

УДК 517.977

Многокритериальный консенсус в сети линейных агентов

Бирюков Р. С., Бубнова Е. С.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Аннотация: Рассматривается многокритериальная задача достижения обобщённого \mathcal{H}_2 -консенсуса в сети линейных неидентичных агентов с дискретным временем и постоянной топологией связей. Сформулированы достаточные условия существования субоптимального обобщённого \mathcal{H}_2 -консенсуса в терминах LMI. Полученные результаты проиллюстрированы численным моделированием.

Ключевые слова: многоагентная система, консенсус, обобщённая \mathcal{H}_2 -норма.

1. Введение

Исследование условий достижения консенсуса в многоагентных системах привлекает в последние десятилетия все большее число исследователей. Изучение управления многоагентными системами стимулируется многими промышленными приложениями и социальными системами. Среди примеров сетевых систем можно упомянуть многопроцессорные системы передачи и обработки информации, транспортные и логистические сети, системы координированного управления групповым движением летательных и подводных аппаратов и мобильных роботов [1], распределенные системы управления электрическими сетями, нейронные сети, сети генетических и биохимических осцилляторов, большие социальные группы и биологические формации [2].

Целью управления многоагентными системами является достижение коллективного поведения группы агентов через локальное взаимодействие. Фундаментальной задачей управления многоагентными системами является задача достижения консенсуса. Консенсус означает, что состояния или наблюдаемые выходы агентов должны сойтись к общему значению либо к общей заданной траектории. Задачам достижения консенсуса посвящено большое количество работ, некоторые из них перечислены в обзорах [3–5]. Консенсусные алгоритмы широко изучаются в литературе для идентичных многоагентных систем. Однако в практических приложениях гетерогенные многоагентные системы, то есть системы с неидентичной динамикой, имеют более широкое применение, чем однородные системы [6]. Предположение о гетерогенной динамике естественно подходит для таких приложений, как управление надводными или подводными транспортными средствами, а также наземными и воздушными роботами.

Для многоагентных систем помимо достижения консенсуса также существенно, чтобы некоторые величины — так называемые целевые выходы — были ограничены. Вместе с тем представляет интерес рассмотреть задачу достижения консенсуса в сети, когда каждый агент испытывает влияние ограниченного, но неопределённого внешнего воздействия. Такую задачу можно рассматривать как задачу гарантированного достижения консенсуса. Одним из подходов к изучению многоагентных систем, подверженных внешним возмущениям, служит теория \mathcal{H}_∞ -управления [7, 8]. \mathcal{H}_∞ -норма показывает средние значения невязки целевого выхода с течением времени.

Альтернативным подходом является использование в качестве меры неопределённости обобщённой \mathcal{H}_2 -нормы [9–13]. Понятие обобщённой \mathcal{H}_2 -нормы, отвечающее максимальному

уклонению при внешнем возмущении ограниченной энергии, т. е. ограниченной L_2 -нормы, и нулевых начальных условиях, было введено Уилсоном для непрерывных систем в [11], а для дискретных — в [13], где также был получен оптимальный регулятор по выходу. В отличие от \mathcal{H}_∞ -нормы обобщённая \mathcal{H}_2 -норма позволяет говорить о максимальных значениях целевого выхода с течением времени. Также одним из плюсов такого подхода является то, что обобщённая \mathcal{H}_2 -норма "проще" с вычислительной точки зрения.

Работа имеет следующую структуру. Во втором разделе приводятся необходимые сведения из теории графов и теории обобщённой \mathcal{H}_2 -нормы. В третьем разделе рассматривается постановка задачи многокритериального обобщённого \mathcal{H}_2 -консенсуса в сетях с дискретным временем. В четвёртом разделе сформулированы достаточные условия субоптимального в смысле Парето обобщённого \mathcal{H}_2 -консенсуса. В пятом разделе приводятся численные эксперименты, иллюстрирующие полученные теоретические результаты.

2. Предварительные сведения

В настоящем разделе кратко напомним основные теоретические результаты об обобщённой \mathcal{H}_2 -норме для дискретного устойчивого линейного объекта

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bw(k), & x(0) &= 0, \\ z(k) &= Cx(k), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ — состояние, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ — целевой выход, A — шуровская матрица. Пусть выход системы представлен в виде $z = \text{column}(z_1, z_2, \dots, z_m)$, $z_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\sum_{i=1}^m n_i = n_z$ и соответственно $C = \text{column}(C_1, C_2, \dots, C_m)$. Обобщённая \mathcal{H}_2 -норма для системы (1) определяется следующим образом

$$\gamma_{g2} = \sup_{w \in l_2} \frac{\|z\|_{g\infty}}{\|w\|_2} = \sup_{w \in l_2} \frac{\sup_{k \geq 0} \|z(k)\|_{g\infty}}{\|w\|_2} = \sup_{w \in l_2} \frac{\sup_{k \geq 0} \max_{1 \leq i \leq m} |z_i(k)|_2}{\|w\|_2}. \quad (2)$$

Имеет место следующее утверждение [9, 10].

