УДК 517.956.225; 517.544.8; 517.583

О суммировании рядов с помощью решения задачи Дирихле для прямоугольника *

Алексеева Е. С., Рассадин А. Э.

Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова [1], Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"[2]

Аннотация: В работе представлен метод получения новых тождеств для полного эллиптического интеграла первого рода. В основе этого метода лежит построение точного решения задачи Дирихле для прямоугольника при специальном выборе граничного условия, вычисление значений этого точного решения в специально подобранных внутренних точках этого прямоугольника и последующее сравнение их с значениями решения той же задачи, полученного методом разделения переменных, в тех же точках. Количество этих новых тождеств определяется запасом известных значений используемого точного решения.

Ключевые слова: конформное отображение, эллиптические функции Якоби, модуль полного эллиптического интеграла, обратная функция, числовые и функциональные ряды.

1. Построение специального решения задачи Дирихле на прямоугольнике

Рассмотрим двумерное уравнение Лапласа на прямоугольнике $D = (-a/2, a/2) \times (0, b)$:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0\,, \qquad (x, y) \in D\,. \tag{1}$$

с граничным условием, выражающимся через эллиптический косинус с модулем k $(0 < k < 1)$ следующим образом:

$$\Psi(x, 0) = cn\left(\frac{2\,\mathbf{K}(k)\,x}{a}, k\right), \quad \Psi(x, b) = 0\,, \quad \Psi(-a/2, y) = 0\,, \quad \Psi(a/2, y) = 0\,, \tag{2}$$

где

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)\,(1-k^2\zeta^2)}} \tag{3}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода [1, 2].

Как хорошо известно [1, стр. 171], конформное отображение прямоугольника D плоскости $z = x + iy$ на верхнюю полуплоскость $\Im w > 0$ плоскости $w = u + iv$ с соответствием точек $A_j \leftrightarrow B_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, представленным на рис. 1, выражается через эллиптический синус:

$$w = sn\left(\frac{2\,\mathbf{K}(k)\,z}{a}, k\right), \tag{4}$$

*Работа А.Э. Рассадина поддержана РФФИ, грант № 18-08-01356-а.

причём его модуль k определяется по сторонам a и b прямоугольника D соотношением [1, стр. 673]:

$$s(k) \equiv \frac{\mathbf{K}(k')}{\mathbf{K}(k)} = \frac{2\,b}{a}\,, \tag{5}$$

где $k' = \sqrt{1-k^2}$ — дополнительный модуль.

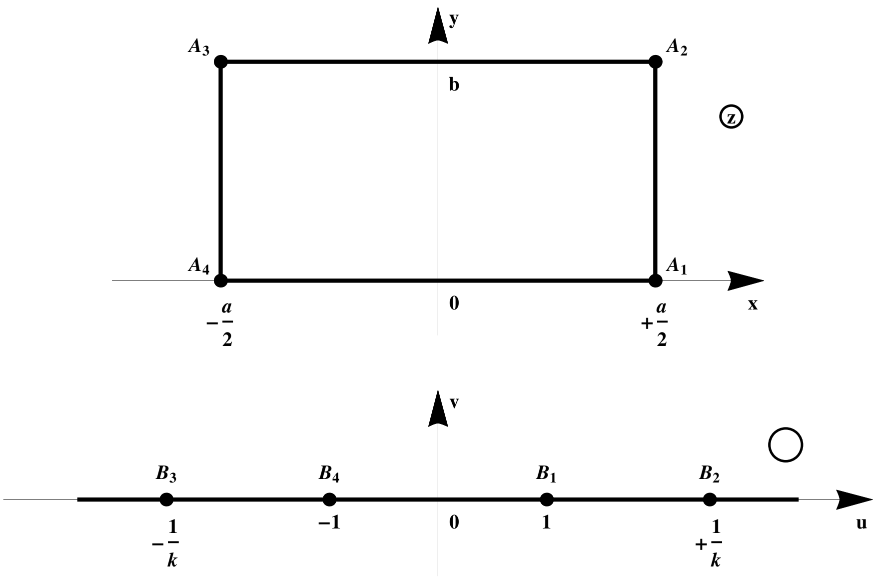

Рис. 1. К конформному отображению прямоугольника D комплексной плоскости z на верхнюю полуплоскость комплексной плоскости w.

