиперсингулярные интегральные уравнения, уравнение Прандтля, проекционные методы, итерационные методы, непрерывный операторный метод.

1. Введение

Сингулярное интегро-дифференциальное уравнение Прандтля в связи с его многочисленными применениями является предметом исследований многих ученых в прошлом и настоящем столетиях. Рассматриваются два вида уравнений Прандтля – уравнение короткого крыла

$$x(t) - \frac{a(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x'(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = f(t) \tag{1}$$

и уравнение на числовой оси $R_1 = (-\infty, \infty)$

$$x(t) - \frac{a(t)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x'(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = f(t). \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2), в предположении, что $x(\pm 1) = 0$ и $x(\pm\infty) = 0$, могут быть представлены в виде гиперсингулярных интегральных уравнений

$$x(t) - \frac{a(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^2} = f(t), \tag{3}$$

$$x(t) - \frac{a(t)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^2} = f(t) \tag{4}$$

В течении нескольких последних декад исследуются уравнения типа Прандтля [1]

$$\frac{a(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)}{(\tau - t)^2}d\tau + g(t, x(t)) = f(t), \quad |t| < 1, \quad x(\pm 1) = 0 \tag{5}$$

*Статья подготовлена при финансовой поддержке конкурса "Ректорские гранты договор № 1/РГ от 08.04.2020

К уравнениям вида (1) сводятся контактные задачи теории пластин и оболочек, задачи теории упругости для тел с тонкими прослойками [2], [3], задачи гидромеханики [4].

Для решения уравнения (2) с постоянными коэффициентами используются различные методы: точное аналитическое решение однородного уравнения на луче было получено с помощью интегральных преобразований Меллина и Лапласа, для получения точного аналитического решения неоднородного уравнения на луче было использовано преобразование Фурье.

Для приведения уравнения (1) к интегральному уравнению Фредгольма использовались методы аналитического продолжения, метод регуляризации Карлемана-Векуа, методы сведения к бесконечным системам алгебраических уравнений. Проекционным методам решения уравнения (1) посвящены многочисленные работы. Результаты, полученные в 20-40 гг. прошлого столетия, подытожены в монографии [4], в которой имеется обширная библиография. Результаты, полученные во второй половине прошлого столетия, представлены в монографиях [2], [3] и в статьях [5], [6]. Обзор современного состояния проблемы дан в статье [7].

Уравнение вида (5) с граничными условиями (2) находят широкое применение при решении ряда задач механики композитных материалов [8], [9], [10], [11]. Их приближенному решению посвящены работы [12], [1], [13], [14].

2. Проекционные методы решения линейных гиперсингулярных интегральных уравнений на сегменте $[-1,1]$

2.1. Граничные условия $x(\pm 1) = 0$.

В этом разделе рассмотрим достаточно общее гиперсингулярное интегральное уравнение, частным случаем которого является уравнение (3).

Рассмотрим линейное гиперсингулярное интегральное уравнение вида

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} + \int_{-1}^{1}h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \ \ -1<t<1. \tag{6}$$

Разделим сегмент $[-1,1]$ на $2N$ интервалов точками $t_k = -1 + k/N$, $k = 0,1,\ldots,2N$. Будем искать приближенное решение уравнения (6) в виде кусочно-непрерывной функции

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{2N}\alpha_k\varphi_k(t), \tag{7}$$

где $\varphi_k(t), k = 0,1,\ldots,2N,-$ семейство базисных функций, определямых выражениями

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 0, & t_{k-1} \le t \le t_{k-1} + \frac{1}{N^2}, \\ \frac{N^2}{N-2}(t-t_{k-1}) - \frac{1}{N-2}, & t_{k-1} + \frac{1}{N^2} \le t \le t_k - \frac{1}{N^2}, \\ 1, & t_k - \frac{1}{N^2} \le t \le t_k + \frac{1}{N^2}, \\ -\frac{N^2}{N-2}(t-t_{k+1}) - \frac{1}{N-2}, & t_k + \frac{1}{N^2} \le t \le t_{k+1} - \frac{1}{N^2}, \\ 0, & t_{k+1} - \frac{1}{N^2} \le t \le t_{k+1}, \\ 0, & t \in [-1,1]\backslash[t_{k-1}, t_{k+1}], \end{cases} \tag{8}$$