Теорема 1. *Обобщённая \mathcal{H}_2 -норма может быть вычислена как $\inf \gamma^2$ при ограничениях, задаваемых линейными матричными неравенствами*

$$\begin{bmatrix} Y & YA^\top & 0 \\ AY & Y & B \\ 0 & B^\top & I \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} Y & YC_i^\top \\ C_i Y & \gamma^2 I_{n_i} \end{bmatrix} \geq 0, \quad Y = Y^\top \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Свойства сети как объекта управления зависят от характера взаимосвязей между агентами. Для описания структуры взаимодействий вводится граф $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, где \mathcal{V} — множество вершин, а $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ — множество рёбер. Для каждого $i = 1, \dots, N$ вершину $v_i \in \mathcal{V}$ ассоциируем с агентом i . Будем считать, что ребро (v_i, v_j) принадлежит множеству \mathcal{E} , если информация поступает от агента j к агенту i . Предполагается, что в графе нет петель, т. е. $(v_i, v_i) \notin \mathcal{E}$ для всех $i = 1, \dots, N$. Построенный граф называется информационным графом или топологией сети. Многие фундаментальные свойства сетевых систем определяются их топологией и естественно описываются на языке теории графов. Одним из способов представления графа в виде матрицы является матрица смежности $\mathcal{A} = [a_{ij}]$. Элемент a_{ij} — вес ребра (v_i, v_j) — характеризует интенсивность взаимодействия. Также введём матрицу степеней графа $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_N)$, $d_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ и матрицу Лапласа $L = D - \mathcal{A}$. В данной работе предполагается, что информационный граф является связным.

3. Постановка задачи

Рассмотрим многоагентную систему, состоящую из N агентов, динамика каждого из которых описывается разностными уравнениями

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= A_i x_i(k) + B_{1,i} u_i(k) + B_{2,i} w_i(k), \\ y_i(k) &= C_{y,i} x_i(k), \\ z_i^j(k) &= C_{z,i}^j x_i(k), \end{aligned} \quad (4)$$

где $i = 1, \dots, N$ — номер агента, $j = 0, \dots, M$ — номер целевого выхода, $x_i(k) \in \mathbb{R}^{m_i}$ — состояние i -го агента, $y_i(k) \in \mathbb{R}^p$ — измеряемый выход, $z_i^0(k) \in \mathbb{R}^{q^0}$, $z_i^j(k) \in \mathbb{R}^{q^j}$ — целевые выходы, $u_i(k) \in \mathbb{R}^{m_{1,i}}$ — управление, $w_i(k) \in \mathbb{R}^{m_{2,i}}$ — внешнее возмущение, ограниченное по $l_2[0, \infty)$ -норме: $\|w_i\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |w_i(k)|^2 < +\infty$. Предположим, что пары $(A_i, B_{1,i})$ стабилизируемы, а матрицы $B_{1,i}$ имеют полный столбцовый ранг. Последнее предположение носит технический характер и потребуется при доказательстве основной теоремы.

Рассмотрим задачу достижения консенсуса по целевым выходам z_i^0 , $i = 1, \dots, N$, в многоагентной системе (4). Консенсус в сети (4) означает, что выходы z_i^0 агентов должны сойтись к общему значению либо к общей заданной траектории

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |z_i^0(k) - z_l^0(k)| = 0 \quad \forall i, l = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Условие достижения консенсуса (5) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\tilde{z}_i^0(k)| = 0, \quad \tilde{z}_i^0 = z_i^0 - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N z_l^0, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (6)$$

где вспомогательный выход \tilde{z}_i^0 есть отклонение соответствующего целевого выхода от среднего значения.

В данной системе на каждый агент действует некоторое, в общем случае неизвестное, внешнее возмущение, поэтому будем рассматривать задачу гарантированного достижения консенсуса в сети. В качестве критерия достижения консенсуса выберем следующий функционал

$$J_0(u_1, \dots, u_N) = \sup_{\{w_i\} \neq 0} \frac{\max_i \sup_{k \geq 0} |\tilde{z}_i^0(k)|_2}{\sqrt{\|w_1\|_2^2 + \dots + \|w_N\|_2^2}} = \sup_{w \neq 0} \frac{\sup_{k \geq 0} |\zeta_0(k)|_{g_\infty}}{\|w\|_2^2}, \quad (7)$$

здесь $\zeta_0 = \text{column}(\tilde{z}_1^0, \tilde{z}_2^0, \dots, \tilde{z}_N^0)$, $w = \text{column}(w_1, w_2, \dots, w_N)$. Консенсус с минимальным значением критерия (7) будем называть обобщённым \mathcal{H}_2 -консенсусом, поскольку функционал (7) есть обобщённая \mathcal{H}_2 -норма расширенной системы.

