Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
IX МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ
МОЛОДЕЖНОЙ ШКОЛЫ-СЕМИНАРА
имени Е.В. Воскресенского

Саранск
2020

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В. КЕЛДЫША РАН

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
IX МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ
МОЛОДЕЖНОЙ ШКОЛЫ-СЕМИНАРА
имени Е.В. Воскресенского

Саранск
8 – 11 октября 2020 г.

Саранск
2020

УДК 510:004.5
ББК В1
М341

Мероприятие проведено при финансовой поддержке РФФИ,
проект № 20-01-22041 Научные мероприятия.

Редакционная коллегия:

Ответственный редактор: член-корр. РАН, д.ф.-м.н. профессор В. Ф. Тишкин (г. Москва),
Зам. ответ. редактора и составитель: к.ф.-м.н. доцент П. А. Шаманаев (г. Саранск),
д.ф.-м.н. профессор И. В. Бойков (г. Пенза),
д.ф.-м.н. профессор П. А. Вельмисов (г. Ульяновск),
д.ф.-м.н. профессор В. З. Гринес (г. Н. Новгород),
д.ф.-м.н. профессор В. К. Горбунов (г. Ульяновск),
д.ф.-м.н. профессор Е. Б. Кузнецов (г. Москва),
д.ф.-м.н. профессор О. В. Починка (г. Н. Новгород),
д.ф.-м.н. профессор И. П. Рязанцева (г. Н. Новгород).

М341 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ [Электронный ресурс]: Сборник материалов IX Международной научной молодежной школы-семинара имени Е. В. Воскресенского (Саранск, 8-11 октября 2020 г.) / редкол.: В. Ф. Тишкин (отв. ред.) [и др.]. – Саранск: СВМО, 2020. – 273 с. Режим доступа: http://conf.svmo.ru/files/2020/ThesesSaransk2020.pdf, свободный. – Загл. с экрана. – Дата обращения – 17.11.2020.

ISBN 978-5-901661-52-9

Настоящее издание содержит сборник материалов IX Международной научной молодежной школы-семинара "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ" имени Е.В. Воскресенского, проходившей в Национальном исследовательском Мордовском государственном университете 8-11 октября 2020 г.

Представляет интерес для научных работников, аспирантов и студентов.

УДК 510:004.5
ББК В1
М341

Публикуется на основании Устава Межрегиональной общественной организации «Средне-Волжское математическое общество» (п. 2.2) и по решению редакционно-издательского отдела СВМО.

ISBN 978-5-901661-52-9

© Коллектив авторов, 2020
© Оформление. СВМО, 2020

Предисловие

Настоящее издание содержит сборник материалов IX Международной научной молодежной школы-семинара "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ" имени Е.В. Воскресенского, которая была проведена с 8 по 11 октября 2020 года в г. Саранск (Россия). Организаторами школы-семинара выступили Национальный исследовательский Мордовский государственный университет, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН и Средне-Волжское математическое общество.

Основными задачами школы-семинара являются выявление и систематизация актуальных проблем и тенденций развития вычислительных методов, используемых при математическом моделировании физических и других процессов и явлений, содействие включению молодых ученых в научное сообщество и апробация их научных результатов, развитие научного сотрудничества и обмен результатами исследования.

Научные школы-семинары по математическому моделированию, численным методам и комплексам программ в Мордовском государственном университете проводятся регулярно с 2003 года (раз в два года, чередуясь с научными конференциями по дифференциальным уравнениям) под эгидой Национального исследовательского Мордовского государственного университета, Института математического моделирования РАН (с 2011 года Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН) и Средне-Волжского математического общества. Основателем и руководителем конференций и школ-семинаров являлся д.ф.-м.н. профессор Е.В. Воскресенский (до 2008 года). С 2009 года председателем конференций и школ-семинаров является член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н., профессор В.Ф. Тишкин (зав. отделом Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва).

Работа школы-семинара проходила в рамках следующих семинаров:

1. Принципы построения математических моделей.
2. Численная реализация алгоритмов математических моделей.
3. Качественные методы анализа математических моделей.
4. Пакеты прикладных программ и высокопроизводительные вычисления.

Все доклады, представленные на школу-семинар, были предварительно прорецензированы Программным комитетом.

Организаторы благодарны всем участникам школы-семинара за интересные доклады и плодотворную дискуссию.

Программный и организационный комитеты
IX Международной научной молодежной школы-семинара
"Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ" имени Е.В. Воскресенского
Саранск, 8 – 11 октября 2020 года

Председатель организационного комитета: С. М. Вдовин, ректор Национального исследовательского Мордовского государственного университета (г. Саранск).

Заместитель председателя организационного комитета и председатель программного комитета: В. Ф. Тишкин, член-корреспондент РАН, зав. отделом Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (г. Москва).

Ученый секретарь: П. А. Шаманаев, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики Национального исследовательского Мордовского государственного университета (г. Саранск).

Программный комитет:

П.В. Сенин, зам. председателя программного комитета,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
Е.И. Моисеев,	Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,	г. Москва,	Россия.
А.С. Андреев,	Ульяновский государственный университет,	г. Ульяновск,	Россия.
И.В. Бойков,	Пензенский государственный университет,	г. Пенза,	Россия.
П.А. Вельмисов,	Ульяновский государственный технический университет,	г. Ульяновск,	Россия.
В.К. Горбунов,	Ульяновский государственный университет,	г. Ульяновск,	Россия.
В.З. Гринес,	НИУ ВШЭ в Нижнем Новгороде,	г. Н. Новгород,	Россия.
Ю.Н. Дерюгин,	РФЯЦ – ВНИИЭФ,	г. Саров,	Россия.
А.П. Жабко,	Санкт-Петербургский государственный университет,	г. С.-Петербург,	Россия.
А.М. Камачкин,	Санкт-Петербургский государственный университет,	г. С.-Петербург,	Россия.
Н.Д. Кузьмичев,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
Е.Б. Кузнецов,	Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),	г. Москва,	Россия.
С.И. Мартынов,	Сургутский государственный университет,	г. Сургут,	Россия.
Н.Д. Морозкин,	Башкирский государственный университет,	г. Уфа,	Россия.
О.В. Починка,	НИУ ВШЭ в Нижнем Новгороде,	г. Н. Новгород,	Россия.
И.П. Рязанцева,	Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева,	г. Н. Новгород,	Россия.
С.И. Спивак,	Башкирский государственный университет,	г. Уфа,	Россия.

М.Т. Терехин,	Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина,	г. Рязань,	Россия.
Ш.А. Алимов,	Малазийский институт стратегических исследований,	г. Куала-Лумпур,	Малайзия.
Анка Вероника Ион,	Институт Математической статистики и прикладной математики Румынской Академии Наук,	Бухарест,	Румыния.
П.П. Матус,	Люблинский католический университет,	г. Люблин,	Польша.
Т.Ш. Кальменов	Институт математики и математического моделирования,	г. Алматы,	Казахстан.
Л.И. Каранджулов,	Софийский технический университет,	г. София,	Болгария.
К.С. Проданова,	Софийский технический университет,	г. София,	Болгария.
Д. В. Тураев,	Имперский колледж Лондона,	г. Лондон,	Велико-британия.
К. Панкрашкин,	Парижский университет - Южный округ,	г. Орсе,	Франция.
А.А. Глуцюк,	Высшая нормальная школа Лиона,	г. Лион,	Франция.

Организационный комитет:

И.И. Чучаев,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
Л.А. Сухарев,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
Р.В. Жалнин,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
Т.Ф. Мамедова,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
С.М. Мурюмин,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
Д.К. Егорова,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
А.Н. Тында,	Пензенский государственный университет,	г. Пенза,	Россия.
Е.В. Десяев,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
А.О. Сыромясов,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
Т.Е. Бадокина,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
М.Н. Вишнякова,	РФЯЦ – ВНИИЭФ,	г. Саров,	Россия.
Е.Е. Пескова,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.

О.С. Язовцева,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
А.В. Бикеев,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
Д.В. Галкин,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
С.Х. Зинина,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
Ю.В. Напалкова,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
Р.Р. Альбиков,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
Е.С. Капустина,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
А.И. Кулягин,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
Н.Н. Чернышов,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
И.В. Стенин,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
Т. В. Меньшакова,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.
А. Д. Якунина,	Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,	г. Саранск,	Россия.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Агзамова М. Р. , Губайдуллин И. М.
Применение теории графов для описания процесса окислительной регенерации закоксованных катализаторов каталитического риформинга 16

Алексеева Е. С., Рассадин А. Э.
Гамильтоновы системы с одной степенью свободы и квантование на плоскости Лобачевского..... 18

Ахметзянова Л. У., Кирьянова О. Ю., Губайдуллин И. М.
Поиск коротких фрагментов в анализе нуклеотидных последовательностей 22

Багапов А. Р., Жалнин Р. В.
Моделирование акустических полей при обтекании тел потоком газа 25

Баркалов К. А., Сысоев А. В., Ямщиков И. С.
Алгоритм глобальной оптимизации с использованием численных оценок производной минимизируемой функции 28

Баркалов К. А., Усова М. А.
Решение задач глобальной оптимизации с учетом возможных разрывов целевой функции 32

Бойков И. В., Рязанцев В. А.
Об одном приближённом методе нахождения матрицы коэффициентов в обратной задаче для системы параболических уравнений 36

Галин А. Ш., Еникеев М. Р.
Использование алгоритма HOG и классификатора SVM при распознавании мезофаз кокса 40

Горбунов В. К., Львов А. Г.
Обратная задача теории рыночного спроса и непараметрический анализ спроса 44

Губайдуллин И. М.
Физико-химические основы моделирования химических реакторов: термодинамика и кинетика 47

Губайдуллин И. М., Дубинец О. В.
Моделирование процесса окислительной регенерации с учётом влияния паров воды 49

Донскова М. А., Башаров И. В.
Восстановление цветных изображений с помощью низкоранговой матрицы аппроксимации 50

Донцова М. В.
Условия нелокальной разрешимости системы со свободными членами для случая положительных коэффициентов 53

Жалнин Р. В., Кулягин А. И.
Применение разрывного метода Галеркина для реализации RANS-моделей

турбулентности на динамических локально-адаптируемых сетках 55

Журавлева М. А., Язовцева О. С.
Устойчивость кинетической модели пиролиза непредельных углеводородов 57

Зайцева Е. С., Губайдуллин И. М.
Математическая модель расчета октанового числа бензинов каталитического риформинга с групповой кинетикой 60

Зарипова Э. А., Еникеев М. Р.
Восстановление каротажных кривых методами машинного обучения 62

Зинина С. Х.
Построение энергетической функции Морса-Ботта для регулярных топологических потоков 66

Карамова Э. Р., Еникеев М. Р.
Прогнозирование рекуррентной нейронной сетью технологических ремонтных операций нефтяных скважин 68

Клочкова И. Ю., Винник Г. Н.
Моделирование движения парашютиста при снижении на стабилизирующем парашюте 71

Клочкова Л. В., Сузан Д. В., Тишкин В. Ф.
Стохастичность процессов распространения примесей в воздухе и её учёт 73

Костров О. Г., Полякина Н. М.
Спектр и собственные функции явнорешаемой модели цепочки колец с перемычками в магнитном поле 76

Костромина О. С.
О динамике систем, близких к двумерным гамильтоновым, с двойным предельным циклом при квазипериодических возмущениях 80

Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.
Моделирование ползучести стержня, находящегося в агрессивной среде 83

Кузьмичев Н. Д., Васютин М. А., Данилова Е. В., Лапшина Е. А.
Математическое моделирование процесса теплоотдачи пленки нитрида ниобия при импульсном нагреве током 86

Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф.
Построение гибридных численных потоков для решения уравнений Эйлера 90

Мазитов А. А., Бобренёва Ю. О., Губайдуллин И. М.
Математическое моделирование нестационарного течения многофазного потока в пористой среде 94

Мамонов С. С., Ионова И. В., Харламова А. О.
Исследование динамики математической модели системы фазовой автоподстройки с запаздыванием 96

Масягин В. Ф.
Реализация неявной схемы для решения уравнений газовой динамики с использованием разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках 99

Нефедов М. С., Жалнин Р. В.
Применение искусственных нейронных сетей для вычисления дискретных потоков при численном решении задач газовой динамики 102

Николаева Н.Г., Шелудько А.С.
Об особенностях целевой функции в задаче оценивания параметра квадратичного отображения 105

Никонов В. И.
О стабилизации линейных управляемых динамических систем относительно части переменных 109

Пескова Е. Е.
Исследование многокомпонентных потоков газа с химическими реакциями под воздействием различных источников энергии 110

Поверинов А. И.
Оценка общей эффективности оборудования для производства фармацевтической продукции 112

Рязанцева И. П.
Итеративный метод второго порядка с постоянными коэффициентами для монотонных уравнений в гильбертовом пространстве 114

Старостин Н. В., Быкова М. А., Скулкина Н. С.
Применение эволюционно-генетического алгоритма к задаче одномерного раскроя 117

Сыромясов А. О., Гришаева О. В.
Исследование динамики эллипсоида вращения в однородном потоке вязкой жидкости в пакете Fluent 121

Фасхутдинова Р. И., Фасхутдинов А. Г., Губайдуллин И. М.
Максимизация выхода индивидуальных высокооктановых компонентов в процессе каталитической изомеризации на основе кинетической модели 125

Хисамова А. А., Губайдуллин И. М.
Модернизация контакторного реактора процесса сернокислотного алкилирования 127

Шаманаев П. А., Прохоров С. А.
Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений с малым параметром методом Ляпунова-Шмидта в регулярном случае..... 129

Шаманаев П. А., Язовцева О. С.
К вопросу о частичной устойчивости нулевого решения нелинейных систем по линейному приближению 132

Якунина А. Д., Мамедова Т. Ф, Корытин С.И.
Моделирование процесса оптимизации структуры производства 135

КРАТКИЕ СТАТЬИ

Авдеева Е. А., Коченов В. А.
Анализ естественного износа и совершенствование конструкции цилиндропоршневой группы двигателя внутреннего сгорания…… 137

Алексеева Е. С., Рассадин А. Э.
О суммировании рядов с помощью решения задачи Дирихле для прямоугольника …… 142

Анисимов В. Н., Литвинов В. Л.
Об одном методе замены переменных для волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами …… 148

Бирюков Р. С., Бубнова Е. С.
Многокритериальный консенсус в сети линейных агентов …… 159

Бойков И. В., Айкашев П. В., Бойкова А. И.
Проекционно-итерационные методы решения одного класса гиперсингулярных интегральных уравнений …… 171

Бойков И. В., Айкашев П. В.
Методы сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений в моделировании антенн …… 179

Буткина А. А., Кривова С. В., Шамаев А. В.
Разработка комплекса программ мониторинга и управления рабочим столом удаленного компьютера …… 191

Гришанов Е. Н., Грязева О. С.
Численное исследование спектральных свойств деформированного листа графена …… 200

Еремеева Н. И., Марасова И. А., Савельева А. М.
Математическое моделирование эффективности введения противоэпидемических карантинных мер на примере распространения COVID-19 …… 206

Жалнин Р. В.
Применение разрывного метода Галеркина для решения задач газовой динамики на динамических локально-адаптируемых сетках …… 214

Мамаева Н. А., Сахаров А. Н.
Геометрия областей устойчивости линейных канонических систем периодических дифференциальных уравнений …… 225

Мартынов С. И.
Модель переноса частиц в неоднородно нагретой намагничивающейся или поляризующейся жидкости …… 237

Мизхер У. Д.
Моделирование процессов горения тангенциально закрученной топливовоздушной смеси 247

Сорокина М. С.
Оптимальное оценивание линейных нестационарных систем с использованием множеств достижимости …… 252

Суков С. А.
Комплекс параллельных программ TAPIR для численного моделирования задач газовой динамики 259

Сыромясов А. О., Меньшакова Т. В.
Динамика твердых частиц взвеси в параболическом потоке вязкой жидкости 268

CONTENTS

ABSTRACTS

M. R. Agzamova, I. M. Gubaydullin
Application of graph theory to describe the process of oxidative regeneration of coked catalytic reforming catalysts……..... 16

E. S. Alekseeva, A. E. Rassadin
Hamiltonian systems with one degree of freedom and quantization on the Lobachevsky plane 18

L. U. Akhmetzyanova, O. Yu. Kiryanova, I. M. Gubaidullin
Search for short fragments in nucleotide sequence analysis …….. 22

A. R. Bagapov, R. V. Zhalnin
Modeling of acoustic fields during gas flow around bodies ……. 25

K. A. Barkalov, A. V. Sysoyev, I. S. Yamshchikov
Global optimization algorithm using numerical estimates of the objective function derivative 28

K. A. Barkalov, M. A. Usova
Solving global optimization problems taking into account possible discontinuities of the objective function ……... 32

I. V. Boykov, V. A. Ryazantsev
On the approximate method for determination of coefficient matrix in inverse problem for a system of parabolic equation …….. 36