$k = 1,2,\ldots,2N-1$. Для граничных узлов t_k, $k = 0$ и $k = 2N$ соответствующие базисные функции имеют вид

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t \leq -1 + \frac{1}{N^2}, \\ -\frac{N^2}{N-2}(t - t_1) - \frac{1}{N-2}, & -1 + \frac{1}{N^2} \leq t \leq t_1 - \frac{1}{N^2}, \\ 0, & t_1 - \frac{1}{N^2} \leq t \leq t_1, \\ 0, & [-1, 1] \backslash [t_0, t_1]; \end{cases} \tag{9}$$

и

$$\varphi_{2N}(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t \leq t_{N-1} + \frac{1}{N^2}, \\ \frac{N^2}{N-2}(t - t_{N-1}) - \frac{1}{N-2}, & t_{N-1} + \frac{1}{N^2} \leq t \leq 1 - \frac{1}{N^2}, \\ 1, & 1 - \frac{1}{N^2} \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{10}$$

Коэффициенты α_k в (7) определяются из следующей системы алгебраических уравнений

$$a(t_k)x_N(t_k) + b(t_k)\sum_{l=0}^{2N} \alpha_l \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau - t_k)^2} d\tau + \sum_{l=0}^{2N} h(t_k, t_l)\alpha_l \int\limits_{-1}^{1} \varphi_l(\tau) d\tau = f(t_k), \tag{11}$$

$k = 0, 1, \ldots, 2N$.

Обоснование вычислительной схемы (11) проводится в пространстве R_{2N+1} векторов $u = (u_1, \cdots, u_{2N+1})$ с нормой $\|u\|_1 = \max_{1 \leq k \leq 2N+1} |u_k|$. Обоснование базируется на непрерывном методе решения операторных уравнений [15].

2.2. Граничные условия $x(\pm 1) = \infty$.

Рассмотрим линейное гиперсингулярное интегральное уравнение вида

$$\frac{b(t)}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} + \int_{-1}^{1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t), \;\; -1 < t < 1. \tag{12}$$

Разделим сегмент $[-1, 1]$ на $2N$ интервала точками $t_k = -1 + k/N$, $k = 0, 1, \ldots, 2N$. Будем искать приближенное решение уравнения (12) в виде кусочно-непрерывной функции (7) с базисными функциями (8), (9), (10).

Коэффициенты α_k в (7) определяются из следующей системы алгебраических уравнений

$$a(\bar{t}_k)x_N(\bar{t}_k) + b(\bar{t}_k)\sum_{l=0}^{2N} \alpha_l \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau - \bar{t}_k)^2} d\tau + \sum_{l=0}^{2N} h(\bar{t}_k, \bar{t}_l)\alpha_l \int\limits_{-1}^{1} \varphi_l(\tau) d\tau = f(\bar{t}_k), \tag{13}$$

$k = 0, 1, \ldots, 2N$. Здесь $\bar{t}_0 = t_0 + 1/2N, \bar{t}_{2N} = t_{2N} - 1/2N$, $\bar{t}_k = t_k, k = 1, 2, \ldots, 2N - 1$.

Обоснование вычислительной схемы (13) проводится в пространстве R_{2N+1} векторов $u = (u_1, \cdots, u_{2N+1})$ с нормой $\|u\|_1 = \max_{1 \leq k \leq 2N+1} |u_k|$. Обоснование базируется на непрерывном методе решения операторных уравнений [15].