Обратимся теперь к синтезу распределённого протокола управления по усреднённым значениям выходов соседних агентов. Введём в рассмотрение динамический регулятор вида

$$\begin{aligned} v_i(k+1) &= A_{r,i} v_i(k) + B_{r,i} \bar{y}_i, \\ u_i(k) &= C_{r,i} v_i(k) + D_{r,i} \bar{y}_i, \end{aligned} \quad \bar{y}_i = \sum_{l=1}^N a_{il} (y_i(k) - y_l(k)), \quad (8)$$

где $v_i(k) \in \mathbb{R}^{m_r}$ — состояние i -го регулятора, a_{il} — элементы матрицы смежности. Матрицы $A_{r,i}$, $B_{r,i}$, $C_{r,i}$, $D_{r,i}$ являются параметрами регулятора, которые подлежат дальнейшему определению. Для каждого агента также введём общую матрицу параметров регулятора по формуле

$$K_i = \begin{bmatrix} A_{r,i} & B_{r,i} \\ C_{r,i} & D_{r,i} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Введём обозначение $\xi = \text{column}(x_1, v_1, x_2, v_2, \dots, x_N, v_N)$, подставим протокол (8) в уравнения (4) и запишем замкнутую систему в новых переменных

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= A_c \xi(k) + B_w w(k), \\ \zeta_j(k) &= C_j \xi(k), \quad j = 0, \dots, M, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} A_c &= A + B_u K \tilde{L} C_y, & A &= \text{diag}(F_{0,1}, F_{0,2}, \dots, F_{0,N}), \\ B_u &= \text{diag}(E_1, E_2, \dots, E_N), & B_w &= \text{diag}(B_{w,1}, B_{w,2}, \dots, B_{w,N}), \\ C_y &= \text{diag}(F_{y,1}, F_{y,1}, \dots, F_{y,N}), & K &= \text{diag}(K_1, K_2, \dots, K_N), \end{aligned} \quad (11)$$

$$C_0 = \left(\left(I_N - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^\top \right) \otimes I_{q^0} \right) \text{diag} \left(\begin{bmatrix} C_{z,1} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{z,2} & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} C_{z,N} & 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$F_{0,i} = \begin{bmatrix} A_i & 0_{m_i \times m_{r,i}} \\ 0 & 0_{m_{r,i} \times m_{r,i}} \end{bmatrix}, \quad E_i = \begin{bmatrix} 0_{m_i \times m_{r,i}} & B_{1,i} \\ I_{m_{r,i}} & 0_{m_{r,i} \times m_{1,i}} \end{bmatrix}, \quad F_{y,i} = \begin{bmatrix} 0 & I_{m_{r,i}} \\ C_{y,i} & 0_{p \times m_{r,i}} \end{bmatrix},$$

$$B_{w,i} = \begin{bmatrix} B_{2,i} \\ 0_{m_{r,i} \times m_{2,i}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{L} = \begin{bmatrix} I_{m_{r,1}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & l_{11} I_p & 0 & l_{12} I_p & \dots & 0 & l_{1N} I_p \\ 0 & 0 & I_{m_{r,2}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & l_{21} I_p & 0 & l_{22} I_p & \dots & 0 & l_{2N} I_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I_{m_{r,N}} & 0 \\ 0 & l_{N1} I_p & 0 & l_{N2} I_p & \dots & 0 & l_{NN} I_p \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Целевые выходы $\zeta_j(k)$ представляют собой линейные комбинации j -х целевых выходов $z_i^j(k)$ агентов и/или объединения целевых выходов $z_i^j(k)$ в один столбец, и для каждого j матрицы C_j строятся соответствующим образом из матриц агентов $C_{z,i}^j$.

Отметим, что в частном случае система (10) может описывать консенсус по нескольким различным целевым выходам. В этом случае матрица C_j строится аналогично матрице C_0 , а именно

$$C_j = \left(\left(I_N - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^\top \right) \otimes I_{q^j} \right) \text{diag} \left(\begin{bmatrix} C_{z,1}^j & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{z,2}^j & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} C_{z,N}^j & 0 \end{bmatrix} \right). \quad (13)$$

В этом случае предполагается, что размерности соответствующих целевых выходов равны $q_1^j = \dots = q_N^j = q^j$.