A. Sh. Galin, M. R. Enikeev
Using the HOG algorithm and the SVM classifier for the recognition of coke mesophases …… 40

V. K. Gorbunov, A. G. L'vov
The inverse problem of the market demand theory and nonparametric demand analysis…….. 44

I. M. Gubaidullin
Physicochemical basics of modeling chemical reactors: thermodynamics and kinetics …… 47

I. M. Gubaydullin, O. V. Dubinec
Modeling the oxidative regeneration process taking into account the effect of water vapor …... 49

M. A. Donskova, I. V. Basharov
Reconstruction of color images using a low-rank approximation matrix ……. 50

M. V. Dontsova
The nonlocal solvability for a system with constant terms for the case of positive coefficients 53

R. V. Zhalnin, A. I. Kulyagin
Application of the discontinuous Galerkin method to implement RANS-models of turbulence on AMR …… 55

M. A. Zhuravleva, O. S. Yazovtseva
Stability of the unsaturated hydrocarbons pyrolysis kinetic model 57

E. S. Zaytseva, I. M. Gubaydullin
Mathematical model for calculating the octane number of catalytic reforming gasolines with group kinetics 60

E. A. Zaripova, M. R. Enikeev
Recovery of logging curves using machine learning methods 62

S. Kh. Zinina
Construction of the Morse-Bott energy function for regular topological flows 66

E. R. Karamova, M. R. Enikeev
Predicting of oil well technological repair operations by a neural network 68

I. U. Klochkova, G. N. Vinnik
Modeling the movement of a parachutist while descending on a stabilizing parachute 71

L. V. Klochkova, D. V. Suzan, V. F. Tishkin
Stochasticity of contaminations spread processes in the air and its record 73

O. G. Kostrov, N. M. Polyakina
Spectrum and eigenfunctions of an explicitly solvable model of a chain of rings with jumpers in a magnetic field 76

O. S. Kostromina
Dynamics of systems close to two-dimensional Hamiltonian ones with a double limit cycle under quasi-periodic perturbations 80

E. B. Kuznetsov, S. S. Leonov
Modeling the creep of a bar in an aggressive environment 83

N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin , E. V. Danilova , E. A. Lapshina
Mathematical modeling of the heat transfer process of a niobium nitride film during pulsed heating by current 86

M. E. Ladonkina, V. F. Tishkin
Construction of hybrid numerical fluxs to solve the Euler equations 90

A. A. Mazitov, Ya. O. Bobreneva, I. M. Gubaydullin
Mathematical modeling of unsteady multiphase flow in a porous medium 94

S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova
The study of the dynamics of a mathematical model delayed phase locked loop systems 96

V. F. Masyagin
Implementation of an implicit scheme for solving gas dynamics equations using the discontinuous Galerkin method on unstructured grids 99

M. S. Nefedov, R. V. Zhalnin
Application of artificial neural networks for calculating discrete flows in the numerical solution of gas dynamics problems 102

N. G. Nikolaeva, A. S. Sheludko
Some features of the cost function in the parameter estimation problem for the logistic map 105

V. I. Nikonov
On a partial stabilization of linear control systems 109

E. E. Peskova
Study of multicomponent gas flows with chemical reactions under the influence of different energy sources 110

A. I. Poverinov
Evaluation of the overall efficiency of equipment for the production of pharmaceutical products 112

I. P. Ryazantseva
Continuous method of second order with constant coefficients for monotone equations in Hilbert space 114

N. V. Starostin, M. A. Bykova, N. S. Skulkina
Application of the evolutionary genetic algorithm to the one-dimensional cutting-stock problem 117

A. O. Syromyasov, O. V. Grishaeva
Modeling of dynamics of ellipsoid of revolution in a uniform viscous flow using ANSYS Fluent 121

R. I. Faskhutdinova, A. G. Faskhutdinov, I. M. Gubaydullin
Maximization of the yield of individual high-octane components in the process of catalytic isomerization based on the kinetic model 125

A. A. Khisamova, I. M. Gubaydullin
Modernization of the contactor reactor for the sulfuric acid alkylation process 127

P. A. Shamanaev, S. A. Prokhorov
Algorithm for solving systems of linear algebraic equations with a small parameter by the Lyapunov-Schmidt method in the regular case..... 129

P. A. Shamanaev, O. S. Yazovtseva
On the question of partial stability of the zero solution of nonlinear systems in the linear approximation 132

A. D. Yakunina, T. F. Mamedova, S. I. Korytin
Modeling the production structure optimization process 135

SHORT PAPERS

E. A. Avdeeva, V. A. Kochenov
Natural wear and improvement of cylindro-piston group internal combustion engines..... 137

E. S. Alekseeva, A. E. Rassadin
On summation of series by means of solution of the Dirichlet problem for rectangle 142

V. N. Anisimov, V. L. Litvinov
About one method for replacing variables for a wavean equation describing vibrations of systems with moving boundaries 148

R. S. Biryukov, E. S. Bubnova
Multi-objective consensus for linear multi-agent systems 159

I. V. Boykov, P. V. Aykashev, A. I. Boykova
Projection-iterative methods for solving one class of hypersingular integral equations 171

I. V. Boykov, P. V. Aykashev
Methods of singular and hypersingular integral equations in antenna modeling 179

A. A. Butkina, S. I. Krivova, A.V. Shamaev
Development of a complex of programs for monitoring and managing a desktop of a remote computer 191

E. N. Grishanov, O. S. Gryazeva
Numerical Investigation on the Spectral Properties of Deformed Graphene Sheet 200

N. I. Eremeeva, I. A. Marasova, A. M. Saveleva
Mathematical modeling of the effectiveness of the initiation of anti-epidemic quarantine measures by the example of the spread of COVID-19 206

R. V. Zhalnin
Application of the discontinuous Galerkin method for solving problems of gas dynamics on AMR 214

N. A. Mamaeva, A. N. Sakharov
The geometry of stability regions of linear canonical systems of periodic differential equations 225

S. I. Martynov
Particle transport model in a nonuniformly heated magnetized or polarized fluid 237

U. J. Mizher
Modeling the combustion processes of a tangentially swirled fuel-air mixture 247

M. S. Sorokina
Optimal evaluation of linear time-varying systems using reachable sets 252

S. A. Soukov
Parallel program complex TAPIR for CFD simulations 259

A. O. Syromyasov, T. V. Menshakova
Dynamics of rigid particles in a parabolic flow of viscous fluid 268

УДК 51-7

Применение теории графов для описания процесса окислительной регенерации закоксованных катализаторов каталитического риформинга

Агзамова М. Р. [1], Губайдуллин И. М. [1,2]

Уфимский государственный нефтяной технический университет [1],
Институт нефтехимии и катализа ИНК УФИЦ РАН[2]

В работе рассматривается процесс окислительной регенерации закоксованных катализаторов каталитического крекинга в неподвижном слое при помощи теории графов. Теория графов представляет собой математический аппарат анализа схем, на которых объекты изображены точками в двумерном пространстве, а связь между объектами – линиями [1].

Вершинами графа являются точки множества, а соединяющие их линии – ребрами. В графах производств химической технологии вершинами являются операционные единицы, а ребрами – проводы.

Графы химико–технологических процессов являются ориентированными, то есть имеют направление ребер, так же для наглядности и удобства передачи информации вершины обозначены разными точками. Химико–технологические процессы нефтеперерабатывающего производства описаны в работе [2].

Представим технологическую схему рис. 1 установки риформинга со стационарным слоем катализатора посредством теории графов.

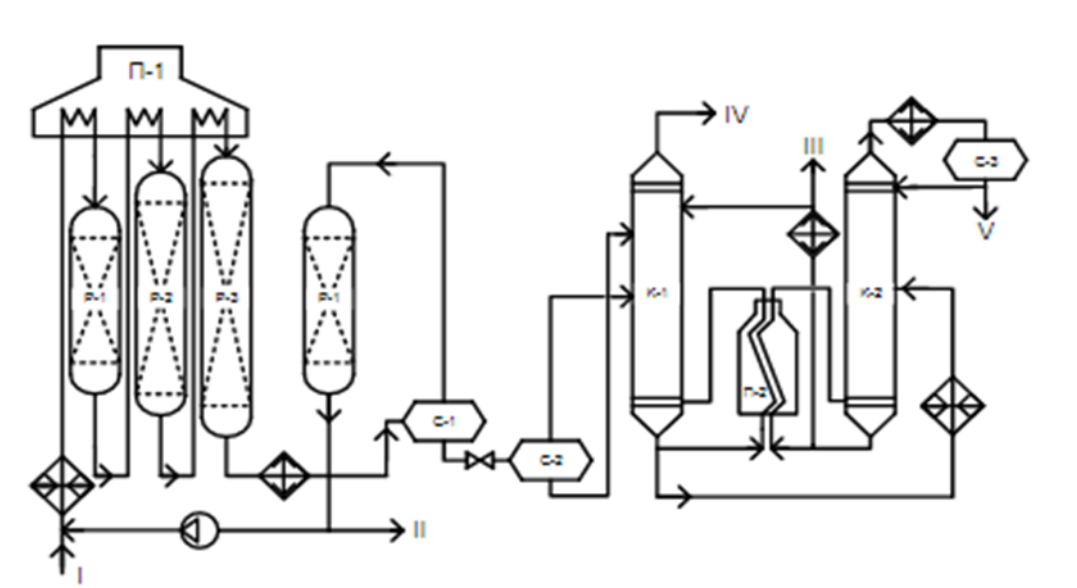


Рис. 1. Принципиальная технологическая схема установки риформинга со стационарным слоем катализатора I – гидроочищенное сырье; II – ВСГ; III – стабильный катализатор; IV – сухой газ; V – головная фракция.

На рис.2 Изображен технологический граф установки риформинга со стационарным слоем катализатора.

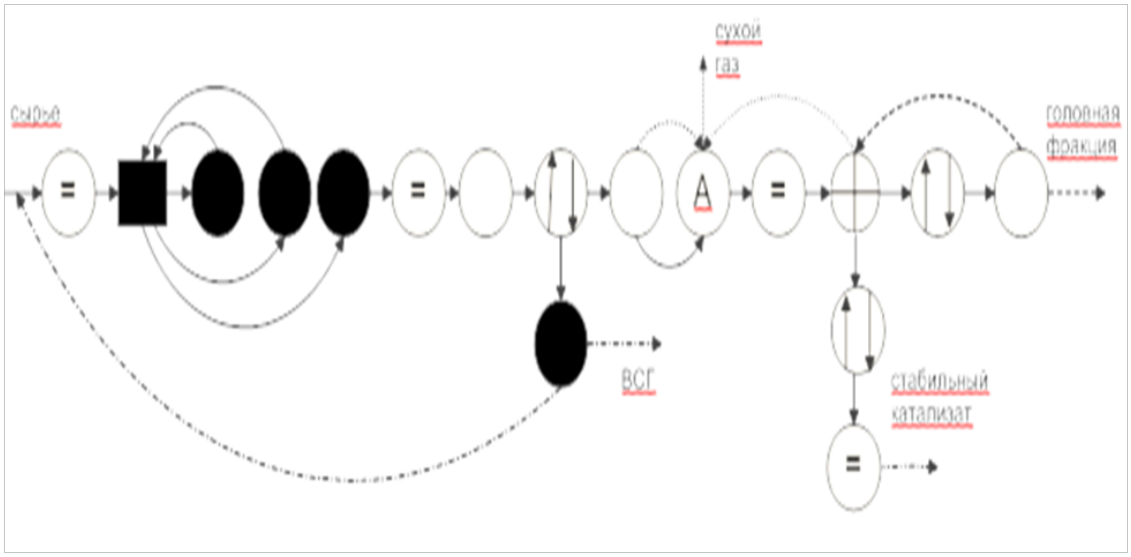


Рис. 2. Технологический граф установки риформинга со стационарным слоем катализатора.

Представление процесса с помощью графов позволило повысить наглядность по сравнению с технической схемой. В графах использовались ориентированные потоки и вершины, обозначающие реактор, теплообменник, печь, холодильник, абсорбер, сепаратор и колонны стабилизации.

Литература

1. Berge Cl. Theorie des graphes et ses applications. Collection universitaire de Mathématiques, Paris. Dunod. 1958. 277 p.

2. Исламова Г. И. Representation of the process of oxidative regeneration of coked catalysts in a fixed layer based on graph theory // Journal of Physics: Conference Series : V International Conference on Information Technology and Nanotechnology. Samara, Russia. 2019.

MSC2020 05C92, 80A30

Application of graph theory to describe the process of oxidative regeneration of coked catalytic reforming catalysts

M. R. Agzamova[1], I. M. Gubaydullin[1,2]

Ufa State Petroleum Technical University[1],
Institute of Petrochemistry and Catalysis of RAS[2]

УДК 517.938; 514.84; 514.132

Гамильтоновы системы с одной степенью свободы и квантование на плоскости Лобачевского

Алексеева Е.С.[1], Рассадин А.Э.[2]

Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова[1],
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»[2]

Рассмотрим гамильтонову систему с одной степенью свободы, и пусть функция Гамильтона $H(p,q)$ этой системы такова, что линии уровня её энергии E:

$$H(p,q) = E\,, \qquad E > 0\,, \tag{1}$$

на всей фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ представляют собой гладкие кривые, диффеоморфные окружности, за исключением начала координат, в котором $H(0,0) = 0$.

В этом случае с помощью канонического преобразования можно перейти от переменных (p,q) к переменным действие-угол (I,θ), в которых уравнения Гамильтона имеют вид [1]:

$$\dot{I} = 0\,, \qquad \dot{\theta} = \frac{dH(I)}{dI}\,, \tag{2}$$

причём во втором уравнении системы (2) функция Гамильтона исходной системы выражена через переменную действия:

$$I = \frac{1}{2\,\pi}\oint p\,dq \tag{3}$$

(интегрирование в правой части формулы (3) ведётся по всей линии уровня энергии (1)).

При каждом обходе изображающей точки по фазовой траектории (1) угловая переменная θ испытывает приращение на $2\,\pi$ [1], а переменная действия I при этом остаётся постоянной и, согласно определению (3), неотрицательной, поэтому в канонических переменных фазовое пространство рассматриваемой системы можно считать полуцилиндром $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+$.

Развернём этот полуцилиндр в полуполосу $\Pi = \{0 < \theta < 2\,\pi,\, 0 < I < +\infty\}$, которую затем поместим на плоскость комплексной переменной $z = \theta + i\,I$.

Далее, отобразим эту полуполосу Π на верхнюю полуплоскость $\mathbb{H} = \{\zeta \in \mathbb{C} :\, \Im\zeta > 0\}$ конформно с помощью функции:

$$\zeta = -\cos(z/2)\,. \tag{4}$$

При отображении (4) луч $\pi + i\,I$ $(I > 0)$ на комплексной плоскости z переходит в луч $i\,\sinh(I/2)$ $(I > 0)$ на комплексной плоскости ζ.

Зафиксируем некоторое значение переменной действия $I = I^*$ и отобразим конформно полуплоскость $\mathbb{H}$ на единичный круг $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} :\, |w| < 1\}$ так, чтобы точке $i\,\sinh(I^*/2) \in \mathbb{H}$ соответствовал центр круга $\mathbb{D}$.

Согласно общим правилам комплексного анализа такое конформное отображение задаётся следующей формулой [2]:

$$w \equiv f_{I^*}(z) = \frac{\cos(z/2) + i\,\sinh(I^*/2)}{\cos(z/2) - i\,\sinh(I^*/2)}\,. \tag{5}$$

С другой стороны, хорошо известно, что единичный круг $\mathbb{D}$ может быть взаимно однозначно отображён на плоскость Лобачевского $\mathbb{L}^2$ [3], а именно, пусть $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$ — псевдосфера единичного радиуса в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^3_1$ и $w = u + i\,v$, тогда стереографическая проекция верхней полы этой псевдосферы из точки $(0, 0, -1) \in \mathbb{R}^3_1$ на единичный круг $\mathbb{D}$:

$$x_0 = -1 + \frac{2}{1 - u^2 - v^2}\,, \qquad x_1 = \frac{2\,u}{1 - u^2 - v^2}\,, \qquad x_2 = \frac{2\,v}{1 - u^2 - v^2} \tag{6}$$

есть модель Пуанкаре плоскости Лобачевского [3].

С точки зрения классической механики построенное выше отображение (5)-(6) фазовых траекторий (1) исходной системы с евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ на плоскость Лобачевского $\mathbb{L}^2$ может дать лишь новые неравенства на зависимость их длины от энергии E. Но в квантовой механике эта конструкция приводит к нетривиальным следствиям.

Во-первых, как хорошо известно, при переходе к квантовой механике координата q и импульс p системы заменяются на некоммутирующие между собой операторы координаты $\hat{Q}$ и импульса $\hat{P}$ соответственно, а соотношение (1) трансформируется в стационарное уравнение Шрёдингера на волновую функцию системы ψ:

$$\hat{H}\,\psi = E\,\psi\,. \tag{7}$$

Однако для построения оператора Гамильтона $\hat{H}$, фигурирующего в уравнении (7), по классической функции Гамильтона $H(p, q)$ произвольного вида нужно использовать симметрический способ упорядочения операторных аргументов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ этой функции, а именно, в качестве оператора Гамильтона необходимо выбрать [4]:

$$\hat{H} = \int\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{H}(s, \sigma)\, \exp(\,i\,\hat{P}\,s + i\,\hat{Q}\,\sigma)\,\frac{ds\,d\,\sigma}{(2\,\pi)^2}\,, \tag{8}$$

где

$$\tilde{H}(s, \sigma) = \int\int_{\mathbb{R}^2} H(p, q)\, \exp(-i\,p\,s - i\,q\,\sigma)\,dp\,dq \tag{9}$$

– двумерное преобразование Фурье от классической функции Гамильтона $H(p, q)$.