2.3. Приближенное решение уравнения (4)

Рассмотрим уравнение

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} + \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t), \;\; -\infty \leq t \leq \infty. \tag{14}$$

Обозначим через A достаточно большое положительное число и аппроксимируем уравнение (14) следующим гиперсингулярным интегральным уравнением

$$a(t)x(t) + b(t)\int_{-A}^{A}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} + \int_{-A}^{A}h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad -A \le t \le A. \tag{15}$$

Введем узлы $t_k = -A + \frac{A}{N}k,\ \ k = 0,1,...,2N$, и обозначим через Δ_k интервалы $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})\,,\ \ k = 0,1,...,2N-2,\ \Delta_{2N-1} = [t_{2N-1}, t_{2N}]\,.$

Приближенное решение уравнения (15) будем искать в виде сплайна $x_N(t) = \sum\limits_{k=0}^{2N}\alpha_k\varphi_k(t)$, где $\varphi_k(t), k = 0,1,\dots,2N$, – множество базисных функций.

Для узлов $t_k,\ k = 1,\dots,2N-1$, соответствующие базисные функции определяются формулой

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 0, & t_{k-1} \le t \le t_{k-1} + \frac{A}{N^2}, \\ \frac{N^2}{A(N-2)}(t - t_{k-1}) - \frac{1}{N-2}, & t_{k-1} + \frac{A}{N^2} \le t \le t_k - \frac{A}{N^2}, \\ 1, & t_k - \frac{A}{N^2} \le t \le t_k + \frac{A}{N^2}, \\ -\frac{N^2}{A(N-2)}(t - t_{k+1}) - \frac{1}{N-2}, & t_k + \frac{A}{N^2} \le t \le t_{k+1} - \frac{A}{N^2}, \\ 0, & t_{k+1} - \frac{A}{N^2} \le t \le t_{k+1}, \\ 0, & t \in [-A, A]\backslash[t_{k-1}, t_{k+1}]. \end{cases}$$

Для граничных узлов t_k, $k = 0$ и $k = 2N$ соответствующие базисные функции определяются формулами

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1, & -A \le t \le -A + \frac{A}{N^2}, \\ -\frac{N^2}{A(N-2)}(t - t_1) - \frac{1}{N-2}, & -A + \frac{A}{N^2} \le t \le t_1 - \frac{A}{N^2}, \\ 0, & t_1 - \frac{A}{N^2} \le t \le t_1, \\ 0, & [-A, A]\backslash[t_0, t_1]; \end{cases}$$

и

$$\varphi_{2N}(t) = \begin{cases} 0, & -A \le t \le t_{N-1} + \frac{A}{N^2}, \\ \frac{N^2}{A(N-2)}(t - t_{N-1}) - \frac{1}{N-2}, & t_{N-1} + \frac{A}{N^2} \le t \le A - \frac{A}{N^2}, \\ 1, & A - \frac{A}{N^2} \le t \le A. \end{cases}$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из системы алгебраических уравнений

$$a(t_k)\alpha_k + b(t_k)\sum_{l=0}^{2N}\alpha_l\int\limits_{-A}^{A}\frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau - t_k)^2}d\tau + \sum_{l=0}^{2N}\alpha_l h(t_k, t_l)\int\limits_{-A}^{A}\varphi_l(\tau)d\tau = f(t_k), \tag{16}$$

$k = 0,1,\dots,2N.$

Применив к (16) непрерывный метод решения операторных уравнений, получим систему

$$\frac{d\alpha_i\left(u\right)}{du}=\lambda_i\left(a\left(t_i\right)\alpha_i(u)+b\left(t_i\right)\sum_{l=0}^{2N}\alpha_l\left(u\right)\int\limits_{-A}^{A}\frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau-t_i)^2}d\tau+\right. \tag{17}$$

$$\left.+\sum_{l=0}^{2N}h(t_i,t_l)\int\limits_{-A}^{A}\alpha_l\left(u\right)\varphi_l(\tau)d\tau-f(t_i)\right),i=0,...,2N.$$

Коэффициенты $\lambda_i=\pm1,i=0,\ldots,2N$, выбираются из условия отрицательности логарифмической нормы в правой части системы (17).

3. Приближенное решение нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений типа Прандтля.