В качестве другого частного случая можно рассмотреть объединение всех целевых выходов в один столбец $\zeta_j = \text{column}(z_1^j, z_2^j, \dots, z_N^j)$, тогда матрица C_j строится следующим образом

$$C_j = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} C_{z,1}^j & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{z,2}^j & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} C_{z,N}^j & 0 \end{bmatrix} \right). \quad (14)$$

Таким образом, многоагентная система приведена к уравнениям, с которыми в дальнейшем удобно работать, при этом целевой выход ζ_0 позволяет говорить о достижении консенсуса в сети.

Влияние возмущения на j -й целевой выход характеризуется функционалом

$$J_j(K) = \sup_{w \neq 0} \frac{\|\zeta_j\|_{g^\infty}}{\|w\|_2}, \quad j = 0, \dots, M. \quad (15)$$

Поставим многокритериальную задачу синтеза закона управления (8), который будет оптимальным по отношению ко всем целевым функционалам (15). Ключевым понятием в многокритериальной оптимизации является множество Парето. В данном случае множество $\mathcal{P} = \{K_P\}$ является оптимальным по Парето, если неравенства $J_j(K) \leq J_j(K_P)$, $j = 0, \dots, M$, в которых, по меньшей мере, одно является строгим, не выполняются для любой матрицы K . Задача состоит в характеристизации множества оптимальных по Парето решений

$$K_P = \arg \min_K \{J_j(K), j = 0, \dots, M\}, \quad (16)$$

при которых замкнутая система в отсутствии возмущений асимптотически устойчива.

Для решения многокритериальной задачи, следуя подходу, изложенному в [9], определим вспомогательный функционал

$$J_\alpha(K) = \max_{0 \leq j \leq M} \{J_j(K)/\alpha_j\}, \quad \sum_{j=0}^M \alpha_j = 1, \quad \alpha_j > 0, \quad j = 0, \dots, M, \quad (17)$$

представляющий собой свёртку Гермейера функционалов $J_j(K)$, определённых по формуле (15). Тогда оптимальные по Парето решения в пространстве критериев $J_j(K)$, $j = 0, \dots, M$, следует искать среди оптимальных решений для целевого функционала $J_\alpha(K)$ [9]. Данный подход позволяет свести задачу многокритериальной оптимизации к набору однокритериальных задач.

4. Основной результат

Для формулировки достаточных условий достижения обобщённого \mathcal{H}_2 -консенсуса в рассматриваемой задаче определим несколько вспомогательных матриц, свойства которых используются в дальнейшем при доказательстве теоремы. Во-первых, построим блочно-диагональную матрицу

$$V = \text{diag}(V_1, V_2, \dots, V_N), \quad (18)$$

где $V_i \in \mathbb{R}^{(m_i+m_{r,i}) \times (m_i+m_{r,i})}$ — невырожденные матрицы, удовлетворяющие соотношению

$$V_i E_i = \begin{bmatrix} I_{m_{1,i}+m_{r,i}} \\ 0_{(m_i-m_{1,i}) \times (m_{1,i}+m_{r,i})} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Отметим, что такое построение возможно, поскольку матрицы $B_{1,i}$ имеют полный столбцовый ранг. Во-вторых, определим матрицы

$$\bar{A} = VAV^{-1}, \quad \bar{B}_w = VB_w, \quad \bar{C}_y = C_y V^{-1}, \quad \bar{C}_{j,s} = C_{j,s} V^{-1}, \quad (20)$$

где $j = 0, \dots, M$, $s = 1, \dots, n_j$, $C_j = \text{column}(C_{j,1}, C_{j,2}, \dots, C_{j,n_j})$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что матрицы $X = X^\top \succ 0$ и Q , удовлетворяющие условиям*

$$\begin{aligned} X &= \text{diag}(X_1, X_2, \dots, X_N), & X_i &= \begin{bmatrix} X_i^1 & 0 \\ 0 & X_i^2 \end{bmatrix}, & Q_i &= \begin{bmatrix} Q_i^1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ Q &= \text{diag}(Q_1, Q_2, \dots, Q_N), & & & & \\ X_i^1 &\in \mathbb{R}^{(m_{1,i}+m_{r,i}) \times (m_{1,i}+m_{r,i})}, & X_i^2 &\in \mathbb{R}^{(m_i-m_{1,i}) \times (m_i-m_{1,i})}, & & \\ Q_i &\in \mathbb{R}^{(m_i+m_{r,i}) \times (p+m_{r,i})}, & Q_i^1 &\in \mathbb{R}^{(m_{1,i}+m_{r,i}) \times (p+m_{r,i})}, & & \end{aligned} \quad (21)$$