Функция $s = s(k)$, определённая соотношением (5), имеет обратную [1, стр. 656]:

$$k(s) = 4\left\{\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\exp[-\pi\,(n+1/2)^2\,s]}{1+2\,\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\pi\,n^2\,s)}\right\}^2, \tag{6}$$

следовательно, по известному отношению b/a сторон прямоугольника D модуль k определяется единственным образом.

График функции (6) в зависимости от переменной s представлен на рис. 2.

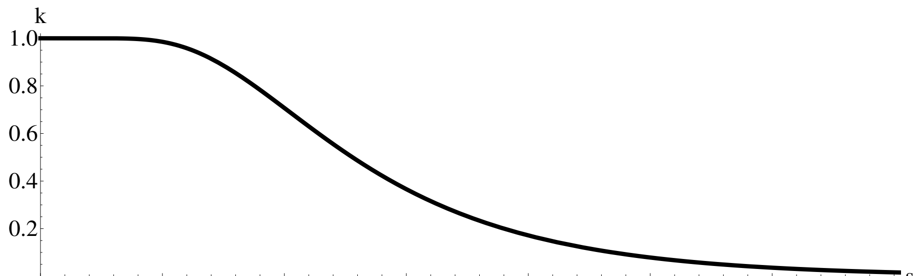

Рис. 2. К определению модуля k в конформном отображении прямоугольника на верхнюю полуплоскость.

Далее, будем считать, что модуль k эллиптического косинуса из формулы (2) совпадает с модулем k эллиптического синуса в формуле (4), определяемым соотношением (5), то есть что они связаны аналогом основного тригонометрического тождества, поэтому при переходе на плоскость w с помощью конформного отображения (4) получим представление нашей задачи Дирихле в переменной w с помощью формулы Пуассона [3, стр. 341] в виде:

$$\widetilde{\Psi}(w) = \Re\left\{\frac{1}{\pi\, i}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-w}\,dt\right\}. \tag{7}$$

Интеграл, входящий в формулу (7), легко берётся с помощью теории вычетов [3, стр. 243], поэтому искомая функция, записанная в переменной w, равна:

$$\widetilde{\Psi}(w) = \Re\left\{\sqrt{1-w^2} + i\, w\right\}. \tag{8}$$

Возврашаясь в выражении (8) с помощью формулы (4) к переменной z, получим:

$$\Psi(z) = \Re\left\{cn\left(\frac{2\,\mathbf{K}(k)\,z}{a}, k\right) + i\, sn\left(\frac{2\,\mathbf{K}(k)\,z}{a}, k\right)\right\}. \tag{9}$$

2. Получение специального решения задачи Дирихле на прямоугольнике методом разделения переменных

Используя соотношение (5), известный ряд Фурье для эллиптического косинуса [2, стр. 267] можно записать следующим образом:

$$cn\left(\frac{2\,\mathbf{K}(k)\,x}{a}, k\right) = \frac{\pi}{k\,\mathbf{K}(k)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\cosh((2\,n+1)\,\pi\, b/a)}\,\cos\frac{(2\,n+1)\,\pi\, x}{a}. \tag{10}$$

Следуя общей схеме решения задачи Дирихле (1)-(2) методом разделения переменных [4], с помощью разложения (10) находим, что:

$$\Psi(x,y) = \frac{2\,\pi}{k\,\mathbf{K}(k)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sinh((2\,n+1)\,\pi\,(b-y)/a)}{\sinh((2\,n+1)\,2\,\pi\, b/a)}\,\cos\frac{(2\,n+1)\,\pi\, x}{a}. \tag{11}$$

3. Новые тождества для полного эллиптического интеграла первого рода

В силу единственности решения задачи Дирихле (1)-(2) [1–4] формулы (9) и (11) при $(x,y)\in\overline{D}$ совпадают. С другой стороны, для эллиптических синуса и косинуса при некоторых значениях комплексного аргумента z известны их точные значения [2, стр. 280], следовательно, через эти значения выражаются суммы функциональных рядов, которые получаются подстановкой $\Re z$ и $\Im z$ в правую часть формулы (11).