Приближенное решение уравнения

$$\frac{a\left(t\right)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x\left(\tau\right)}{\left(\tau-t\right)^2}d\tau+g\left(t,x\left(t\right)\right)=f\left(t\right),\ \ |t|<1,\ \ x\left(\pm1\right)=0, \tag{18}$$

будем искать в виде непрерывной функции (7) с базисными функциями (8) (9), (10), коэффициенты которой находятся из системы нелинейных уравнений

$$\frac{a\left(t_k\right)}{\pi}\sum_{l=0}^{2N}\alpha_l\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau-t_k)^2}d\tau+g(t_k,\alpha_k)=f(t_k),\ k=0,1,\ldots,2N. \tag{19}$$

Системе уравнений (19) ставится в соответствие система ОДУ

$$\frac{d\alpha_k(u)}{du}=\gamma_k\left(\frac{a\left(t_k\right)}{\pi}\sum_{l=0}^{2N}\alpha_l(u)\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau-t_k)^2}d\tau+g(t_k,\alpha_k(u))-f(t_k)\right), \tag{20}$$

$k=0,1,\ldots,2N$.

Коэффициенты $\gamma_k=\pm1$, $k=0,1,\ldots,2N$, выбираются таким образом, чтобы логарифмическая норма производной Фреше правой части системы (20) была бы отрицательной в некотором банаховом пространстве.

Для решения системы (20) может быть использован любой численный метод.

Сходимость решения системы (20) к решению уравнения (18) следует из непрерывного метода решения операторных уравнений [15]. Эффективность применения этого метода к решению нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений продемонстрирована в [16].

Литература

1. Capobianco M., Criscuolo G., Junghanns P. On the Numerical Solution of a Nonlinear Integral Equation of Prandtl's Type. // Operator Theory and its Applications. 2005. V. 160.

2. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука. 1983. 487 с.

3. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука. 1986. 334 с.

4. Голубев В.В. Лекции по теории крыла. М.: Л.: Гостехиздат. 1949. 480 с.

5. Каландия А. И. “Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применении в теории упругости”, / Мат. сб. 1957. Т. 42, вып. 2. С. 249–272.

6. Шешко М. А., Расолько Г. А., Мастяница В. С. К приближенному решению интегро-дифференциального уравнения Прандтля // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 9. С. 1550–1560.

7. Сильвестров В. В., Смирнов А. В. Интегро-дифференциальное уравнение Прандтля и контактная задача для кусочно-однородной пластины // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. № 6. С. 951–968.

8. loakimidis N.I. Application of finite-part integrals to the singular integral equations of crack problems in plane and three-dimensional elasticity // Acta Mech. 1982. V. 45. P. 31–47.

9. Kaya A.C. Erdogan F. On the solution of integral equations with strong singularities // Quart. Appl. Math. 1945. V. 45. P. 105–122.

10. Nemat-Nasser S., Hori M. Toughening by partial or full bridging of cracks in ceramics and fiber reinforced composites // Mech. Mat. 1987. V. 6. P. 245–269.

11. Nemat-Nasser S., Hori M., Asymptotic solution of a class of strongly singular integral equations // SIAM J. Appl. Math. 1990. V. 50, N. 3. P. 716–725.

12. Berthold D., Hoppe W., Silbermann A. A fast algorithm for solving the generalize airfoil equation // J. Comp. Appl. Math. 1992. V. 43. P. 185–219.

13. Capobianco M.R. , Criscuolo G., Junghanns P. A fast algorithm for Prandtl’s integro-differential equation // J. Comp. Appl. Math. 1997. V. 77. P. 103–128.

14. Capobianco M.R. , Criscuolo G., Junghanns P., Luther U. Uniform convergence of the collocation method for Prandtl’s integro-differential equation // ANZIAM J. 2000. V. 42. P. 151–168.

15. Бойков И.В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 9. С. 1308–1314.

16. Boykov I.V., Roudnev V.A., Boykova A.I., Baulina O.A. New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations // Applied Numerical Mathematics. 2018. V. 127. P. 280–305.