являются решениями задачи полуопределённого программирования

$$\inf \gamma^2 \left[\begin{array}{ccc} X & (X\bar{A} + Q\tilde{L}\bar{C}_y)^\top & 0 \\ (X\bar{A} + Q\tilde{L}\bar{C}_y) & X & X\bar{B}_w \\ 0 & \bar{B}_w^\top & I \end{array} \right] \geq 0, \quad \left[\begin{array}{cc} X & \bar{C}_{j,s}^\top \\ \bar{C}_{j,s} & \gamma^2 \alpha_j^2 I \end{array} \right] \geq 0, \quad \begin{array}{l} j = 0, \dots, M, \\ s = 1, \dots, n_j, \end{array} \quad (22)$$

где $0 < \alpha_j < 1$ и $\alpha_0 + \dots + \alpha_M = 1$. Тогда существует динамический протокол вида (8) с параметрами (9)

$$K_i = (X_i^1)^{-1} Q_i^1, \quad i = 1, \dots, N, \quad (23)$$

обеспечивающий в сети (4) достижение субоптимального в смысле Парето обобщённого \mathcal{H}_2 -консенсуса.

Доказательство. Отметим, что при доказательстве теоремы используются некоторые идеи и технические моменты, которые почерпнуты из статьи [8]. Подставим матрицы (11), (12) замкнутой системы (10) в неравенства, обеспечивающие оптимальные по Парето управления в многокритериальной задаче

$$\left[\begin{array}{ccc} Y & Y(A + B_u K \tilde{L} C_y)^\top & 0 \\ (A + B_u K \tilde{L} C_y)Y & Y & B_w \\ 0 & B_w^\top & I \end{array} \right] \geq 0, \quad \left[\begin{array}{cc} Y & Y C_{j,s}^\top \\ C_{j,s} Y & \gamma^2 \alpha_j^2 I \end{array} \right] \geq 0, \quad \begin{array}{l} j = 0, \dots, M, \\ s = 1, \dots, n_j, \end{array} \quad (24)$$

где $Y = Y^\top \geq 0$.

Заметим, что получившиеся в результате подстановки матричные неравенства являются нелинейными, так как содержат произведения неизвестных матриц Y и K . Чтобы преобразовать матричные неравенства в линейные, для которых существуют эффективные алгоритмы решения, сделаем ряд упрощающих предположений, в результате чего получим лишь достаточные условия обобщённого \mathcal{H}_2 -консенсуса в сетях гетерогенных агентов.

Домножим первое неравенство (24) слева и справа на матрицу $\text{diag}(Y^{-1}, Y^{-1}, I)$, а второе неравенство домножим слева и справа на $\text{diag}(Y^{-1}, I)$

$$\left[\begin{array}{ccc} Y^{-1} & (A + B_u K \tilde{L} C_y)^\top Y^{-1} & 0 \\ Y^{-1}(A + B_u K \tilde{L} C_y) & Y^{-1} & Y^{-1} B_w \\ 0 & B_w^\top Y^{-1} & I \end{array} \right] \geq 0, \quad \left[\begin{array}{cc} Y^{-1} & C_{j,s}^\top \\ C_{j,s} & \gamma^2 \alpha_j^2 I \end{array} \right] \geq 0, \quad (25)$$

где $j = 0, \dots, M, s = 1, \dots, n_j$. Первое упрощающее предположение заключается в том, что неизвестную матрицу Y можно выбрать в виде

$$Y^{-1} = V^\top X V, \quad (26)$$

где новая переменная X имеет вид (21), а матрица V определена по формулам (18), (19). Чтобы упростить (25) сделаем следующие преобразования. Во-первых, заметим, что

$$V_i E_i K_i = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} (X_i^1)^{-1} Q_i^1 = \begin{bmatrix} (X_i^1)^{-1} Q_i^1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X_i^1)^{-1} & 0 \\ 0 & (X_i^2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_i^1 \\ 0 \end{bmatrix} = X_i^{-1} Q_i, \quad (27)$$

здесь конечный результат получен благодаря второму упрощающему предположению о том, что матрицы X_i и Q_i имеют вид (21). Во-вторых, используя результат преобразования (27), выражение VB_uK можно упростить:

$$VB_uK = \text{diag}(V_1E_1K_1, \dots, V_NE_NK_N) = \text{diag}(X_1^{-1}Q_1, \dots, X_N^{-1}Q_N) = X^{-1}Q. \quad (28)$$

Наконец, блок (2, 1) первого неравенства (25) после подстановки (26) и с учётом (28) может быть записан как

$$\begin{aligned} Y^{-1}(A + B_uK\tilde{L}C_y) &= V^\top XV(A + B_uK\tilde{L}C_y) = \\ &= V^\top(XVAV^{-1} + XVB_uK\tilde{L}C_yV^{-1})V = V^\top(X\bar{A} + Q\tilde{L}\bar{C}_y)V, \end{aligned} \quad (29)$$