Выражения (8)-(9) называются квантованием по Вейлю (см. [4] и ссылки там).

Из структуры этих выражения ясно, что практическая возможность определения оператора Гамильтона по этим формулам существенно зависит от вида функции $H(p, q)$.

Между тем, в монографии [5] подробно описан алгоритм квантования на плоскости Лобачевского $\mathbb{L}^2$, использующая гильбертово пространство аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций со скалярным произведением:

$$< f \mid g >= \left(\frac{1}{h} - 1\right) \int_{\mathbb{D}} f(w)\,\overline{g(w)}\,(1 - w\,\overline{w})^{1/h}\,d\mu(w,\,\overline{w})\,, \tag{10}$$

где

$$d\mu(w,\,\overline{w}) = \frac{1}{\pi\,i}\,\frac{dw \wedge d\overline{w}}{(1 - w\,\overline{w})^2} \tag{11}$$

— мера на плоскости Лобачевского $\mathbb{L}^2$, инвариантная относительно группы автоморфизмов $Aut(\mathbb{D})$ единичного круга $\mathbb{D}$ [2], а параметр h имеет смысл постоянной Планка.

Процедура квантования, стартующая с формул (10)-(11), называется квантованием по Березину [6]. Очевидно, что квантование по Березину обладает существенным преимуществом по сравнению с квантованием по Вейлю, потому что оно не зависит от вида функции $H(p, q)$.

Далее, интересным объектом квантовой механики являются когерентные состояния:

$$\psi_\alpha(x) = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n\,!}}\, \phi_n(x)\,, \tag{12}$$

где α — комплексный параметр, а

$$\phi_n(x) = \sqrt[4]{\frac{\omega}{\pi}}\, \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!}}\, H_n(x\,\sqrt{\omega})\, \exp\left(-\frac{\omega\, x^2}{2}\right)$$

— ортонормированные собственные функции квантовомеханического гармонического осциллятора [7], в которых $H_n(\ldots)$ — полиномы Чебышёва-Эрмита.

Волновые функции (12), введённые в работе [8] для гармонического осциллятора, минимизируют соотношение неопределённостей Гейзенберга и образуют переполненный базис в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Однако попытки построить когерентные состояния для систем с функцией Гамильтона, отличной от функции $H(p,q) = p^2/2 + \omega^2\, q^2/2$, наталкиваются на серьёзные трудности. Между тем, для плоскости Лобачевского $\mathbb{L}^2$ можно построить счётное множество систем когерентных состояний как неприводимых представлений её группы движений $SU(1,1)/\mathbb{Z}_2$ [6].

Наконец, с помощью конформного отображения (5) можно построить автоморфизмы полуполосы Π:

$$\varphi_{12}(z) \equiv (f^{-1}_{I_2^*} \circ f_{I_1^*})(z) = 2\, \arccos\left[\frac{\sinh(I_2^*/2)}{\sinh(I_1^*/2)}\, \cos\frac{z}{2}\right], \tag{13}$$

которые перемещают значения переменной действия по лучу $\pi + i\, I$.

С другой стороны, в квантовой механике при рассмотрении квазиклассического приближения выводится правило квантования Бора-Зоммерфельда [7]:

$$I(E) = \frac{h}{2\,\pi}\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad n \gg 1\,. \tag{14}$$

В силу малости постоянной Планка h формула (14) при изменяющемся номере n собственной функции оператора Гамильтона весьма напоминает действие автоморфизма (13).

В заключение необходимо отметить, что линейное преобразование:

$$\tilde{p} = \alpha\, p + \beta\, q\,, \qquad \tilde{q} = \gamma\, p + \delta\, q\,,$$

оставляющее инвариантной симплектическую 2-форму $\Omega = dp \wedge dq$ системы (1) (см. задачу на стр. 193 в книге [9]), есть не что иное, как автоморфизм $Aut(\mathbb{H})$:

$$\zeta \mapsto \frac{\alpha\,\zeta + \beta}{\gamma\,\zeta + \delta}\,, \qquad \alpha\,\delta - \beta\,\gamma = 1\,,$$

верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ [2], на которой может быть реализована модель Клейна плоскости Лобачевского $\mathbb{L}^2$ [3], и в которую отображением (4) переводится полуполоса Π.

Таким образом, изучение скрытых связей между комплексной и симплектической структурой, которые можно ввести на вещественной двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$, приводит к универсальным схемам квантования системы (1), не зависящим от вида её классической функции Гамильтона $H(p,q)$. Полученные результаты особенно интересны с точки зрения квантовой теории поля для развития работ [10] и [11], потому что намёки на необходимость выявления таких связей имеются ещё в статье [12], в которой заложены основы квантовой электродинамики.

Авторы благодарят д. ф.-м. н. Н.Н. Шамарова за указание на работу [12].

Литература

1. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 272 с.
2. Львовский С. М. Лекции по комплексному анализу. М.: МЦНМО, 2009. 136 с.
3. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1979. 760 с.
4. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988. 272 с.
5. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986. 318 с.
6. Переломов А. М. Обобщённые когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987. 272 с.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989. 768 с.
8. Schrödinger E. Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik. Die Naturwissenschaften. 1926. Bd. 14, Heft 28. pp. 664-666.
9. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
10. Смолянов О. Г., Шамаров Н. Н. Гамильтоновы меры Фейнмана, интеграл Колмогорова и бесконечномерные псевдодифференциальные операторы // Доклады Академии наук. 2019. Т. 488, №. 3. С. 243-247.
11. Сергеев А. Г. Квантование соболевского пространства полудифференцируемых функций // Математический сборник. 2016. Т. 207, № 10. С. 96-104.
12. Dirac P. A. M. The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1927. vol. 114. pp. 243-265.

MSC2020 70H15

Hamiltonian systems with one degree of freedom and quantization on the Lobachevsky plane

E. S. Alekseeva[1], A. E. Rassadin[2]

Laboratory of infinite-dimensional analysis and mathematical physics, faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow State University[1],
National Research University «Higher School of Economics»[2]

УДК 51-76, 519.688

Поиск коротких фрагментов в анализе нуклеотидных последовательностей*

Л.У. Ахметзянова[1,2], О.Ю. Кирьянова[2], И.М. Губайдуллин[1,2]

Институт нефтехимии и катализа – обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (УФИЦ РАН)[1], Уфимский государственный нефтяной технический университет[2]

В работе рассматривается задача поиска коротких фрагментов (праймеров) в нуклеотидной последовательности цепи ДНК. Праймеры являются необходимым компонентом для проведения полимеразной цепной реакции (ПЦР). ПЦР – экспериментальный метод увеличения концентрации определенного фрагмента ДНК в биологическом материале. Праймеры – это короткие синтетические нуклеотидные последовательности, длина которых 10-30 нуклеотидов [1].

Необходимо найти позиции включения прямого и обратного праймера в нуклеотидной последовательности таким образом, чтобы расстояние между ними варьировалось в диапазоне от 50 до 500 нуклеотидов. Пример такого поиска представлен на рис.1.

Рис. 1. Схематичное изображение праймеров и ампликона при анализе генома для ПЦР.

Если представить последовательность ДНК в виде огромной строки (порядка нескольких миллиардов элементов), то задачу поиска праймеров можно сформулировать следующим образом.

Необходимо найти позицию полного совпадения некоторого образца A в более длинной строке T, также определить все включения образца A в строке T. Эта задача схожа с поиском определенного слова в фрагменте текста.

Самый просто способ поиска – это пошаговое сравнение элементов образца в строке.

В данном случае «наивный» метод имеет ряд недостатков, а именно:

- Высокая сложность $O(m \cdot n)$, где m – длина образца A, n – длина строки T;
- Сдвиг на одну позицию в случае несовпадения элемента образца и строки. Таким образом происходит многократное сравнение заведомо неравных элементов;
- Не учитывается информация о предыдущих сравнениях при дальнейшем поиске.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 17-44-020120

Данные недостатки учитывает алгоритм Бойера-Мура, который позволяет увеличить сдвиг в случае несовпадения элементов образца и строки [2]. Для этого вводится эвристика стоп-символа. Также посимвольное сравнение проводится справа налево, что также ускоряет процесс поиска.

Данный алгоритм был реализован средствами языка программирования Python с использованием библиотек Numpy для работы с математическими функциями и Biopython для работы с файлами, содержащими информацию о геномах.

Исследования проводились на геномах растений, данные о которых представлены в таблице 1.

Таблица 1.Перечень исследуемых геномов,
с указанием величины нуклеотидных пар (н.п.).

Геном	Размер генома (н.п.)
Arabidopsis thaliana (L.) Heynh	130 000 000
Solanum tuberosum L	1 000 000 000
Triticum aestivum L	17 000 000 000

Для ускорения расчетов был применен JIT-компилятор Numba. Numba – это компилятор just-in-time для Python, применяемый для работы с кодом, в котором используются массивы NumPy, функции и циклы [3]. Также расчеты проводились с применением параллельной директивы Numba prange(). Для более качественной оценки времени расчета поиск проводился на 6 различных праймерах размером 10 нуклеотидов.

На рис. 2 представлено сравнение времени расчета с применением компилятор Numba и параллельной директивой компилятора Numba.

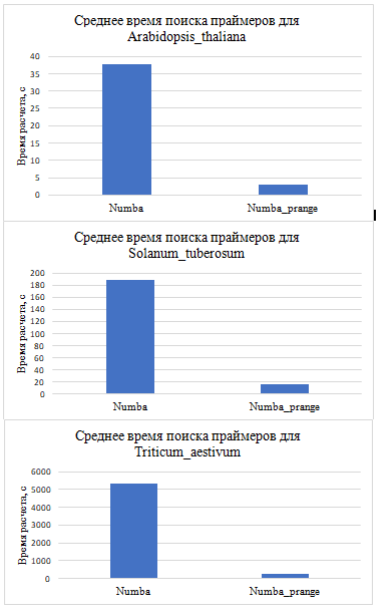


Рис. 2. Сравнение времени расчета поиска праймеров с использованием компилятора Numba и использованием функции prange().

Таким образом применение функции prange() позволило ускорить время расчета в среднем в 11 раз. В целом, реализация алгоритма Бойера-Мура с применением компилятора Numba позволяет значительно сократить время поиска праймеров в задачи планирования ПЦР.

Литература

1. Гарафутдинов Р. Р., Баймиев А. Х., Малеев Г. В., Алексеев Я. И., Зубов В. В., Чемерис Д. А., Кирьянова О. Ю., Губайдуллин И. М., Матниязов Р. Т., Сахабутдинова А. Р., Никоноров Ю.М ., Кулуев Б. Р., Баймиев А. Х., Чемерис А. В. Разнообразие праймеров для ПЦР и принципы их подбора // Биомика. 2019. Т. 11, № 1. С. 23-70.

2. Гасфилд Д. Строки, деревья, и последовательности в алгоритмах. Информатика и вычислительная биология. Пер. с англ. И. В. Романовского. СПб.:Невский Диалект; БХВ-Петербург. 2003. 654 с.

3. Numba: A High Performance Python Compiler. URL: http://numba.pydata.org/ (10.04.2020).

MSC2020 92B05, 68W32

Search for short fragments in nucleotide sequence analysis

L.U. Akhmetzyanova[1,2], O.Yu. Kiryanova[2], I.M. Gubaidullin[1,2]

Ufa Branch of the Russian Academy of Sciences[1], Ufa State Petroleum Technical University [2]

УДК 519.6

Моделирование акустических полей при обтекании тел потоком газа*

Багапов А. Р., Жалнин Р. В.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Работа посвящена моделированию акустичекого поля при обтекании тел потоком идеального, нетеплопроводящего, невязкого газа. Модель основана на законах сохранения массы, энергии и импульса [1] в форме

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F^{(1)}U}{\partial x} + \frac{\partial F^{(2)}U}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, F^{(1)}(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e+p) \end{pmatrix}, F^{(2)}(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Для аппроксимации системы (2) использовалась нелинейная консервативная квазимонотонная дифференциально-разностная схема [2]:

$$\frac{dU_{ij}}{dt} + \frac{H^{(1)}_{i+\frac{1}{2}j} - H^{(1)}_{i-\frac{1}{2}j}}{h_x} + \frac{H^{(2)}_{ij+\frac{1}{2}} - H^{(2)}_{ij-\frac{1}{2}}}{h_y} = 0, \tag{3}$$

где $H^{(1)}_{i+\frac{1}{2}j} = H^{(1)}(U^L_{i+\frac{1}{2}j}, U^R_{i+\frac{1}{2}j})$, $H^{(2)}_{ij+\frac{1}{2}} = H^{(2)}(U^L_{ij+\frac{1}{2}}, U^R_{ij+\frac{1}{2}})$ - дискретные потоки, для которых должны выполняться условия согласования:

$$H^{(1)}(U_{ij}, U_{ij}) = F^{(1)}(U_{ij}),$$
$$H^{(2)}(U_{ij}, U_{ij}) = F^{(2)}(U_{ij}).$$

Здесь $U^L_{i+\frac{1}{2}j}, U^R_{i+\frac{1}{2}j}$ - значения вектора консервативных переменных слева и справа от границы между ячейками с индексами (i, j) и $(i+1, j)$ соответственно, на которой вычисляется поток. Для вычисления этих значений слева и справа использовалась WENO-схема, обеспечивающая пятый порядок точности в области, где сохраняется гладкость решения. [3, 5, 6]

Для вычисления дискретных потоков использовалась схема HLLC. [4]

Для дискретизации по времени дифференциально-разностной схемы использовалась TVD–схема Рунге-Кутта третьего порядка [6]:

$$\begin{aligned} U^* &= U^n + \Delta t \cdot L(U^n), \\ U^{**} &= \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}U^* + \frac{1}{4}\Delta t \cdot L(U^*), \\ U^{***} &= \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}U^{**} + \Delta t \cdot L(U^{**}). \end{aligned} \tag{4}$$

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-41-130001

Для моделирования акустического поля была выбрана усреднённая по времени характеристика – общий уровень звукового давления(OASPL-Overall Sound Pressure Level), по которой можно судить об акустическом поле вокруг объекта на протяжении некоторого времени. [7]

$$OASPL(R) = 10\log_{10}\left(\frac{\langle p'(R)^2\rangle}{p_0^2}\right), \tag{5}$$

где $p_0 = 2\cdot 10^{-5}$ Па – минимальный порог слышимости звука, $\langle p'(R)^2\rangle$ – среднее значение квадрата колебаний давления в точке R, вычисляемое по формуле [8]:

$$\langle p'(R)^2\rangle = \frac{\sum\limits_{i=0}^{N_t} {p_i'}^2}{N_t}, \tag{6}$$

где

$$p'(R,t_i) = p(t_i) - p(t_{i-1}), \qquad i = 1, ..., N_t. \tag{7}$$

По описанным выше схемам и формулам получаем данные о газодинамических параметрах, которые визуализируются и анализируются.

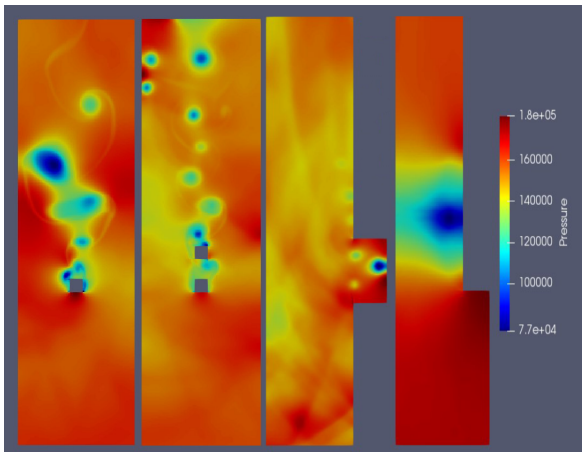


Рис. 1. Поле распределения давления для различных объектов.

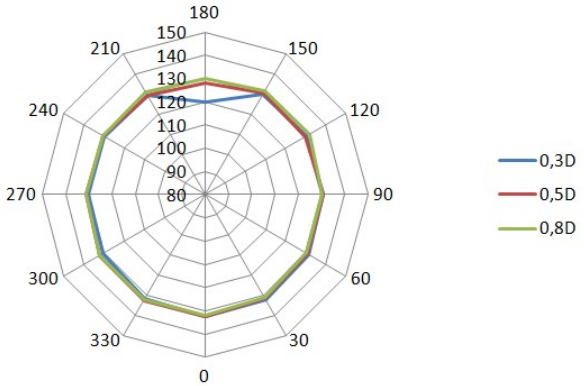


Рис. 2. Азимутальная диаграмма направленности OASPL для квадратного блока.

На основе визуализации полей давления и графиков общего уровня колебаний давления сделаны выводы об информативности рассмотрения ближнего поля течения газа, о процессах происходящих при обтекании объектов и об акустических явлениях, возникающих при этом.