Например, поскольку $sn(0,k)=0$ и $cn(0,k)=1$, то, следуя этой схеме при $z=0$, получим тождество:

$$1 = \frac{2\,\pi}{k\,\mathbf{K}(k)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sinh((2\,n+1)\,\pi\, b/a)}{\sinh((2\,n+1)\,2\,\pi\, b/a)}. \tag{12}$$

Воспользовавшись равенством (5) и формулой для гиперболического синуса двойного аргумента, перепишем соотношение (12) в виде:

$$\frac{k\,\mathbf{K}(k)}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\cosh((2\,n+1)\cdot\pi/2\cdot\mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}. \tag{13}$$

Далее, так как $sn(\mathbf{K}(k)/2,k) = 1/\sqrt{1+k'}$ и $cn(\mathbf{K}(k)/2,k) = \sqrt{k'/(1+k')}$ [2, стр. 280], то, рассматривая точку $z = a/4$, находим аналогичным образом, что:

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}}\,\frac{k\,\mathbf{K}(k)}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\pi\,n/2 + \sin\pi\,n/2}{\cosh((2\,n+1)\cdot\pi/2\cdot\mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}\,. \tag{14}$$

Вычисляя $\Psi(0,b/2)$ с помощью выражений $sn(i\,\mathbf{K}(k')/2,k) = i/\sqrt{k}$ и $cn(i\,\mathbf{K}(k')/2,k) = \sqrt{1+1/k}$ [2, стр. 280], получим тождество:

$$(\sqrt{1+k}-1)\,\frac{\sqrt{k}\,\mathbf{K}(k)}{2\,\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh((2\,n+1)\cdot\pi/4\cdot\mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}{\sinh((2\,n+1)\cdot\pi\cdot\mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}\,. \tag{15}$$

Наконец, так как $sn((\mathbf{K}(k)+i\,\mathbf{K}(k'))/2,k) = (\sqrt{1+k}+i\,\sqrt{1-k})/\sqrt{2\,k}$ и $cn((\mathbf{K}(k)+i\,\mathbf{K}(k'))/2,k) = \sqrt{k'/i\,k}$ [2, стр. 280], то определение значения $\Psi(a/4,b/2)$ даёт равенство:

$$(\sqrt{1+k}-1)\,\frac{\sqrt{k\,(1-k)}\,\mathbf{K}(k)}{2\,\sqrt{2}\,\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh((2\,n+1)\cdot\pi/4\cdot\mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}{\sinh((2\,n+1)\cdot\pi\cdot\mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}\,\cos\frac{(2\,n+1)\,\pi}{4}\,. \tag{16}$$

Точки $z = -a/4$ и $z = -a/4 + i\,b/2$ не рассматриваем, потому что решение (11) чётно по переменной x: $\Psi(x,y) = \Psi(-x,y)$.

Тождества (13)-(16) могут быть переписаны через переменную s, введённую соотношением (5), например, в переменной s формула (13) сводится к:

$$\frac{k(s)\,\mathbf{K}(k(s))}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cosh((2\,n+1)\cdot\pi\,s/2)}\,, \tag{17}$$

где $k(s)$ — функция (6).

Кроме того, известно большое число значений функций (3) и (5) для одних и тех же значений модуля k, в частности [5, стр. 28], при $k = (\sqrt{3}-1)/\sqrt{8}$:

$$s\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\,\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3}\,, \qquad \mathbf{K}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\,\sqrt{2}}\right) = \frac{3^{\,1/4}}{2^{7/3}\,\pi}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right), \tag{18}$$

где $\Gamma(\dots)$ — гамма-функция Эйлера.

Подставляя значения (18) в тождество (17), получим сумму следующего числового ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cosh((2\,n+1)\cdot\pi\,\sqrt{3}/2)} = \frac{3^{\,1/4}(\sqrt{3}-1)}{2^{\,23/6}\,\pi}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right). \tag{19}$$

4. Выводы

В представленной работе получены новые тождества (13)-(16) для полного эллиптического интеграла первого рода. С одной стороны, эти тождества дополняют данные в работе [6] оценки снизу и сверху для функции (3), выражающиеся через элементарные функции, а с другой стороны, они имеют и самостоятельное значение, например, в аналитической теории чисел (см. [5] и ссылки там).

Число этих тождеств, полученных в рамках предложенного выше метода, может быть увеличено неограниченно путём получения новых значений эллиптических функций Якоби с помощью теорем сложения [1, 2]. По каждой из этих формул для сумм функциональных рядов типа формулы (17) могут быть получены суммы числовых рядов типа суммы (19).