а блок (2, 3) первого неравенства (25) примет вид

$$Y^{-1}B_w = V^\top XVB_w = V^\top X\bar{B}_w. \quad (30)$$

С учётом преобразований (27) – (30) неравенства (25) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} V^\top XV & V^\top(X\bar{A} + Q\tilde{L}\bar{C}_y)^\top V & 0 \\ V^\top(X\bar{A} + Q\tilde{L}\bar{C}_y)V & V^\top XV & V^\top X\bar{B}_w \\ 0 & \bar{B}_w^\top XV & I \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} V^\top XV & V^\top \bar{C}_{j,s}^\top \\ \bar{C}_{j,s}V & \gamma^2 \alpha_j^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (31)$$

где $j = 0, \dots, M$, $s = 1, \dots, n_j$. После домножения первого неравенства (31) слева на $\text{diag}(V^{-\top}, V^{-\top}, I)$ и справа на $\text{diag}(V^{-1}, V^{-1}, I)$, а второго неравенства слева и справа на $\text{diag}(V^{-\top}, I)$ и $\text{diag}(V^{-1}, I)$ соответственно приходим к неравенствам (22).

Доказательство завершено.

5. Численное моделирование

С целью иллюстрации полученных выше теоретических результатов рассмотрим сеть из четырёх агентов. Топология сети описывается ориентированным связным графом, который изображён на рисунке 1.

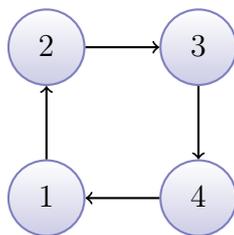


Рис. 1. Граф взаимодействия агентов.

Приведём соответствующие данному графу матрицу смежности и матрицу Лапласа

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Матрицы динамики агентов имеют вид

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.0 \\ 0.0 & 0.9 \end{bmatrix}, & B_{1,1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & B_{2,1} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & C_{z,1}^0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^\top, & C_{y,1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^\top, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.0 & 0.9 \end{bmatrix}, & B_{1,2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & B_{2,2} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & C_{z,2}^0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^\top, & C_{y,2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^\top, \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 1.0 & 0.1 & 0.1 \\ -0.2 & 1.0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 1.4 \end{bmatrix}, & B_{1,3} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & B_{2,3} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & C_{z,3}^0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^\top, & C_{y,3} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^\top, \\
 A_4 &= \begin{bmatrix} 1.0 & 0.1 & 0.1 & 0.0 \\ -0.2 & 1.0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.0 & 0.1 & 1.2 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}, & B_{1,4} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & B_{2,4} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & C_{z,4}^0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^\top, & C_{y,4} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, \\
 C_{z,i}^1 &= C_{y,i}, & i &= 1, \dots, 4.
 \end{aligned} \tag{33}$$

В результате решения неравенств (22) с помощью математического пакета Matlab были получены оценки значений обобщённой \mathcal{H}_2 -нормы для $\alpha_0 \in (0, 1)$, $\alpha_1 = 1 - \alpha_0$, на основании которых построено субоптимальное множество Парето, что приведено на рисунке 2.

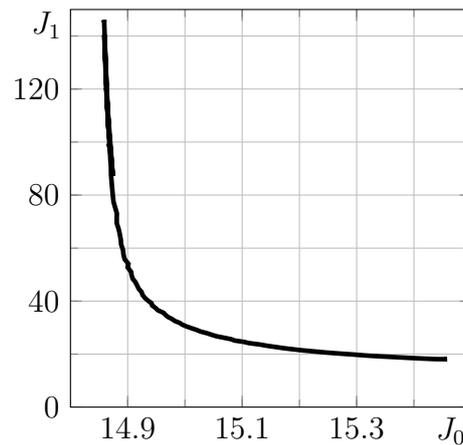


Рис. 2. Кривая Парето.

В результате решения неравенств (22) с параметрами свёртки $\alpha_0 = 0.75$, $\alpha_1 = 0.25$ были получены оценки значений целевых функционалов

$$J_0 = 15.4554, \quad J_1 = 18.0827, \tag{34}$$

а также матрицы обратной связи

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \begin{bmatrix} -0.0969 & -0.1319 \\ -0.4158 & -0.0194 \end{bmatrix}, & K_2 &= \begin{bmatrix} 0.0003 & -0.0004 \end{bmatrix}, \\
 K_3 &= \begin{bmatrix} 0.1665 & 0.0077 \\ -0.3850 & -0.0179 \end{bmatrix}, & K_4 &= \begin{bmatrix} -1.2566 & 0.0475 \\ 1.0444 & -0.1528 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Для численного моделирования системы, замкнутой построенным регулятором, в качестве внешних возмущений выберем функции

$$w_i(k) = (-1)^k (\sin(0.2\pi ik) + 0.2i)e^{-0.1k}. \tag{36}$$

На рисунке 3 представлены графики переходных процессов в системе (33), замкнутой регулятором (35), под действием внешнего возмущения (36) и с нулевыми начальными условиями. Как видно, с течением времени отклонения целевых выходов агентов от среднего значения стремятся к нулю, что говорит о достижении консенсуса в сети.