Литература

1. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука. 1980. 424 с.

2. Тишкин В. Ф., Никишин В. В., Попов И. В., Фаворский А. П. Разностные схемы трехмерной газовой динамики для задачи о развитии неустойчивости Рихтмаера-Мешкова // Математическое моделирование. 1995. Т. 7, № 5. С. 15-25.

3. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes. Journal of computational physics. 1996. Vol. 126, No. 1. pp. 202-228.

4. Toro E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2009. 724 p.

5. Жалнин Р. В., Змитренко Н. В., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф. Численное моделирование развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова с использованием схем высокого порядка точности // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 10. С. 61–66

6. Shu C.-W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws // ICASE Report 97-65. 1997. 84 p.

7. Бобков В. Г. Численное моделирование обтекания винта вертолета и определение аэроакустических характеристик. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 2018. 176 с.

8. Wijker J. J. Spacecraft Structures. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Heidelberg, 2008. 504 p.

MSC2020 76M20; 76Q05

Modeling of acoustic fields during gas flow around bodies

A. R. Bagapov, R. V. Zhalnin

National Research Mordovia State University

УДК 519.853.4

Алгоритм глобальной оптимизации с использованием численных оценок производной минимизируемой функции*

Баркалов К. А., Сысоев А. В., Ямщиков И. С.

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе рассматривается задача поиска глобального минимума x^* одномерной функции $\varphi(x)$ вида

$$\varphi(x^*) = \min\{\varphi(x) : x \in [a, b]\}. \tag{1}$$

Предполагается, что целевая функция является многоэкстремальной и задана в виде "черного ящика", т.е. некоторого алгоритма вычисления ее значений.

В задачах вида (1) получение гарантированных оценок глобального минимума возможно только при наличии тех или иных предположений о поведении минимизируемой функции $\varphi(x)$. Одним из наиболее часто используемых предположений является выполнимость условия Липщица

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le L\,|x_1 - x_2|\,,\ x_1, x_2 \in [a, b],\ 0 < L < \infty.$$

Условие Липщица соответствует предположению ограниченности изменения значения функции при ограниченном изменении ее аргумента. Данное условие позволяет строить оценки возможного поведения функции $\varphi(x)$ на основе конечного множества ее значений, вычисленных в точках области поиска $[a, b]$.

Более сильным предположением о характере поведения функции является липшицевость ее первой производной

$$\left|\varphi'(x_1) - \varphi'(x_2)\right| \le L_1\,|x_1 - x_2|\,,\ x_1, x_2 \in [a, b],\ 0 < L_1 < \infty. \tag{2}$$

Выполнение условия (2) позволяет формировать более точные оценки возможных значений минимизируемой функции $\varphi(x)$, что обеспечивает возможность существенного повышения эффективности разрабатываемых алгоритмов. Однако при решении задач оптимизации с функциями вида "черный ящик" точные значения производных, как правило, недоступны, а их численная оценка (с помощью операторов численного дифференцирования) требует дополнительных вычислений значений функции. При этом даже одно вычисление значения функции (*испытание*) является трудоемкой операцией, т.к. связано с проведением численного моделирования.

Следовательно, перспективной является разработка методов глобальной оптимизации, в которых необходимые значения производных вычисляются на основе точек предшествующих итераций, без проведения дополнительных поисковых испытаний.

В работе [1] был сформулирован алгоритм глобального поиска с использованием производных для решения одномерных задач. Данный метод в процессе своей работы предполагает построение последовательности точек $x^k \in [a, b]$, в которых проводятся испытания.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-07-00242), научно-образовательного математического центра (075-02-2020-1483/1) и государственного задания (0729-2020-0055).

Множество троек $\{x^i, \varphi^i = \varphi(x^i), \varphi'^i = \varphi'(x^i)\}, 0 \le i \le k$, составляет поисковую информацию, накопленную методом после проведения k шагов.

Общая схема алгоритма может быть представлена в следующем виде. Первые два испытания проводятся в граничных точках области поиска, т.е. $x^0 = a, x^1 = b$. Для выбора точки $x^{k+1}, k > 1$, очередного испытания требуется выполнить следующие действия.

1. Перенумеровать точки $x^0, ..., x^k$ предшествующих испытаний нижним индексом в порядке возрастания координаты, т.е.

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_k = b, \tag{3}$$

   и сопоставить им значения $\varphi_i = \varphi(x_i), \varphi'_i = \varphi'(x_i)\}, 0 \le i \le k$, вычисленные в этих точках.

2. Для каждого интервала $(x_{i-1}, x_i), 1 \le i \le k$, вычислить его *характеристику* $R(i)$.

3. Определить интервал с максимальной характеристикой

$$R(t) = \max\{R(i), 1 \le i \le k\}.$$

4. Провести следующее испытание в точке интервала с максимальной характеристикой, т.е. $x^{k+1} \in (x_{t-1}, x_t)$.

5. Проверить условие остановки $x_t - x_{t-1} < \epsilon$, где t – номер интервала с максимальной характеристикой, а $\epsilon > 0$ – заданная точность.

Конкретные формулы для вычисления характеристики интервала и точки проведения нового испытания, а также соответствующие теоретические утверждения о сходимости алгоритма представлены в [1].

В рамках проведенного исследования был предложен алгоритм, в котором точные значения производных заменяются их численными оценками, вычисленными на основе ранее накопленной поисковой информации. В соответствии с нумерацией (3) точек испытаний в порядке возрастания координаты в качестве численных оценок значений производных $\overline{\varphi_i}' = \overline{\varphi}'(x_i) \approx \varphi'(x_i)$, $0 \le i \le k$ можно использовать трехточечную аппроксимацию вида

$$\begin{gathered}
\overline{\varphi_0}' = \frac{1}{H_1}\left(-(2+\delta_2)\varphi(x_0) + \frac{(\delta_2+1)^2}{\delta_2}\varphi(x_1) - \frac{1}{\delta_2}\varphi(x_2)\right), \\
\overline{\varphi_i}' = \frac{1}{H_i}\left(-\delta_{i+1}\varphi(x_{i-1}) - \frac{\delta_{i+1}^2 - 1}{\delta_{i+1}}\varphi(x_i) + \frac{1}{\delta_{i+1}}\varphi(x_{i+1})\right),\ 0 < i < k, \\
\overline{\varphi_k}' = \frac{1}{H_{k-1}}\left(\delta_k\varphi(x_{k-2}) - \frac{(\delta_k+1)^2}{\delta_k}\varphi(x_{k-1}) + \frac{2+\delta_k}{\delta_k}\varphi(x_k)\right),
\end{gathered} \tag{4}$$

где $H_i = h_i + h_{i+1}$, $\delta_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_i}$, $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Таким образом, новый алгоритм представляет собой дальнейшее развитие метода из [1], в котором значения первой производной минимизируемой функции заменяются их численные оценками вида (4). Отметим, что в алгоритме вместо априори неизвестного значения константы Липшица L_1 для $\varphi'(x)$ используется ее адаптивная оценка m, вычисляемая на основе полученной поисковой информации. Справедлива следующая теорема о сходимости алгоритма.

Теорема 1. *Пусть $\{x^k\}$ есть последовательность точек испытаний, порождаемой алгоритмом при минимизации функции $\varphi(x), x \in [a, b]$, производная которой удовлетворяет условию Липщица с константой L_1, и пусть на некотором шаге поиска k для адаптивной оценки константы Липшица m справедливо неравенство*

$$rm > \gamma L_1,\ \gamma = \left[4(b-a) + (b-a)^2 + 0.5\right]/\epsilon^2,$$

где $r > 1$ – параметр, а $\epsilon > 0$ – точность в условии остановки алгоритма. Тогда любая точка глобального минимума x^* является предельной точкой последовательности $\{x^k\}$ и, кроме того, любая предельная точка $\overline{x}$ этой последовательности является точкой глобального минимума функции $\varphi(x)$.

Для демонстрации эффективности предложенного алгоритма глобального поиска с использованием численных оценок производных (АГПЧП) было проведено сравнение со следующими методами глобальной оптимизации: метод Гальперина (МГ) [2], метод Пиявского (МП) [3], алгоритм глобального поиска Стронгина (АГП) [4], алгоритм глобального поиска с использованием производных (АГПП) [1]. Сравнение было проведено при решении серии из 20 многоэкстремальных задач, использованных для оценки эффективности методов глобальной оптимизации в [1].

В проведенных экспериментах точность поиска решения составила $\epsilon = 10^{-4}(b-a)$, где a и b – границы области поиска. Для методов Гальперина и Пиявского использовались точные значения константы Липшица минимизируемой функции, оцененные предварительно. Для алгоритма глобального поиска Стронгина использовалось значение параметра $r = 2$. Для методов с использованием производных использовался параметр $r = 1.1$. В таблице 1 отражено среднее число итераций (округленное до целых значений), потребовавшихся методам для решения всех задач серии.

Таблица 1. Результаты решения серии задач.

	МГ	МП	АГП	АГПП	АГПЧП
Среднее число итераций	720	314	244	26	24

Результаты экспериментов наглядно демонстрируют превосходство (по числу итераций) методов с использованием производных над методами, в которых производные не используются. Одновременно с этим видно, что методам АГПП и АГПЧП требуется примерно одинаковое число итераций. При этом каждая итерация АГПП подразумевает вычисление точного значения производной, тогда как в АГПЧП никакие дополнительные вычисления значений функции и ее производных не требуются.

Направлением дальнейших исследований будет являться исследование свойств предложенного алгоритма при решении многомерных задач многоэкстремальной оптимизации. Обобщение на многомерные задачи может быть выполнено, например, с использованием схемы диагонального разбиения области поиска [5] или же с использованием схемы рекурсивной (вложенной) оптимизации [6].

Литература

1. Гергель В. П. Об одном способе учета значений производных при минимизации многоэкстремальных функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36, № 5. С. 51-67.

2. Galperin E. A. The cubic algorithm. J. Math. Anal. Appl. 1985. vol. 112. pp. 635-640.
3. Пиявский С. А. Один алгоритм отыскания абсолютного экстремума функций // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12. № 4. С. 888-896.
4. Стронгин Р. Г., Гергель В. П., Гришагин В. А., Баркалов К. А. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации. М.: Изд-во МГУ, 2013. 280 с.
5. Сергеев Я. Д., Квасов Д. Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
6. Городецкий С. Ю., Гришагин В. А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. 489 с.

MSC2020 90C26

Global optimization algorithm using numerical estimates of the objective function derivative

K.A. Barkalov, A.V. Sysoyev, I.S. Yamshchikov
Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod

УДК 519.853.4

Решение задач глобальной оптимизации с учетом возможных разрывов целевой функции*

Баркалов К. А., Усова М. А.

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе рассматривается задача поиска глобального минимума x^* одномерной функции $\varphi(x)$ вида

$$\varphi(x^*) = \min\{\varphi(x) : x \in [a, b]\}. \tag{1}$$

Предполагается, что целевая функция является многоэкстремальной и задана в виде "черного ящика", т.е. некоторого алгоритма вычисления значения функции в зависимости от параметра. При этом каждое *испытание* (т.е. вычисление значения функции в области поиска) является трудоемкой операцией.

Стоит отметить, что задачи одномерной оптимизации, несмотря на свою простоту, играют важную роль, поскольку многие подходы к решению многомерных задач оптимизации так или иначе основаны на сведении решения исходной многомерной задачи к решению серии связанных задач одномерной оптимизации (см., например, [1, 2]). В литературе описаны различные методы решения задачи (1) в зависимости от предположений о свойствах целевой функции. Одним из подобных наложенных условий на вид целевой функции, которое часто выполняется в прикладных оптимизационных задачах, является предположение о том, что целевая функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица с априори неизвестной константой L

$$\left|\varphi(x') - \varphi(x'')\right| \le L\left|x' - x''\right|,\ x', x'' \in [a, b],\ 0 < L < \infty.$$

Использование данного свойства целевой функции является типичным для многих подходов к разработке алгоритмов многоэкстремальной оптимизации [3, 4].

Однако в некоторых прикладных задачах свойство липшицевости может не выполняться в силу наличия скачкообразных изменений значений функции в ряде точек области поиска. Такие изменения в поведении целевой функции могут являться отображением в математической модели специфики оптимизируемого объекта (например, скачков геометрических размеров или свойств материала, ударных воздействий, резонансных явлений и т.п.). Мы будем интерпретировать подобные резкие изменения как разрывы первого рода. Иногда множество точек, в которых характеристики объекта претерпевают скачок, известно заранее. Вместе с тем существуют задачи, в которых нет априорных оценок точек разрыва, но имеется информация, что такие точки возможны.

Известные методы решения подобных задач, как правило, либо обобщают понятие градиента для разрывных функций [5], либо принадлежат классу биоинспирированных алгоритмов [6]. Указанные методы обеспечивают, вообще говоря, поиск только *локального решения* задачи.

В докладе на конференции будет представлен разработанный в ННГУ им. Н.И. Лобачевского эффективный алгоритм для поиска *глобального решения* многоэкстремальных задач с разрывными функциями. Данный алгоритм является дальнейшим развитием *алго-*

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-07-00242), научно-образовательного математического центра (075-02-2020-1483/1) и государственного задания (0729-2020-0055).

ритма глобального поиска (АГП), описание, теория сходимости и различные модификации которого представлены в [7].

В новом алгоритме глобального поиска для разрывных функций (АГП-Р) учет разрывов целевой функции происходит явно, т.е. без решения вспомогательной задачи построения сглаживающего преобразования и самой операции сглаживания разрыва. При этом охватываются случаи как заданных, так и не заданных точек разрыва: при отсутствии информации о координатах точек разрыва их оценка проводится адаптивно, на основе вычисленных значений функции в точках проведенных испытаний.

Вместо трудоёмкой операции сглаживания в АГП-Р при построении оценок неизвестной константы Липшица L целевой функции проводится приближенная идентификация точек, подозрительных на разрыв. Ошибочное определение некоторых точек разрыва не приводит к потере сходимости метода. Решающие правила алгоритма интерпретируют такие точки как случай устранимого разрыва, поскольку левый и правый пределы оптимизируемой функции в таких точках совпадают.

В качестве примера рассмотрим задачу минимизации функции

$$\varphi(x) = 0.1\sum_{i=1}^{5} i\sin(10(i+1)x+i) + \begin{cases} -4, & 0 \le x < 3.1 \\ 10, & 3.1 \le x < 4.6 \\ 0, & 4.6 \le x < 7.0 \\ 30, & 7.0 \le x < 9.0 \\ 0, & 9.0 \le x \le 10.0 \end{cases} \tag{2}$$

при $x \in [0, 10]$.

Для решения задачи использовался алгоритм глобального поиска для разрывных функций (АГП-Р), точность поиска решения была выбрана равной $\epsilon = 0.001$. На рис. 1 изображен график функции, на котором наглядно видны точки разрывов. Штрихами под графиком обозначены точки поисковых испытаний, потребовавшихся алгоритму для решения задачи с заданной точностью.

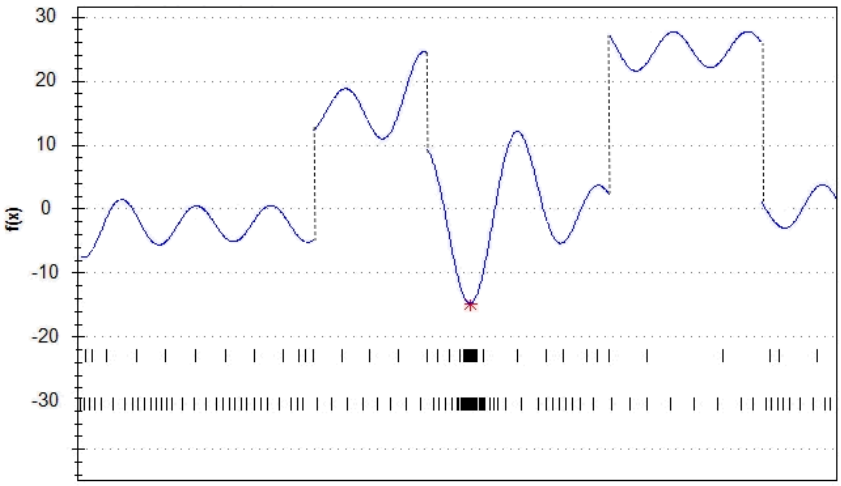


Рис. 1. График разрывной целевой функции и точки испытаний.

В случае, когда точки разрыва были известны, метод провел 74 испытания (штрихи верхнего ряда). В случае, когда все точки разрыва не были заданы заранее и идентифицировались в процессе поиска, методу потребовалось 140 испытаний (штрихи нижнего ряда). В обоих случаях распределение точек испытаний показывает наличие сходимости лишь к

глобальному экстремуму, накопления точек около локальных экстремумов — отсутствуют. Стоит также отметить, что несмотря на то, что в случае незаданных точек разрыва число итераций метода увеличилось в 2 раза, алгоритм избегал проведения итераций в окрестностях точек разрыва благодаря правильной идентификации этих точек.