MSC2020 65R30

Projection-iterative methods for solving one class of hypersingular integral equations

I. V. Boykov, P. V. Aykashev, A. I. Boykova
Penza State University

Abstract: Investigated iterative-projection methods for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations of Prandtl's type. We consider the Prandtl equations defined on the segment $[-1, 1]$ and on the numerical axis $R_1 = (-\infty, \infty)$. To construct computational schemes, spline-collocation methods with first order splines are used. Justification of the convergence of the proposed computational schemes is based on the continuous method for solving operator equations, which makes it possible to simplify the conditions imposed on the original equation. An additional feature of the continuous operator method is its stability against perturbation of the coefficients and the right-hand sides of the equations.

Keywords: hypersingular integral equations, Prandtl equation, projection methods, iterative methods, continuous operator method.

References

1. Capobianco M., Criscuolo G., Junghanns pp. On the numerical solution of a nonlinear Prandtl-type integral equation, *Operator theory and its applications*, 2005, vol. 160.

2. Aleksandrov V. M., Mkhitaryan S. M. Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers. Moscow: Nauka, 1983, 487 pp. (in Russian)

3. Aleksandrov V. M., Kovalenko, E. V. Problems of continuum mechanics with mixed boundary conditions, Moscow: Nauka, 1986, 334 pp. (in Russian)

4. Golubev V. V. Lectures on the theory of the wing. Moscow: L.: Gostekhizdat, 1949, 480 pp. (in Russian)

5. Kalandiya A. I. On a direct method for solving the equation of the wing theory and its application in the theory of elasticity, *Sb. Math.*, 1957, vol. 42, iss. 2, pp. 249–272. (in Russian)

6. Sheshko M. A., Rasolko G. A., Mastianica V. S. To the approximate solution of integro-differential equations of Prandtl, *Differ. equations*, 1993, vol. 29, iss. 9, pp. 1550–1560. (in Russian)

7. Silvestrov V. V., Smirnov A. V. Prandtl's integro-differential equation and contact problem for a piecewise homogeneous plate, *Applied mathematics and mechanics*, 2010, vol. 74, iss. 6, pp. 951–968.(in Russian)

8. Ioakimidis N. I. Application of finite-part integrals to singular integral equations of crack resistance problems in plane and three-dimensional elasticity, *Acta Mech*, 1982, vol. 45, pp. 31–47.

9. Kaya A. C., Erdogan F. On solving integral equations with strong singularities, *Quarts. Applied. Math.*, 1987, vol. 45, pp. 105–122.

10. Nemat-Naser S., Hori M. Strengthening by partial or complete overlap of cracks in ceramics and fiber reinforced composites, *Mekh. Mat.*, 1987, vol. 6, pp. 245–269.

11. Nemat-Nasser S., Hori M. Asymptotic solution of a class of strongly singular integral equations, *SIAM J. Appl. Math.*, 1990, vol. 50, iss. 3, pp. 716–725.

12. Berthold D., Hoppe V., Zilberman A. A fast algorithm for solving the generalized aerodynamic profile equation, *J. Compp. Applied. Math.*, 1992, vol. 43, pp. 185–219.

13. Capobianco M. R. , Criscuolo G., Junghanns P. A fast algorithm for the integro – differential equation of Prandtl, *J. Compp. Applied. Math.*, 1997, vol. 77, pp. 103–128.

14. Capobianco M. R., Criscuolo G., Junghanns P., Luther U. Uniform convergence of the method of collocation for integro-differential equation of Prandtl, *ANZIAM J.*, 2000, vol. 42, pp. 151–168.

15. Boykov I. V. One continuous method of solving nonlinear operator equations, *Differential equations*, 2012, vol. 48. iss. 9, pp. 1308–1314. (in Russian)

16. Boykov I. V., Rudnev V. A., Boykova A. I., Baulina O. A. A new iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations, *Applied numerical mathematics*, 2018, vol. 127, pp. 280–305.