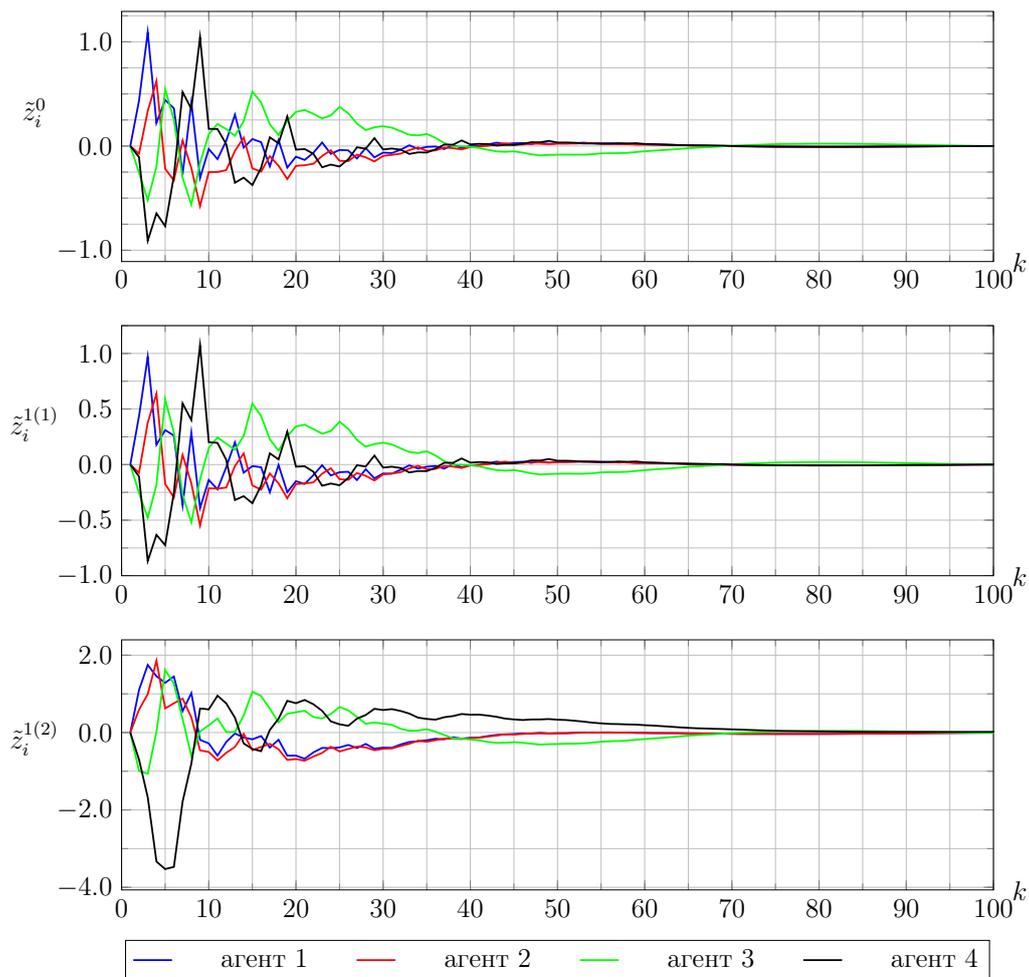


Рис. 3. Графики отклонения целевых выходов агентов от среднего значения в системе (33), замкнутой субоптимальным регулятором (35), с нулевыми начальными условиями и внешними возмущениями (36).

6. Заключение

В работе сформулированы достаточные условия решения многокритериальной задачи достижения обобщённого H_2 -консенсуса в сети неидентичных дискретных линейных агентов с постоянной топологией связей. Возможность применения полученных теоретических результатов показана с помощью численного моделирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект №0729-2020-0055) и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