Для демонстрации эффективности АГП-Р проведем его сравнение с алгоритмом имитации отжига (ИО), реализованным в MATLAB Global Optimization Toolbox. Итерация данного алгоритма начинается с генерирования новой точки с использованием датчика псевдослучайных чисел. Расстояние между новой и текущей точкой определяется пропорционально текущей «температуре» (т.е. значению функции в точке). Если целевая функция в новой точке лучше, чем в текущей, то новая точка становится текущей; в противном случае новая точка может стать текущей только с некоторой вероятностью. Этот подход и позволяет избегать «застревания» в локальном минимуме, что делает метод применимым к решению задач многоэкстремальной оптимизации. Помимо этого ИО заявляется как метод, позволяющий решать задачи в том числе и с разрывами, что позволяет использовать его для сравнения с реализованным АГП-Р.

В качестве основного критерия сравнения будем использовать число поисковых испытаний (т.е. вычислений значений целевой функции), выполненное методом до достижения сходимости. Сравнение алгоритмов проводилось при решении серии из 100 задач с разрывной целевой функцией, которые были построены аналогично задаче (2). Сгенерированные случайным образом непрерывные периодические функции

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{4} [A_i \sin(5\pi i x) + B_i \cos(5\pi i x)],\ x \in [0, 1],$$

где коэффициенты A_i, B_i выбирались случайно и равномерно из интервала $[-6, 6]$, были дополнены четырьмя точками разрыва (выбранными случайно из [0,1]) и значением скачка из диапазона $[-20, 30]$.

В Таблице 1 представлено число решенных задач и среднее число испытаний, выполненных сравниваемыми методами при решении серии. Задача считалась решенной, если для точки некоторого испытания x^k выполнялось условие $\left|x^k - x^*\right| \leq \epsilon$, где x^* — известное решение задачи, а $\epsilon = 10^{-3}$ — точность, используемая в условии остановки методов.

Таблица 1. Результаты решения серии задач с разрывными функциями

Метод	Решено задач	Среднее число испытаний
ИО	92	758
АГП-Р	100	76

Результаты показывают, что метод АГП-Р успешно решил все задачи серии, тогда как метод имитации отжига не справился с решением 8 задач, затратив при этом в среднем в 10 раз больше испытаний.

Литература

1. Городецкий С. Ю., Гришагин В. А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. 489 с.

2. Сергеев Я. Д., Квасов Д. Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

3. Евтушенко Ю. Г., Малкова В. У., Станевичюс А.-И.А. Параллельный поиск глобального экстремума функций многих переменных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49, № 2. С. 255-269.

4. Елсаков С. М., Ширяев В. И. Однородные алгоритмы многоэкстремальной оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 10. С. 1727-1740.

5. Батухтин В. Д., Бигильдеев С. И., Бигильдеева Т. Б. Численные методы решения разрывных экстремальных задач // Изв. РАН, сер. теория и сист. управления. 1997. Т. 3. С. 113-120.

6. Jihui Z., Junqin X. A new differential evolution for discontinuous optimization problems // Proceedings of the Third International Conference on Natural Computation. 2007. Vol. 3. P. 483-487.

7. Стронгин Р. Г., Гергель В. П., Гришагин В. А., Баркалов К. А. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации. М.: Изд-во МГУ, 2013. 280 с.

MSC2020 90C26

Solving global optimization problems taking into account possible discontinuities of the objective function

K.A. Barkalov, M.A. Usova

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod

УДК 519.63

Об одном приближённом методе нахождения матрицы коэффициентов в обратной задаче для системы параболических уравнений

Бойков И. В., Рязанцев В. А.

Пензенский государственный университет

В работе рассматривается задача восстановления неизвестной матрицы $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, где $i = \overline{1,2}$, $j = \overline{1,2}$, в задаче Коши для системы из двух линейных параболических уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{u}, \qquad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m, \tag{2}$$

где $\mathbf{u} = (u_1,\ u_2)^T$, $\mathbf{u}_0 = (u_{01},\ u_{02})^T$, а Δ определяется формулой

$$\Delta \mathbf{u} = \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_m^2},\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_m^2} \right)^T.$$

Заметим, что описываемый ниже метод без труда обобщается на случай задачи (1)-(2), имеющей произвольную размерность n. Случай $n = 2$ здесь фиксируется из соображений простоты и наглядности изложения.

Пусть при каждом $t \geqslant 0$ выполняются условия $u_1(t, \mathbf{x}) \in L_2(\mathbb{R}^m)$, $u_2(t, \mathbf{x}) \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Предположим, что дополнительно известной является вектор-функция $\mathbf{u}(t^*, \mathbf{x})$.

Применив многомерное преобразование Фурье

$$\mathfrak{F}[f(\mathbf{x})] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_m) e^{-i(x_1\omega_1 + \ldots + x_m\omega_m)}\, dx_1 \ldots dx_m$$

к задаче (1)-(2), получим следующую систему уравнений в спектральной области:

$$\frac{\partial \mathbf{U}(t, \boldsymbol{\omega})}{\partial t} = \left[-\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{A}\right] \mathbf{U}(t, \boldsymbol{\omega}), \qquad \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_m)^T \tag{3}$$

$$\mathbf{U}(0, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega}) = (U_{01}(\boldsymbol{\omega}), U_{02}(\boldsymbol{\omega}))^T = (\mathfrak{F}[u_{01}(\mathbf{x})], \mathfrak{F}[u_{02}(\mathbf{x})])^T, \tag{4}$$

где $\mathbf{U}(t, \boldsymbol{\omega}) = (U_1(t, \boldsymbol{\omega}), U_2(t, \boldsymbol{\omega}))^T = (\mathfrak{F}[u_1(t, \boldsymbol{x})], \mathfrak{F}[u_2(t, \boldsymbol{x})])^T$, $\boldsymbol{\omega}^2 = \omega_1^2 + \ldots + \omega_m^2$.

Решение системы (3) с начальным условием (4) имеет следующий вид [1]:

$$\mathbf{U}(t, \boldsymbol{\omega}) = \exp\left[-t\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{A}\right] \mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega}). \tag{5}$$

Для того, чтобы на основании системы (5) осуществить восстановление матрицы $\mathbf{A}$, зафиксируем два ненулевых значения переменной $\boldsymbol{\omega}$, одно из которых ($\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^*$) произвольно, а другое ($\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{**}$) связано с первым при помощи формулы $\boldsymbol{\omega}^{**} = \sqrt{2}\boldsymbol{\omega}^*$. Поочерёдно зафиксировав в (5) значения $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^*$ и $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{**}$, получим следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} \mathbf{U}(t, \boldsymbol{\omega}^*) = \exp\left[-t(\boldsymbol{\omega}^*)^2 \mathbf{A}\right] \mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega}^*), \\ \mathbf{U}(t, \boldsymbol{\omega}^{**}) = \exp\left[-t(\boldsymbol{\omega}^{**})^2 \mathbf{A}\right] \mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega}^{**}). \end{cases} \tag{6}$$

Зафиксируем $t = t^*$ в системе (6) и обозначим $\mathbf{C} = \exp\left[-t^*(\boldsymbol{\omega}^*)^2\mathbf{A}\right]$. Легко видеть, что

$$\exp\left[-t^*(\boldsymbol{\omega}^{**})^2\mathbf{A}\right] = \exp\left[-2t^*(\boldsymbol{\omega}^*)^2\mathbf{A}\right] = \left\{\exp\left[-t^*(\boldsymbol{\omega}^*)^2\mathbf{A}\right]\right\}^2 = \mathbf{C}^2$$

Стало быть, система (6) при $t = t^*$ примет следующий вид.

$$\begin{cases} \mathbf{C}\mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega}^*) = \mathbf{U}(t^*, \boldsymbol{\omega}^*), \\ \mathbf{C}^2\mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega}^{**}) = \mathbf{U}(t^*, \boldsymbol{\omega}^{**}). \end{cases} \tag{7}$$

Обозначим $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega}^*) = (y_1, y_2)^T$, $\mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega}^{**}) = (y_3, y_4)^T$, $\mathbf{U}(t^*, \boldsymbol{\omega}^*) = (f_1, f_2)^T$, $\mathbf{U}(t^*, \boldsymbol{\omega}^{**}) = (f_3, f_4)^T$. Тогда система (7) в развёрнутом виде запишется следующим образом.

$$\begin{cases} v_1y_1 + v_2y_2 = f_1, \\ v_3y_1 + v_4y_2 = f_2, \\ \left(v_2v_3 + v_1^2\right)y_3 + \left(v_2v_4 + v_1v_2\right)y_4 = f_3, \\ \left(v_3v_4 + v_1v_3\right)y_3 + \left(v_4^2 + v_2v_3\right)y_4 = f_4. \end{cases} \tag{8}$$

Система (8) может быть решена любым алгоритмом решения таких задач.

Отметим, что система (8) может иметь более одного решения. Для этих решений должна быть проведена процедура отбраковки, заключающаяся в проверке условий существования вещественной матрицы $\mathbf{A}$, являющейся решением уравнения $\mathbf{C} = \exp\left[-t^*(\omega^*)^2\mathbf{A}\right]$. Эти условия, приведенные в книге [2, стр. 212], формулируются следующим образом.

Утверждение 1. *Уравнение* $\exp[\mathbf{X}] = \mathbf{F}$, *где* $\mathbf{F}$ *— вещественная невырожденная матрица размерности* $n \times n$, *имеет решение — вещественную матрицу* $\mathbf{X} = \ln(\mathbf{F})$ *размерности* $n \times n$, *тогда и только тогда, когда у матрицы* $\mathbf{F}$ *либо совсем нет элементарных делителей, соответствующих отрицательным характеристическим числам, либо каждый такой элементарный делитель повторяется чётное число раз.*

Тем самым, каждое найденное решение $\mathbf{C}$ системы уравнений должно быть проверено на справедливость для данного решения утверждения 1, и в случае, если утверждение 1 не имеет места, найденное решение должно быть исключено из дальнейшего рассмотрения.

Таким образом, алгоритм восстановления матрицы $\mathbf{A}$ в задаче (1)-(2) в предположении об априорной известности функции $\mathbf{u}(t^*, \mathbf{x})$ может быть сформулирован в виде следующей последовательности шагов.

1. Вычисляются преобразования $\mathbf{U}(t^*, \boldsymbol{\omega})$, $\mathbf{U}_0(\boldsymbol{\omega})$ функций $\mathbf{u}(t^*, \mathbf{x})$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ соответственно.

2. Выполняется построение системы нелинейных уравнений (8), которая затем решается при помощи одного из методов решения систем нелинейных уравнений.

3. На основании каждой найденной матрицы $\mathbf{C}$, удовлетворяющей условиям утверждения 1, находится матрица $\mathbf{B} = -t^*(\boldsymbol{\omega}^*)^2\mathbf{A}$ в результате решения уравнения

$$\exp(\mathbf{B}) = \mathbf{C}. \tag{9}$$

Это уравнение может быть решено различными способами; в частности, достаточно простым способом является вычисление отрезка ряда

$$\ln(\mathbf{C}) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p}(\mathbf{C} - \mathbf{I})^p, \tag{10}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица, имеющая ту же размерность, что и $\mathbf{C}$. Ряд (10) является [2, стр. 113] сходящимся, если каждое характеристическое число λ матрицы $\mathbf{C}$ удовлетворяет условию

$$|\lambda - 1| < 1. \tag{11}$$

4. Алгоритм завершается построением матрицы $\mathbf{A}$ на основе матрицы $\mathbf{B}$, выполняемом в соответствии с формулой

$$\mathbf{A} = \frac{1}{t^*(\boldsymbol{\omega}^*)^2}\mathbf{B}. \tag{12}$$

При этом в случае, если таких матриц оказывается несколько, может потребоваться проведение дополнительной отбраковки найденных решений исходной задачи. В частности, достаточно простым способом является вычисление при $t = t^*$ правой части уравнения (5) в достаточно большом количестве различных точек $\boldsymbol{\omega}$ и проверка (приближённого) равенства вычисленнных значений соответствующим значениям $\mathbf{U}(t^*,\boldsymbol{\omega})$.

Приведём модельный пример.

Пример 1. *Пусть требуется восстановить матрицу* $\mathbf{A}$ *в задаче* (1)-(2), *если известными являются начальные условия*

$$u_{01}(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right] - \exp\left[-\frac{x^2}{8}\right], \qquad u_{02}(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right] + \exp\left[-\frac{x^2}{8}\right],$$

а также функции

$$u_1(1,x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[-\frac{x^2}{8}\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[-\frac{x^2}{16}\right], \quad u_2(1,x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[-\frac{x^2}{8}\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[-\frac{x^2}{16}\right].$$

Точное решение поставленной задачи даётся матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы решение задачи Коши (1)-(2) *определяют функции*

$$u_1(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}\exp\left[-\frac{x^2}{4(t+1)}\right] - \frac{1}{\sqrt{t+1}}\exp\left[-\frac{x^2}{8(t+1)}\right],$$
$$u_2(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}\exp\left[-\frac{x^2}{4(t+1)}\right] + \frac{1}{\sqrt{t+1}}\exp\left[-\frac{x^2}{8(t+1)}\right],$$

В соответствии с предложенным алгоритмом, поставленная задача решается следующим образом. Известно [3], что преобразования Фурье функций $u_{01}(x)$, $u_{02}(x)$, $u_1(1,x)$, $u_2(1,x)$ *определяются следующим образом.*

$$\mathfrak{F}\left[u_{01}(x)\right] = \sqrt{2}e^{-\omega^2} - 2e^{-2\omega^2}, \qquad \mathfrak{F}\left[u_{02}(x)\right] = \sqrt{2}e^{-\omega^2} + 2e^{-2\omega^2},$$
$$\mathfrak{F}\left[u_1(1,x)\right] = \sqrt{2}e^{-2\omega^2} - 2e^{-4\omega^2}, \qquad \mathfrak{F}\left[u_2(1,x)\right] = \sqrt{2}e^{-2\omega^2} + 2e^{-4\omega^2}.$$

Зафиксируем $\omega^* = 1/\sqrt{2}$; *тогда* $\omega^{**} = 1$. *Для того, чтобы построить систему* (8), *определим значения* y_k, f_k, *где* $k = 1,2,3,4$.

$$f_1 = 2e^{-1} - 2\sqrt{2}e^{-2} \approx 0.24959, \qquad f_2 = 2e^{-1} + 2\sqrt{2}e^{-2} \approx 0.79093,$$
$$f_3 = 2e^{-2} - 2\sqrt{2}e^{-4} \approx 0.15476, \qquad f_4 = 2e^{-2} + 2\sqrt{2}e^{-4} \approx 0.22802,$$
$$y_1 = 2e^{-1/2} - 2\sqrt{2}e^{-1} \approx 0.12201, \qquad y_2 = 2e^{-1/2} + 2\sqrt{2}e^{-1} \approx 1.59352,$$
$$y_3 = 2e^{-1} - 2\sqrt{2}e^{-2} \approx 0.24959, \qquad y_4 = 2e^{-1} + 2\sqrt{2}e^{-2} \approx 0.79093.$$

Определённая таким образом нелинейная система (8) *имеет три решения:*

$$\mathbf{C}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.48721 & 0.11932 \\ 0.11931 & 0.48720 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C}^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.75963 & 0.0.21479 \\ 1.36606 & 0.39175 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C}^{(3)} = \begin{pmatrix} -1.22481 & 0.25041 \\ -1.59262 & 0.61828 \end{pmatrix},$$

Характеристические числа найденных матриц:

$$\begin{aligned} &\text{для } \mathbf{C}^{(1)}: \quad \lambda_1^{(1)} = 0.36789, \quad \lambda_2^{(1)} = 0.60652, \\ &\text{для } \mathbf{C}^{(2)}: \quad \lambda_1^{(2)} = -0.97441, \quad \lambda_2^{(2)} = 0.60653, \\ &\text{для } \mathbf{C}^{(3)}: \quad \lambda_1^{(3)} = -0.97441, \quad \lambda_2^{(3)} = 0.36788. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что условиям утверждения 1 удовлетворяет только матрица $\mathbf{C}^{(1)}$. *Зафиксируем поэтому* $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{(1)}$ *и найдём матрицу* $\ln(\mathbf{C})$. *Поскольку, как нетрудно видеть, все характеристические числа матрицы* $\mathbf{C}$ *удовлетворяют условию* (11), *то матрицу* $\ln(\mathbf{C})$ *восстановим приближённо, вычислив частичную сумму ряда* (10), *ограничившись первыми* 100 *его членами.*

В результате последующего вычисления элементов матрицы $\mathbf{A}$ *в соответствии с формулой* $\mathbf{A} = -\mathbf{B}/\left(t^*(\omega^*)^2\right)$. *получена матрица*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.49996792259 & -0.499974674491 \\ -0.49993277249 & 1.50000982459 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что эта матрица лишь на незначительную погрешность отличается от точного решения исходной задачи.

Литература

1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 535 с.

2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 560 с.

3. Снеддон И. Преобразование Фурье. М.: Издательство иностранной литературы, 1955. 668 с.

MSC2020 65M32

On the approximate method for determination of coefficient matrix in inverse problem for a system of parabolic equation

I. V. Boykov, V. A. Ryazantsev

Penza State University

УДК 004.852

Использование алгоритма HOG и классификатора SVM при распознавании мезофаз кокса

Галин А. Ш., Еникеев М. Р.