Далее, хорошо известно, что функция (3) удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению [2, стр. 157]:

$$k\,(1-k^2)\,\frac{d^2\mathbf{K}(k)}{dk^2}+(1-3\,k^2)\,\frac{d\mathbf{K}(k)}{dk}-k\,\mathbf{K}(k)=0. \tag{20}$$

Как только что выяснено, для решения этого уравнения существует счётное число тождеств вида (13)-(16). Эта ситуация напоминает положение дел для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, имеющих счётное число интегралов движения и точно решаемых методом обратной задачи рассеяния (см. [7] и библиографию там). Однако уравнение (20) — линейное.

Наконец, точное решение (9) задачи Дирихле (1)-(2) может использоваться для тестирования разностных схем для уравнения Лапласа — в том числе и на суперЭВМ .

Литература

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1987. 688 с.

2. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М., Наука, 1970. 304 с.

3. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1989. 480 с.

4. Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г., Натансон Г.И., Риз П.М., Слободецкий Л.Н., Смирнов М.М. Линейные уравнения математической физики. М., Наука, 1964. 368 с.

5. Borwein J.M., Borwein P.B. Pi and the AGM. A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity. John Wiley and Sons, 1987. 414 p.

6. Алексеева Е.С. Новые аппроксимации для полного эллиптического интеграла 1-го рода // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского / Казанское математическое общество. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы // Материалы Четырнадцатой Международной Казанской научной школы-конференции. Казань: Издательство Казанского математического общества, Издательство Академии наук Республики Татарстан, 2019. Т. 57. С. 20-23.

7. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М., Мир, 1989. 326 с.

MSC2020 30C20, 33E05, 35J08

On summation of series by means of solution of the Dirichlet problem for rectangle

E. S. Alekseeva [1], A. E. Rassadin [2]

Laboratory of infinite-dimensional analysis and mathematical physics, faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow State University [1],
National Research University "Higher School of Economics"[2]

Abstract: In the article, method of receiving of new identities for the complete elliptic integral of the first kind has been presented. The corner stone of this method is construction of exact solution of the Dirichlet problem for rectangle under special choice of boundary condition. Further one ought to calculate values of this exact solution in specially chosen internal points of this rectangle and to compare them vith values of solution of the same problem obtained in the framework of separation of variables in the same points. Amount of these new identities is determined by store of known values of used exact solution.

Keywords: conformal mapping, Jacobian elliptic functions, modulus of complete elliptic integral, inverse function, numerical and functional series.

References

1. Lavrentyev M.A., Shabat B.V. Metodi teorii funktsii kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of functions of a complex variable]. M., Nauka Publ. 1987. 688 p. (In Russian).

2. Ahiezer N.I. Elementy teorii ellipticheskih funktsii [Elements of the theory of elliptic functions]. M., Nauka Publ. 1970. 304 p. (In Russian).

3. Sidorov Yu.V., Fedoryuk M.V., Shabunin M.I. Lektsii po teorii funktsii kompleksnogo peremennogo [Lectures on the theory of functions of a complex variable]. M., Nauka Publ. 1989. 480 p. (In Russian).

4. Babich V.M., Kapilevich M.B., Mikhlin S.G., Natanson G.I., Riz P.M., Slobodetskii L.N., Smirnov M.M. Lineiniye uravneniya matematicheskoi fiziki [Linear equations of mathematical physics]. M., Nauka Publ. 1964. 368 p. (In Russian).

5. Borwein J.M., Borwein P.B. Pi and the AGM. A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity. John Wiley and Sons, 1987. 414 p.

6. Alekseeva E.S. New approximations for a complete elliptic integral of the first kind. Trudi Matematicheskogo Tsentra imeni N.I. Lobachevskogo / Kazanskoye matematicheskoye obshestvo. Teoriya funktsii, eyo prilogenija i smezhnie voprosi. Materiali Chetirnadtsatoi Mezhdunarodnoi Kazanskoi nauchnoi shkoli-konferentsii. Kazan: Izdatelstvo Kazanskogo matematicheskogo obshestva, Izdatelstvo Akademii nauk Respubliki Tatarstan [Publ. of the Kazan Mathematical Society, Publ. of the Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan], 2019. Vol. 57. pp. 20-23.

7. Newell A. Solitoni v matematike i fizike [Solitons in mathematics and physics]. M., Mir Publ. 1989. 326 p. (In Russian).