Литература

1. Michael N., Fink J., Kumar V. Cooperative manipulation and transportation with aerial robots. *Autonomous Robots*. 2011. vol. 30. No. 1. pp. 73–86.
2. Okubo A. Dynamical aspects of animal grouping: Swarms, schools, flocks, and herds. *Advances in Biophysics*. 1986. vol. 22. pp. 1–94.
3. Olfati-Saber R., Fax J.A., Murray R.M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*. 2007. vol. 95. No. 1. pp. 215–233.
4. Antonelli G. Interconnected dynamic systems: An overview on distributed control. *IEEE Control Systems Magazine*. 2013. vol. 33, No. 1. pp. 76–88.
5. Kia S. S., Scoy B. Van, Cortes J., Freeman R. A., Lynch K. M., Martinez S. "Tutorial on dynamic average consensus: The problem, its applications, and the algorithms," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 39, No. 3. pp. 40–72, Jun. 2019.
6. Rezaei M.H., Menhaj M.B., Stationary average consensus protocol for a class of heterogeneous high-order multi-agent systems with application for aircraft, *Int. J. Syst. Sci.* 2018. vol. 49. No. 10. pp. 1–15.
7. Lin P., Jia Y.M. Distributed robust H_∞ consensus control in directed networks of agents with time-delay. *Systems and Control Letters*. 2008. vol. 57, No. 8. pp. 643–653.
8. Gao L., Tong C., Wang L. H_∞ Dynamic Output Feedback Consensus Control for Discrete-Time Multi-Agent Systems with Switching Topology, 2013.
9. Баландин Д. В., Коган М. М. Оптимальное по Парето обобщённое H_2 -управление и задачи виброзащиты // *Автоматика и телемеханика*, 2017, № 8, С. 76–90.
10. Balandin D.V., Kogan M.M. Multi-objective generalized H_2 control // *Automatica*. 2019. vol. 99, No. 1, pp. 317-322.
11. Wilson D.A. Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1989. vol. 34. pp. 94–97.
12. Wilson D.A. Extended Optimality Properties of the Linear Quadratic Regulator and Stationary Kalman Filter // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1990. vol. 35. pp. 583-585.
13. Wilson D.A., Nekoui M.A., Halikias G.D. An LQR weight selection approach to the discrete generalized H_2 control problem // *Int. J. Control*. 1998. vol. 71. No. pp. 93–101.

MSC2020 93A16

Multi-objective consensus for linear multi-agent systems

R. S. Biryukov , E. S. Bubnova

Lobachevsky State University of Nizhniy Novgorod

Abstract: We consider the multi-objective generalized \mathcal{H}_2 -consensus problem for discrete-time linear heterogeneous multi-agent systems subjected to external disturbances. The interaction topology among the agents is assumed to be constant and undirected. A sufficient condition in terms of linear matrix inequalities is proposed to solve the considered consensus problem. Finally, a simulation example is given to illustrate the obtained theoretical result.

Keywords: multi-agent systems, consensus, generalized \mathcal{H}_2 -norm.

References

1. Michael N., Fink J., Kumar V. Cooperative manipulation and transportation with aerial robots. *Autonomous Robots*. 2011. vol. 30. No. 1. pp. 73–86.
2. Okubo A. Dynamical aspects of animal grouping: Swarms, schools, flocks, and herds. *Advances in Biophysics*. 1986. vol. 22. pp. 1–94.
3. Olfati-Saber R., Fax J.A., Murray R.M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*. 2007. vol. 95. No. 1. pp. 215–233.
4. Antonelli G. Interconnected dynamic systems: An overview on distributed control. *IEEE Control Systems Magazine*. 2013. vol. 33, No. 1. pp. 76–88.
5. Kia S. S., Scoy B. Van, Cortes J., Freeman R. A., Lynch K. M., Martinez S. “Tutorial on dynamic average consensus: The problem, its applications, and the algorithms,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 39, No. 3. pp. 40–72, Jun. 2019.
6. Rezaei M.H., Menhaj M.B., Stationary average consensus protocol for a class of heterogeneous high-order multi-agent systems with application for aircraft, *Int. J. Syst. Sci.* 2018. vol. 49. No. 10. pp. 1–15.
7. Lin P., Jia Y.M. Distributed robust H_∞ consensus control in directed networks of agents with time-delay. *Systems and Control Letters*. 2008. vol. 57, No. 8. pp. 643–653.
8. Gao L., Tong C., Wang L. H_∞ Dynamic Output Feedback Consensus Control for Discrete-Time Multi-Agent Systems with Switching Topology, 2013.
9. Balandin D. V., Kogan M. M. Pareto optimal generalized H_2 -control and vibroprotection problems. *Autom. Remote Control*, 78:8 (2017), 1417–1429.
10. Balandin D.V., Kogan M.M. Multi-objective generalized H_2 control. *Automatica*. 2019. vol. 99, No. 1, pp. 317–322.
11. Wilson D.A. Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems. *IEEE Trans. Autom. Control*. 1989. vol. 34. pp. 94–97.

12. Wilson D.A. Extended Optimality Properties of the Linear Quadratic Regulator and Stationary Kalman Filter. IEEE Trans. Autom. Control. 1990. vol. 35. pp. 583-585.
13. Wilson D.A., Nekoui M.A., Halikias G.D. An LQR weight selection approach to the discrete generalized H_2 control problem. Int. J. Control. 1998. vol. 71. No. 1. pp. 93–101.