Уфимский государственный нефтяной технический университет

Коксование – процесс переработки жидкого сырья путем нагрева до высоких температур. В результате образуется твердый осадок – нефтяной кокс. Это концентрированный углеродный твердый остаток, который остается после процесса коксования, основной целью которого является преобразование основной массы сырой нефти в более ценных газов и жидких продуктов такие, как бензин и дизельное топливо. Основываясь на физико-химических свойствах нефтяного кокса, они классифицируются, как изотропный (мелкозернистый), рядовой (волокнистый) и игольчатый кокс. Игольчатый кокс – это высокоструктурированный углеродный продукт с низким содержанием металлов и серы. Его используют для изготовления крупногабаритных (диаметром 500 мм и выше) графитированных электродов, которые применяют при выплавки стали в электросталеплавильных печах – процесса электросталеплавления. Именно игольчатый кокс придает электродам специальные свойства, такие как высокая электропроводимость при высоком коэффициенте термического расширения на высоких температурах. Графитированные электроды, активно применяемые в атомной, металлургической, химической и космической отраслях, нельзя получить из обычного нефтяного кокса, а только на основе игольчатого [3].

В настоящее время общепризнано, что многообразие свойств углеродных материалов обусловлено надмолекулярной структурой, формирование которой происходит на стадии мезофазных превращений. При слиянии сфер мезофазы, называемой коалесценцией, происходит переориентация их внутренней структуры. Сферы, образованные слоями плоских конденсированных ароматических колец, встраиваются в слои другой сферы, что сопровождается образованием дисклинацией [4]. Размеры мезофазы определяют микроструктурные характеристики коксов, прочностные и другие свойства. Особенности мезофазных превращений зависят от химического состава исходного сырья, вязкости реакционной массы и температурного режима получения коксов.

Распознавая мезофазу, используя алгоритмы машинного обучения, на полученных в лабораторных условиях изображениях и считывая размер, можно контролировать процесс формирования игольчатого кокса (Рис. 1.).

Для распознавания объектов на изображении используются алгоритмы: гистограмма направленных градиентов (HOG, Histogram of Oriented Gradients) и метод опорных векторов (SVM, support vector machine).

Гистограмма направленных градиентов (histogram oriented gradients, HOG) - классический алгоритм обучения с учителем, который состоит из этапов обучения модели и применения полученной модели к новым данным. Алгоритм проводится путем разделения изображения на ячейки и построения гистограмм направленных градиентов пикселей ячеек. Результатом работы алгоритма является дескриптор, включающий в себя комбинацию полученных гистограмм. На этапе обучения модели сгенерированный вектор признаков используется в качестве входных данных для SVM классификатора [1].

Метод опорных векторов (SVM, support vector machine) – класс алгоритмов обучения с учителем как для классификации, так и для регрессии. Метод принадлежит семейству линейных классификаторов. В основе метода лежит перевод исходных векторов в простран-

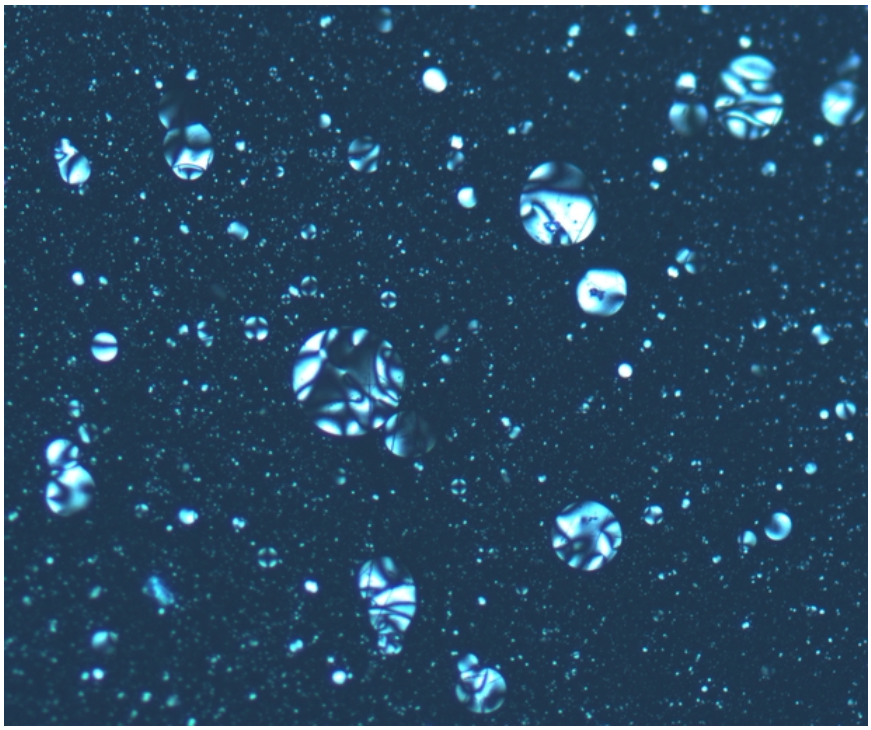


Рис. 1. Изображение мезофазы

ство более высокой размерности и поиск разделяющей гиперплоскости с максимальным зазором в этом пространстве. По обеим сторонам гиперплоскости строятся две параллельные гиперплоскости, разделяющие классы. Разделяющая гиперплоскость максимизирует расстояние до двух параллельных гиперплоскостей. Средняя ошибка классификатора меньше при большем расстоянии между параллельными гиперплоскостями [5].

Метод опорных векторов можно рассматривать как нелинейное обобщение линейного классификатора, основанное на расширении размерности исходного пространства ядра с помощью специальных ядерных функций. Это позволяет строить модели с использованием разделяющих поверхностей самой различной формы [5].

Одна из применяемых с этой целью стратегий состоит в вычислении базисных функций, центрированных по каждой из точек набора данных, с тем чтобы далее алгоритм SVM проанализировал полученные результаты. Эта разновидность преобразования базисных функций, известная под названием преобразования ядра (kernel transformation), основана на отношении подобия (или ядре) между каждой парой точек.

Основные этапы работы алгоритма на примере алгоритма распознавания мезофазы:

1. Вычисление градиента.

   Вычисление градиента осуществляется для каждого пикселя изображения с помощью маски. Наиболее оптимальной маской для данного алгоритма является одномерная дифференцирующая маска.

2. Вычисление гистограмм ячеек изображения.

   На этом шаге изображение делится на ячейки фиксированного размера. В каждой ячейке производится расчет преобладающего направления градиента путем анализа значения градиента каждого пикселя ячейки. Каналы гистограммы равномерно распределяются от 0° до 180° или же от 0° до 360°, в зависимости от того, вычисляется

«знаковый» или «беззнаковый градиент» [2].

3. Формирование и нормирование блоков дескрипторов.

   Полученные ячейки группируются в более крупные связанные блоки для нормирования значения градиентов. Это позволяет учитывать яркость и контрастность каждой ячейки. Дескриптор HOG, таким образом, является вектором компонент нормированных гистограмм ячеек из всех областей блока. Как правило, блоки перекрываются, то есть каждая ячейка входит более чем в один конечный дескриптор (Рис. 2.).

```
[[0.00262338 0.00164591 0.00151508 ... 0.00960364 0.00241719 0.00149189]
 [0.00897692 0.00601282 0.00157926 ... 0.00318732 0.00085952 0.0012165 ]
 [0.00035426 0.00018247 0.00085887 ... 0.00052607 0.0005008  0.00351754]
 ...
 [0.03553759 0.01998743 0.00456055 ... 0.00452613 0.00230292 0.02931291]
 [0.00410512 0.00289367 0.00290372 ... 0.0220955  0.02543625 0.00504496]
 [0.00952528 0.         0.0017961  ... 0.00510345 0.00562953 0.03061762]]
```

Рис. 2. Дескриптор, полученный с помощью алгоритма HOG

4. Классификация HOG-дескрипторов с использованием системы обучения с учителем.

   В качестве классификатора используется метод опорных векторов. Результатом работы классификатора являются два образа объекта с положительными и отрицательными весами опорных векторов. Положительные веса, обрамленные красными рамками, означают принадлежность признаков мезофазе игольчатого кокса, отрицательные – к фону (Рис. 3.).

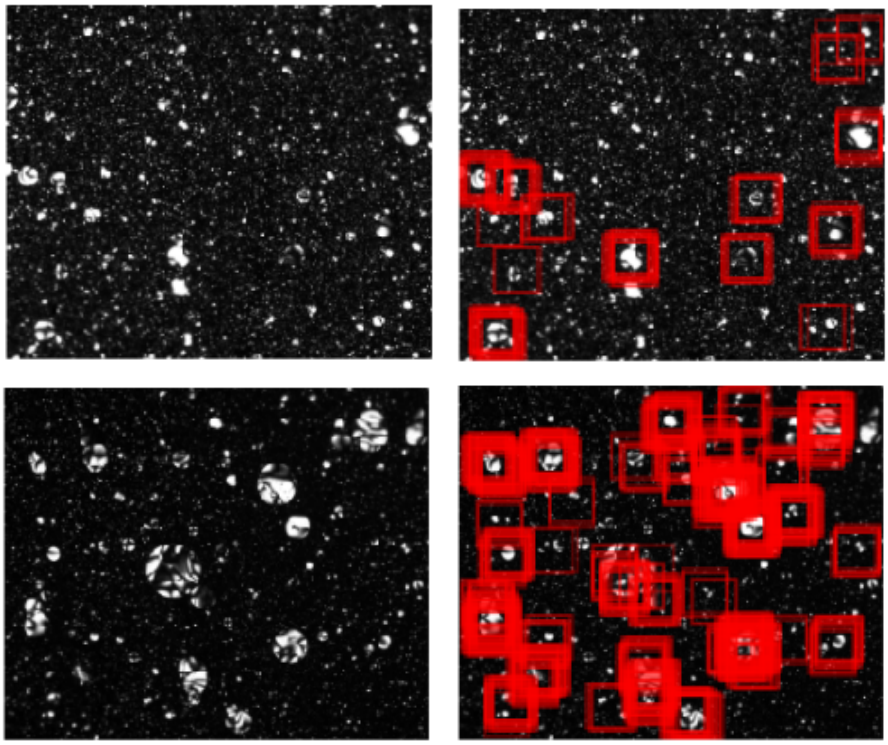


Рис. 3. Применение SVM-классификатора для распознавания мезофаз

Вывод: вопрос производства игольчатого кокса, также как и контроль роста мезофазы стоит остро. Специалистам приходится замерять мезофазы вручную, что занимает колоссальный объем времени. Следующими этапами научной работы будет написание программы для расчета размера мезофазы, а также их оценки. Благодаря этому специалисту будет достаточно загрузить изображение и получить необходимый результат.

Литература

1. Плас Дж. Python для сложных задач: наука о данных и машинное обучение. СПб.: Питер, 2018. С. 562-568.
2. Dalal N., Triggs B. Histograms of oriented gradients for human detection. Montbonnot, France, 2005. 4 с.
3. Кисельков Д. М., Москалев И.В., Стрельников В.Н. Углеродные материалы на основе каменноугольного сырья. Пермь: Изд-во ПФИЦ УрО РАН, 2013.
4. Камалов Р. М., Юсупов М. Р., Лапшин И. Г., Запорин В. П. Перспектива производства нефтяного изотропного кокса в качестве наполнителя углеродных конструкционных материалов. Уфа: УГНТУ, 2018.
5. Федотов Д. В. О решении задачи классификации методом опорных векторов. Красноярск, СибГУ им. М.Ф. Решетнева, 2013.

MSC2020 68T05

Using the HOG algorithm and the SVM classifier for the recognition of coke mesophases

A. Sh. Galin, M. R. Enikeev

Ufa State Petroleum Technological University

УДК 519.865.1:519.853

Обратная задача теории рыночного спроса и непараметрический анализ спроса *

Горбунов В. К.[1], Львов А. Г.[2]

Ульяновский государственный университет[1],
ООО АК «ЭйрБриджКарго» [2]

Излагаются основные факты теории и методов решения обратной задачи теории потребительского рыночного спроса, разработанной в последние годы В.К. Горбуновым [1, 2, 3]. В отличие от современной неоклассической теории [4] в теории рыночного спроса исходным объектом является не индивид с нереалистичными свойствами строгой рациональности и независимости, а статистический ансамбль потребителей исследуемого рынка. Математическая модель рынка, формально совпадающая с моделью максимизации (индивидуальной) функции полезности [4, Ch. 3], вводится как научная гипотеза, подлежащая верификации по торговой статистике, представляющей данный рынок. Обратная задача теории рыночного спроса заключается в построении коллективной функции полезности, рационализирующей данную статистику. Такие задачи характеризуются неединственностью и неустойчивостью решений, т. е. относятся к некорректно поставленным задачам. Наиболее эффективным методом решения задачи построения функции полезности по торговой статистике является непараметрический метод анализа спроса Африата-Вэриана, основы которого заложены классической статьёй Сиднея Африата [5] и работами Хэла Вэриана [6, 7, 8]. Это направление развивалось многими авторами, в основном зарубежными, из которых для нашего исследования представляют интерес [9, 10]. В России данное направление использовалось для анализа конкретных рынков в [11, 12, 13] и других работах данных авторов в простейшем варианте предположения однородности предпочтений потребителей, причём с объявлением однородности как обязательного атрибута для рациональности потребительских предпочтений, аналогично позиции Африата [14]. Однако однородность предпочтений является упрощающим предположением, аналогичным линеаризации нелинейных процессов. Соответствующая гипотеза может не отвергаться при верификации модели максимизации полезности при достаточно высоком уровне агрегирования исходной статистики и учёте её приближенности, но в любом случае это свойство является упрощением реальности, на что обращали внимание П. Самуэльсон и С. Свэми в статье [15], центральной для теории экономических (аналитических, Конюса) индексов. Основная вычислительная проблема непараметрического анализа – решение систем линейных неравенств Африата, определяющих значения функции полезности и множителя Лагранжа (задачи максимизации функции полезности) на статистических данных о спросе, называемые "числами Африата". Эти числа определяют кусочно-линейную «функцию полезности Африата», рационализирующую данную статистику. Некорректность задачи построения функции полезности в рамках непараметрического анализа проявляется в множественности решений неравенств Африата, их возможной несовместности и неустойчивости. В работах [16, 17] предложен метод верификации модели максимизации коллективной функции полезности, использующий методы регуляризации конечномерных экстремальных задач [18-21], а также теорию аналитических индексов [15, 22], которые до настоящего времени относятся в зарубежной литературе и международном Руководстве по индексу потребительских цен [23] к индивидам или домохозяй-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Ульяновской области (проект № 18-410-730017), а также РФФИ – проект № 19-010-00972.

ствам в виду отсутствия в неоклассической экономической теории адекватной реальности теории рыночного (совокупного) спроса. Аналитические индексы определяются функцией потребительских расходов, которая, в свою очередь, определяется функцией полезности. В рамках непараметрического анализа используется кусочно-линейная функция Африата. При этом упрощается задача построения аналитических индексов, но теряется возможность использования богатой аналитической теории спроса, развитой для регулярных предпочтений, представляемых однозначными непрерывно дифференцируемыми функциями спроса. Наш метод решения обратной задачи теории рыночного спроса заключается в релаксации неравенств Африата, обеспечивающей локальную хаусдорфову непрерывность множества их решений, и введении различных критериев отбора решений, формализующих желаемые характеристики аналитических индексов спроса: оптимизм, пессимизм, объективность. Также разработан метод построения дифференцируемых функций спроса с использованием чисел Африата, что делает возможным углублённый анализ рыночного спроса с привлечением его аналитической теории. Приводятся результаты построения аналитических индексов для модельного примера из Руководства [23] и реальных данных российской статистики с построением регулярного спроса Джири-Стоуна [24].

Литература

1. Горбунов В. К. Математическая модель потребительского спроса: Теория и прикладной потенциал. М.: Экономика, 2004.

2. Горбунов В. К. Потребительский спрос: Аналитическая теория и приложения. Ульяновск: УлГУ. 2015. URL: http://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_1945611.

3. Горбунов В. К. Математическое моделирование рыночного спроса: Учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: Издательство «Лань». https://lanbook.com/catalog/nauki-ob-obshchestve/matematicheskoe-modelirovanie-rynochnogo-sprosa/

4. Mas-Colell A., Whinston M., Green J. Microeconomic Theory. New York: Oxford Univ. Press. 1995.

5. Afriat S. N. The construction of utility functions from expenditure data. International Economic Review. 1967. vol. 8, No. 1.

6. Varian H. The nonparametric approach to demand analysis. Econometrica. 1982. vol. 50, No. 4.

7. Varian H. Non-parametric tests of consumer behaviour. The Review of Economic Studies. 1983. vol. 50, No. 1.

8. Varian, H. Nonparametric analysis of optimizing behaviour with measurement error. Journal of Econometrics. 1994. vol. 30.

9. Diewert W.E. Afriat and revealed preference theory. Rev. Econ. Studies. 1973. vol. 40.

10. Fleissig A., Whitney G. Testing for the Significance of Violations of Afriat's Inequalities. Journal of Business and Economic Statistics. 2005. vol. 23, No. 3.

11. Поспелова Л. Я., Шананин А. А. Показатели нерациональности потребительского поведения и обобщенный непараметрический метод // Математическое моделирование. 1998. Т. 10. № 4. С. 105-116.

12. Кондраков И. А., Поспелова Л. Я., Шананин А. А. Обобщенный непараметрический метод. Применение к анализу товарных рынков // Труды МФТИ. 2010. Т. 2. № 3. С. 32-45.

13. Шананин А. А. Обратные задачи в проблеме экономических измерений // ЖВММФ. 2018. Т. 58. № 2. С. 181–191.

14. Afriat, Sydney. The Index Number Problem. Construction Theorems. – Oxford: Oxford University Press. 2014. (MR3185418 of V. Gorbunov).

15. Samuelson P. A., Swamy S. Invariant economic index numbers and canonical duality: Survey and synthesis. The American Economic Review. 1974. vol. 64. No 4.

16. Горбунов В. К., Львов А. Г. Обратная задача теории рыночного спроса и аналитические индексы спроса // Журнал СВМО. 2019. Т. 25. № 1. С. 89-110.

17. Горбунов В. К., Козлова Л. А., Львов А. Г. К проблеме построения аналитических индексов рыночного спроса: вариативный подход // Вопросы статистики. 2020. Т. 27, № 3.

18. Горбунов В. К. О регуляризации экстремальных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1991. Т.31. № 2. С. 235-248.

19. Gorbunov V. K. Regularization of degenerated equations and inequalities under explicit data parameterization. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2001. vol. 9, No 6. pp. 575-594.

20. Горбунов В. К. Релаксационно-штрафной метод и вырожденные экстремальные задачи // Доклады АН. 2001. Т. 377. № 5. С. 583-587.

21. Горбунов В. К. Регуляризация нелинейных некорректных задач с параметризованными данными // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения / Ред. Треногин В. А. и Филиппов А. Ф. М.: Физматлит, 2003. С. 418-447.

22. Diewert W. E. The economic theory of index numbers: a survey. Essays in Index Number Theory, Vol. I / W.E. Diewert and A.O. Nakamura (Editors). 1993. Ch.7.

23. Руководство по индексу потребительских цен: теория и практика. Вашингтон. МВФ. 2007.

24. Stone R. Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand. The Economic Journal. 1954. vol. 64, No. 255, pp. 511-527.

MSC2020 91B42, 62P20, 91B82, 49N45

The inverse problem of the market demand theory and nonparametric demand analysis

V. K. Gorbunov[1], A. G. L'vov [2]

Ulyanovsk State University [1], AirBridgeCargo [2]

УДК 544.42

Физико-химические основы моделирования химических реакторов: термодинамика и кинетика

Губайдуллин И. М.[1,2]

Институт нефтехимии и катализа – обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (УФИЦ РАН)[1], Уфимский государственный нефтяной технический университет[2]

В работе, на примере моделирования двух промышленно важных каталитических процессов риформинга и изомеризации бензинов в общедоступной форме излагаются физико-химические основы моделирования химических реакторов – термодинамика и кинетика. Вопросы термодинамического расчёта и определение кинетических параметров является основой моделирования сложных химических процессов на уровне зерна и слоя катализатора, и всего контактного аппарата в целом. Успешное освоение основ термодинамики и кинетики позволит провести многокритериальную оптимизацию и оптимальное управление промышленными процессами нефтепереработки и нефтехимии. Для промышленно значимого процесса каталитического риформинга бензина одной из главных задач является повышение октанового числа бензина и выполнение ограничений на содержание ароматических углеводородов и бензола. Для решения этой задачи предлагается анализ работы реакторного блока, на основе детализированной кинетической модели процесса [1]. В группированную кинетическую модель каталитического риформинга бензина вводится учет изменения объема реакционной смеси в ходе химических превращений. Для процесса каталитического риформинга бензина сформулирован алгоритм и определены термодинамические параметры для группированных индивидуальных углеводородов. Для разработанной математической модели поставлена обратная кинетическая задача восстановления кинетических параметров стадий. Определены функционалы невязки, учитывающие экспериментальные данные концентраций компонентов и изменение температур в ходе всего процесса. Рассчитаны концентрации групповых компонентов реакции каталитического риформинга бензина и полный температурный профиль процесса. Приведены результаты решения двухкритериальной задачи оптимизации по минимальному содержанию ароматических углеводородов при максимальном октановом числе риформата на основе разработанной кинетической модели. Также, объектом исследования является реакторная установка установки каталитической изомеризации пентан-гексановой фракции, состоящая из каскада из трех реакторов. Первым этапом математического описания объекта является построение схемы углеводородных реакций в процессе. Во всех известных моделях процесса каталитической изомеризации пентан-гексановой фракции все газы гидрокрекинга объединены в один компонент продукта, в результате чего невозможно предсказать точный состав углеводородных газов. В данной работе сделана попытка более детального анализа схемы превращения на основе механизма, включающего реакции образования продуктов гидрокрекинга [1].

Построена математическая модель трехкаскадного реакторного блока, адекватно описывающая химические превращения в реакторах, и получены 108 кинетических параметров (54 энергии активации и 54 предэкспоненциальных множителя). Обратная задача химической кинетики относится к задачам непрерывной глобальной оптимизации. Особенностями таких задач часто являются нелинейность, недифференцируемость, мультиэкстремальность (мультимодальность), отсутствие аналитического выражения и высокая вычислительная

сложность оптимизируемых функций, а также высокая размерность пространства поиска. Эти особенности задач химической кинетики объясняют отсутствие универсального алгоритма их решения. В этой статье мы рассматриваем метод поиска гармонии, который является одним из алгоритмов популяции. Все алгоритмы популяции относятся к классу эвристических алгоритмов, то есть алгоритмов, для которых сходимость к глобальному решению не доказана, но экспериментально установлено, что в большинстве случаев они дают достаточно хорошее решение. Для решения прямой задачи был выбран метод интегрирования «Радау»; это неявный метод Рунге-Кутты семейства Radau IIA порядка 5. Ошибка контролируется встроенной формулой третьего порядка точности. Помимо решения обратной задачи, на конференции будут представлены результаты оптимизации реакторного блока с целью получения диметилзамещенных компонентов (2,2-диметилбутан, 2,3-диметилбутан), влияющих на октановое число бензина каталитической изомеризации.

Литература

1. Зайнуллин Р.З., Коледина К.Ф., Губайдуллин И.М. Ахметов А.Ф., Коледин С.Н. Кинетическая модель каталитического риформинга бензина с учетом изменения реакционного объема и термодинамических параметров // Кинетика и катализ. 2020. Т. 61, № 4, С. 550–55.

2. Faskhutdinov A.G., Akhmetov I.V., Musina A.E., Gubaydullin I.M. Improvement of resource efficiency of the catalytic isomerization process by mathematical modeling. CEUR Workshop Proceedings. 2018. pp. 377-383.

MSC2020 00A71, 97M10

Physicochemical basics of modeling chemical reactors: thermodynamics and kinetics

I. M. Gubaidullin

Ufa Branch of the Russian Academy of Sciences,
Ufa State Petroleum Technical University

УДК 517.977.58

Моделирование процесса окислительной регенерации с учётом влияния паров воды

Губайдуллин И. М.[1], Дубинец О. В.[2]

Институт нефтехимии и катализа ИНК УФИЦ РАН[1],
Уфимский государственный нефтяной технический университет[1 2]

Статья посвящена исследованию и моделированию процесса окислительной регенерации закоксованных катализаторов каталитического крекинга. Известно, что при проведении гетерогенно-каталитических процессов активность используемых катализаторов снижается вследствие образования коксовых отложений на их активной поверхности. Поэтому осуществление регенерации становится важным этапом, решающим проблему дезактивации катализаторов [1]. Стадия регенерации характеризуется взаимодействием углерода с кислородом, а также паров воды под воздействием высоких температур. Но следует помнить, что выжиг коксовых отложений не начинается сразу после подачи кислорода. Сначала накапливается промежуточное нестабильное соединение углерода с кислородом. После индукционного периода происходит горение кокса, сопровождающееся образованием окиси и двуокиси углерода [2]. В ходе исследования проводилось варьирование начальных концентраций кислорода и паров воды и учитывалось их влияние на скорость протекания процесса.

В работе рассматривается две кинетические модели, одна из которых состоит из семи стадий и регенерация осуществляется продувкой кислородом. Вторая модель дополнена стадией, учитывающей диссоциативную адсорбцию паров воды с поверхности катализатора. Анализ данных показал, что при исследовании семистадийной химической реакции с ростом концентрации кислорода скорость сгорания углерода возрастает. Выделяющиеся в процессе выжига угарный и углекислый газы соответствуют общепринятым нормам и не наносят удар по экологии. При рассмотрении процесса с добавлением паров воды скорость горения углерода осуществляется быстрее, чем при вступлении в реакцию только кислорода. Это объясняется распадом молекул водорода и кислорода.

Литература

1. Масагутов Р. М., Морозов Б. Ф., Кутепов Б. И. Регенерация катализаторов в нефтепереработке и нефтехимии. М.: Химия, 1987. 144 с.
2. Прокопюк, С.Г., Масагутов Р. М. Промышленные установки каталитического крекинга. М.: Химия, 1974. 173 с.

MSC2020 80A30

Modeling the oxidative regeneration process taking into account the effect of water vapor

I. M. Gubaydullin [1], O. V. Dubinec [2]

Institute of Petrochemistry and Catalysis of Russian Academy of Sciences [1], Ufa State Petroleum Technological University [1], [2]

УДК 004.93

Восстановление цветных изображений с помощью низкоранговой матрицы аппроксимации

Донскова М. А., Башаров И. В.

Московский физико-технический институт

Цель проекта — реализация эффективного алгоритма [1] восстановления цветных изображений. Простые методы низкоранговой аппроксимации матрицы с пропущенными или зашумленными значениями подходят только для одноканальных картинок, т.е. в градациях серого. Если изображение цветное, то есть имеет 3 канала, то оно приводится каким-нибудь эвристическим методом к одноканальному. Например, взвешенной суммой каналов.

Такой подход неоптимален, поскольку из взаимодействия цветов можно извлечь дополнительную информацию. Однако непосредственная работа с трёхмерными тензорами — это очень трудоёмкие вычисления, поскольку задача низкорангового приближения трёхмерного тензора является NP-полной. В традиционных методах на основе матриц используются два подхода: разложение низкого ранга и минимизация ядерной нормы. В нашем проекте, объединяем два подхода в нашей модели на основе кватернионных матриц. Вместо ядерной нормы матрицы кватернионов будет использована сумма норм Фробениуса двух матриц кватернионов малого ранга. Основываясь на связи между матрицей кватернионов и ее эквивалентной комплексной матрицей, задача в конечном итоге преобразуется из поля чисел кватернионов в поле комплексных чисел [1]. Чередующийся метод минимизации применяется для решения модели.

Результаты моделирования восстановления реальных цветных изображений показывают превосходную производительность и эффективность предложенного алгоритма по сравнению с некоторыми современными тензорными алгоритмами (см. рис. 1, 2).

Чтобы работать с двумерными тензорами, необходимо представлять изображение в виде матрицы кватернионов. Непосредственные вычисления с ними также сложны, но можно ввести взаимно обратное отображение матриц кватернионов в множество матриц комплексных чисел большего размера. Схема восстановления изображений следующая:

1. Трёхканальная картинка с пропущенными/зашумленными пикселями
2. Матрица кватернионов
3. Матрица комплексных чисел
4. Низкоранговая аппроксимация
5. Восстановленная матрица кватернионов
6. Восстановленная картинка.

Результатом работы является реализация алгоритма восстановления цветных изображений с помощью матрицы кватернионов низ- кого ранга и сравнительный анализ с некоторыми известными алгоритмами. В работе используется математические теоремы и выкладки, а также поставлена модель оптимизации для заполнения матрицы, которые были представлены в статьях и докладах [1]- [3].

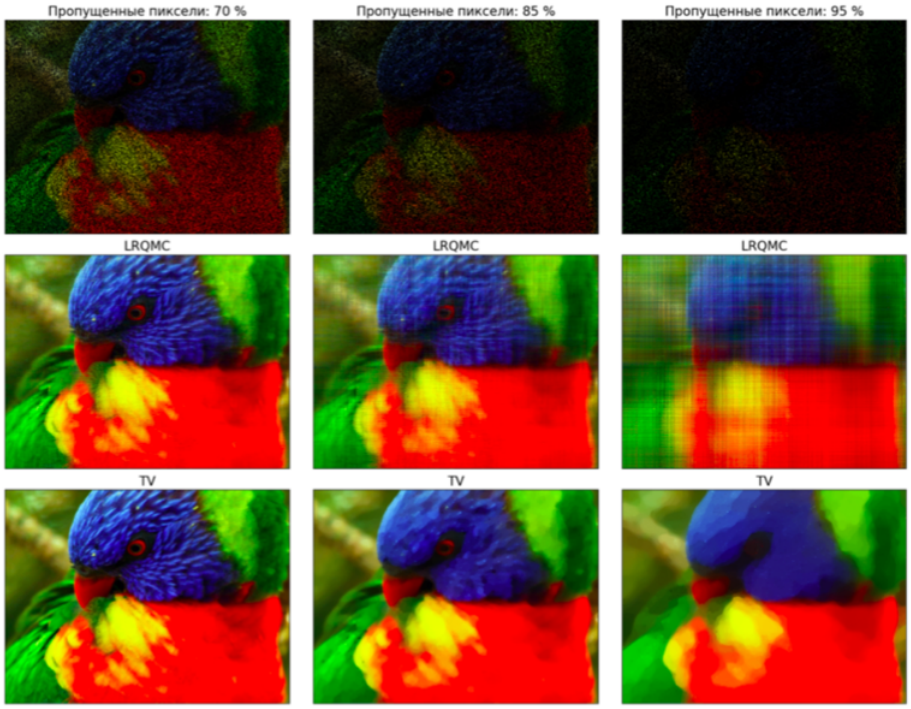


Рис. 1. Сравнение работы двух алгоритмов LRQMC, предложенного в [1] и стандартного TV(Total Variation).

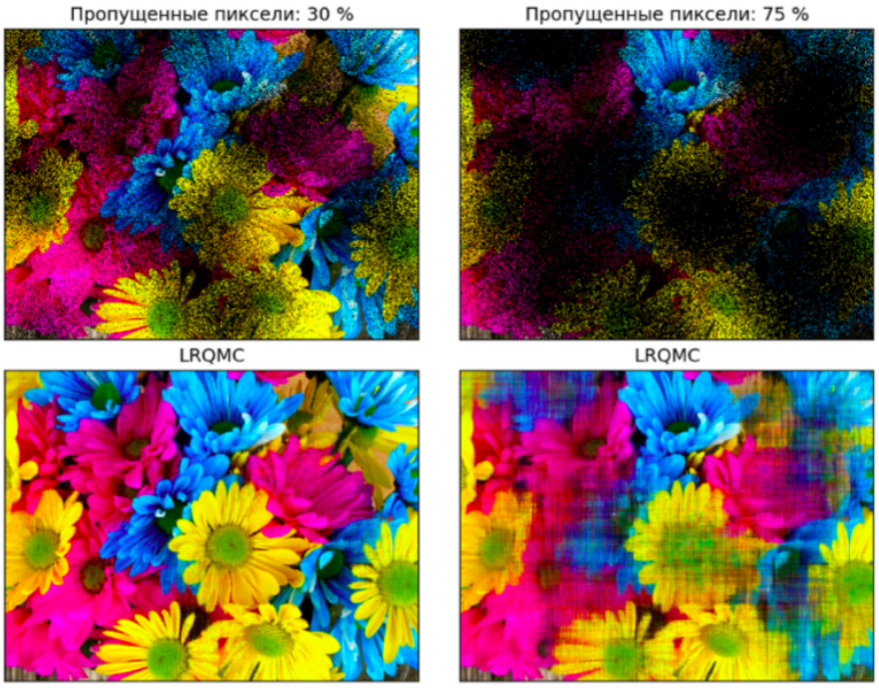


Рис. 2. Сравнение работы двух алгоритмов LRQMC, предложенного в [1] и стандартного TV(Total Variation).

Математические выкладки статьи [2] объемны, поэтому приведем основную теорему для алгоритма восстановления изображений.

Теорема 1. *Пусть имеются 3 матрицы кватернионов (H) размера*

$$X \in H^{M\times N}, P \in H^{M\times N}, Q \in H^{N\times M}.$$

Тогда выполняются следующие свойства

1) если $rank(X) = K$, *то существуют две матрицы* $P \in H^{M\times K}, Q \in H^{K\times M}$ *кватернионов, для которых верно* $X = UV$ *и они удовлетворяют*

$$rank(U) = rank(V) = K;$$

2) $rank(PQ) \leq min(rank(P), rank(Q))$;

3) Пусть X *выходная заполненная матрица,* T *- входная матрица с пропусками (битыми пикселями) с рангом* $K_0 \leq K$. *Тогда задача оптимизации [1] может быть представлена следующим образом:*

$$minimaze\|f(X)\|_*$$

при условии

$$P_\Omega(X - T) = 0,$$

где $P_\Omega(X - T)$ *- означает копирование элементов* T *в* X, *если* X *небитый пиксель,* $f(X)$ *- оператор перевода матриц кватернионов размера* $M\times N$ *в комплексную матрицу* $2M\times 2N$, *определенный в [4].*

Литература

1. Miao J., Kou K. I. Color image recovery using low-rank quaternion matrix completion algorithm: Conference: 2013 6th International Congress on Image and Signal Processing.

2. Golub G., Van Loan C.F. Matrix Computations: The John Hopkins University Press Baltimore and London, 1996.

3. Bengua J. A., Phien H. N., Tuan H. D., Do M. N. Efficient tensor completion for color image and video recovery: Low-rank tensor train 26: IEEE Trans. Image Processing, 2017

4. Bihan N. L., Mars J. I. Singular value decomposition of quaternion matrices: a new tool for vector-sensor signal processing. Signal Processing. 2004. vol. 84, No. 7. pp. 1177-1199.

MSC2020 15B33

Reconstruction of color images using a low-rank approximation matrix

M. A. Donskova, I. V. Basharov

Moscow Institute of Physics and Technology

УДК 517.9

Условия нелокальной разрешимости системы со свободными членами для случая положительных коэффициентов

Донцова М. В.

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \partial_t u\,(t,x) + (a(t)u(t,x) + b(t)v(t,x))\partial_x u\,(t,x) = f_1(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + (c(t)u(t,x) + g(t)v(t,x))\partial_x v(t,x) = f_2(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x),\ v(t,x)$ – неизвестные функции, $f_1,\ f_2,\ a(t),\ b(t),\ c(t),\ g(t)$ – известные функции, $a(t) > 0,\ b(t) > 0,\ c(t) > 0,\ g(t) > 0, \quad t \in [0,T]$.

Для системы уравнений (1) определим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x). \tag{2}$$

Задача (1), (2) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\, x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

С помощью метода дополнительного аргумента и преобразований получена система интегральных уравнений [1], [2]:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int_0^t (a(\nu)w_1 + b(\nu)w_3)d\nu) + \int_0^s f_1(\nu, x - \int_\nu^t (a(\tau)w_1 + b(\tau)w_3)d\tau)d\nu, \tag{3}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int_0^t (c(\nu)w_4 + g(\nu)w_2)d\nu) + \int_0^s f_2(\nu, x - \int_\nu^t (c(\tau)w_4 + g(\tau)w_2)d\tau)d\nu, \tag{4}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int_s^t (a(\nu)w_1 + b(\nu)w_3)d\nu), \tag{5}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int_s^t (c(\nu)w_4 + g(\nu)w_2)d\nu). \tag{6}$$

Обозначим $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ - пространство функций один раз дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых по переменной x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T,

$\bar{C}^{\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n}(\Omega_*)$ – пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка α_m по m-му аргументу, $m = \overline{1,n}$, на неограниченном подмножестве $\Omega_* \subset R^n, n = 1, 2....$,

$C^2([0,T])$ – пространство функций, определенных, непрерывных вместе со своими производными первого и второго порядка на отрезке $[0,T]$.

Общим итогом исследования является следующая теорема [1]:

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R),\ f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T),\ a, b, c, g \in C^2([0,T])$ *и выполняются условия*

$$a(t) > 0,\ b(t) > 0,\ c(t) > 0,\ g(t) > 0, \qquad t \in [0,T],$$

$$\varphi_1'(x) \geq 0,\ \varphi_2'(x) \geq 0 \text{ на } R,\ \ \partial_x f_1 \geq 0,\ \partial_x f_2 \geq 0 \text{ на } \Omega_T.$$

Тогда для любого $T > 0$ *задача Коши (1), (2) имеет единственное решение*

$$u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T),$$

которое определяется из системы интегральных уравнений (3)–(6).

В теореме 1 сформулированы условия нелокальной разрешимости задачи Коши (1), (2), где $u(t,x) = w_1(t,t,x),\ v(t,x) = w_2(t,t,x)$.

Литература

1. Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости системы со свободными членами для случая положительных коэффициентов // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 19, № 4. С. 23-32.

2. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады РАН. 2001. Т. 379, № 1. С. 16-21.

MSC2020 35F50, 35F55, 35A01, 35A02, 35A05

The nonlocal solvability for a system with constant terms for the case of positive coefficients

M. V. Dontsova

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

УДК 519.6

Применение разрывного метода Галеркина для реализации RANS-моделей турбулентности на динамических локально-адаптируемых сетках*

Жалнин Р. В., Кулягин А. И.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Решении внешних и внутренних задач аэродинамики неизбежно приводит к необходимости моделирования турбулентных течений [1]. Пренебрежение этими явлениями может привести к искажению характера моделируемого течения и, как следствие, к значительной погрешности результатов. Прямое численное моделирование турбулентных течений требует использования подробных сеток, что препятствует эффективному решению сложных промышленных задач. На сегодняшний день одним из основных подходов к моделированию турбулентных течений остается использование RANS-моделей турбулентности. Суть этого метода заключается в осреднении параметров течения и определении влияния на течение пульсационной турбулентной составляющей с помощью некоторой полуэмпирической модели турбулентности [1]. Имеется достаточно большое количество моделей, замыкающих RANS-уравнения. Среди них можно выделить модель Спаларта-Аллмараса [2], обладающую рядом преимуществ таких как простота использования, применимость для широкого диапазона типов течений.

В данном докладе описывается реализация модели Спаларта-Аллмараса в программном комплексе CHARM_3D. Осредненная по Рейнольдсу система уравнений Навье-Стокса дискретизируется разрывным методом Галеркина на трехмерных динамических локально-адаптируемых сетках, уравнение модели турбулентности дискретизируется с использованием одной базисной функции (что эквивалентно методу конечных объемов).

Были выполнены расчеты для задачи об обтекании профиля NACA0012 потоком газа с числом Маха $M = 0.7$ [3] и для задачи об обтекании профиля RAE2822 потоком с числом Маха 0.721 и углом атаки 2.31° [4].

Получено приемлемое совпадение с экспериментом.

Литература

1. Гарбарук А. В., Стрелец М. Х., Шур М. Л. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений. Учебное пособие, Издательство Политехнического Института, Санкт-Петербург, 2012.

2. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. AIAA Paper 1992-0439. doi:10.2514/6.1992-439

3. Harris C. D. Two-Dimensional Aerodynamic Characteristics of the NACA 0012 Airfoil in the Langley 8-Foot Transonic Pressure Tunnel. NASA TM-081927. 1981.

4. Cook P. H., McDonald M. A., Firmin M. C. P. Aerofoil RAE2822 – pressure distribution, and boundary layer and wake measurements. AGARD-AR-138, 1979.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-41-130001

MSC2020 76M10 76F40

Application of the discontinuous Galerkin method to implement RANS-models of turbulence on AMR

R. V. Zhalnin, A. I. Kulyagin
National Research Mordovia State University

УДК 51-73

Устойчивость кинетической модели пиролиза непредельных углеводородов

Журавлева М. А., Язовцева О. С.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Одним из самых необходимых видов сырья в нефтехимической промышленности являются непредельные углеводороды, которые легко подвергаются изомеризации и полимеризации благодаря наличию двойной и тройной связей между атомами углерода. Наиболее простым способом получения непредельных углеводородов является пиролиз. Современное развитие нефтехимической промышленности обуславливает потребность в повышении эффективности синтеза веществ, что неизбежно приводит к критическим условиям протекания реакций. Одним из последствий применения подобных условий является выброс опасных веществ в окружающую среду. В связи с этим остается актуальным вопрос о покомпонентной устойчивости математических моделей подобных процессов [1].

Реакция пиролиза непредельных углеводородов имеет вид [2]:

$$RCH_2 - CH_2R' + \dot{R} \to RCH_2 - \dot{C}HR' + RH,$$
$$RCH_2 - \dot{C}HR' \to RCH = CHR' + \dot{H}.$$

Кинетическая модель реакции описывается линейной автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{c_1} = -k_1c_1c_2 \\ \dot{c_2} = -k_1c_1c_2 \\ \dot{c_3} = k_1c_1c_2 - k_2c_3 \\ \dot{c_4} = k_2c_3 \\ \dot{c_5} = k_2c_3 \end{cases}, \tag{1}$$

где $c_1(t)$ – концентрация исходного предельного углеводорода, $c_2(t)$ – концентрация свободных радикалов R, $c_3(t)$ – концентрация гидрогенезированных радикалов RH, $c_4(t)$ – концентрация целевого непредельного углеводорода, $c_5(t)$ – концентрация отщепленных в процессе дегидратации атомов водорода, k_1, k_2 – константы скоростей соответствующих химических реакций; при этом $c_i \geq 0$, $i = \overline{1,5}$, $k_j > 0$, $j = \overline{1,2}$.

Исследуем модель (1) при следующих значениях параметров:

$$k_1 = 2, k_2 = 0.8,$$

$$c_1(0) = 0.2, a = 0.6.$$

Преобразованиями, приведенными в [3], приведем исследуемую модель к виду:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -1.2x_1 - 2x_1^2 \\ \dot{x_2} = 1.2x_1 - 0.8x_2 + 2x_1^2 \\ \dot{x_3} = 0.8x_2 \end{cases}, \tag{2}$$

с начальными данными $x_1(0) = 0.2$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$.

Для исследования подобных систем было разработано программное обеспечение, реализующее алгоритм нахождения фундаментальной матрицы системы линейных дифференциальных уравнений. Данный алгоритм основан на поиске собственных значений, собственных и присоединенных векторов матрицы, для нахождения которых используется метод Крылова. Этот численный метод основан на построении характеристического уравнения и его дальнейшем решении. Данное программное обеспечение было написано на языке C++. Программный код представлен в виде набора функций, из которых можно выделить:

1. Функцию, реализующую метод Гаусса. Данный метод позволяет найти решение системы n линейных алгебраических уравнений.

2. Функцию, реализующую метод Ньютона. Метод Ньютона является итерационным методом решения уравнений вида $f(x) = 0$. Он также применим для поиска комплексных корней уравнений.

3. Функцию, реализующую метод Барейса. Данный метод позволяет привести матрицу к ступенчатому (треугольному) виду, с помощью чего находится ее ранг.

Результатом работы программного кода является вывод об исследовании нулевого положения равновесия системы обыкновенных дифференциальных уравнений, сделанный при помощи метода асимптотической эквивалентности для нелинейных систем с возмущениями в виде векторных полиномов [4, 5].

Для системы (2) был получен следующий вывод: нулевое положение равновесия системы асимптотически устойчиво по переменным x_1 и x_2 и имеет асимптотическое равновесие по переменной x_3.

С учетом преобразований можно сделать вывод о поведении решений системы (1). Поскольку c_1, c_2 и c_4 совпадают с точностью до константы, то нулевое положение равновесия системы (1) будет устойчиво по переменным c_2 и c_4.

Графики концентраций веществ, полученные в результате вычислительного эксперимента представлены на рис. 1.

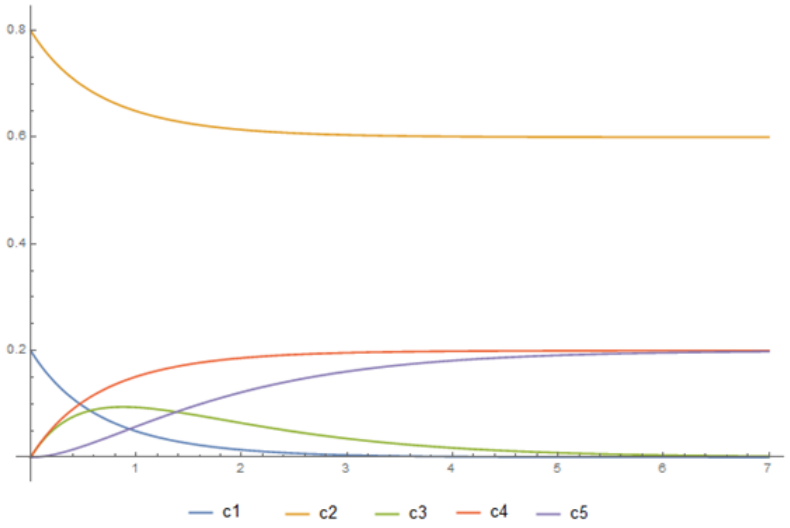


Рис. 1. Графики концентраций веществ: $c_1(t)$ – концентрация исходного предельного углеводорода, $c_2(t)$ – концентрация свободных радикалов R, $c_3(t)$ – концентрация гидрогенезированных радикалов RH, $c_4(t)$ – концентрация целевого непредельного углеводорода, $c_5(t)$ – концентрация отщепленных в процессе дегидратации атомов водорода

Как видно из графиков, результаты вычислительного эксперимента не противоречат

результатам качественного исследования.

Таким образом, углеводород, подвергаемый пиролизу, будет расходоваться полностью, равно как и промежуточный продукт, образующийся при дегидрировании исходного реагента. Гидрогенизированный свободный радикал и основной продукт реакции (непредельный углеводород) с течением времени будут приходить к ненулевому равновесию.

Литература

1. Мухина Т. Н., Барабанов Н. Л., Бабаш С. Е. и др. Пиролиз углеводородного сырья. М.: Химия, 1987. 240 с.

2. Лебедев Н. Н. Химия и технология основного органического и нефтехимического синтеза: учебник для вузов. М.: Химия, 1988. 592 с.

3. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Об устойчивости по части переменных положения равновесия нелинейной системы дифференциальных уравнений // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: тезисы докладов. 2018. С. 219-221.

4. Воскресенский Е. В. Асимптотические методы: теория и приложения. Саранск: СВМО, 2000. 300 с.

5. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложение к устойчивости по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 19, № 1. С. 102-115.

MSC2020 93A30, 80A30

Stability of the unsaturated hydrocarbons pyrolysis kinetic model

M. A. Zhuravleva, O. S. Yazovtseva

National Research Mordovia State University

УДК 665.642

Математическая модель расчета октанового числа бензинов каталитического риформинга с групповой кинетикой

Зайцева Е. С.[1], Губайдуллин И. М.[2]

Уфимский государственный нефтяной технический университет[1],
Институт нефтехимии и катализа Российской академии наук[2]

Каталитический риформинг является важнейшим процессом современной нефтепереработки и нефтехимии и уже более полувека используется для получения высокооктанового бензина и водорода. Стабильный рост мирового потребления высокооктановых автомобильных бензинов ставит перед переработчиками нефтяной продукции важную задачу оптимизирования каталитического риформинга бензина для увеличения ресурсов риформата с высоким октановым числом [1]. Важнейшей характеристикой топлив для двигателей с искровым зажиганием является октановое число, поскольку именно этот показатель характеризует устойчивость смеси горючего с воздухом к детонации (взрывному сгоранию в цилиндре) и, как следствие, способность топлива обеспечивать работу двигателя при высоких степенях сжатия [2]. О значимости октанового числа говорит тот факт, что октановое число выносится в название марки бензина, и именно оно в большинстве случаев определяет цену последнего. Наиболее оптимальным и инновационным способом повышения эффективности процесса каталитического риформинга является создание математических и компьютерных моделей процесса каталитического риформига. Сложность при расчете октанового числа бензинов осложняется тем, что современные автомобильные бензины представляют смеси компонентов, получаемых различными технологическими процессами. В бензинах в зависимости от углеводородного состава сырья и технологии синтеза может содержаться свыше 300 индивидуальных углеводородов различного строения, содержание которых, а также взаимодействие между собой определяют свойства бензина [3].

Целью работы является разработка математической модели расчета октанового числа бензинов каталитического риформинга с групповой кинетикой, которая будет способна описывать динамику изменения ОЧ по мере проведения процесса. Разработка математического описания расчета октанового числа бензинов для моделей каталитического риформинга с групповой кинетикой, которая будет способна описывать динамику изменения октанового числа по мере протекания процесса, позволит использовать данную математическую модель для оптимизации процесса и сократить высокие затраты на определение октанового числа бензина стандартным методом на нефтеперерабатывающем заводе.

Задачами исследовательской работы являются:

1) создание базы данных индивидуальных углеводородов, входящих в состав бензинов, на основе исходных хроматограмм;

2) определение критериев группировки индивидуальных углеводородов;

3) написание компьютерной программы для расчета октанового числа бензинов по заданным группировкам;

4) разработка математического уравнения, адекватно описывающего октановое число бензина на протяжении всего процесса от исходного сырья до конечных продуктов при различных способах группировки индивидуальных углеводородов.

Разработанная математическая модель позволит рассчитывать октановое число бензи-

нов каталитического риформинга применительно к моделям процесса, которые обладают только данными составов групповых компонентов. На основе данной работы можно будет сделать какая группировка индивидуальных углеводородов, входящих в состав бензина наиболее подходящая для построения моделей каталитического риформинга.

Литература

1. Имашев У. Б., Тюрин А. А, Удалова Е.А. Особенности развития процесса каталитического риформинга в России // Башкирский химический журнал. 2009. Т. 16, № 4. С. 184-186.

2. Овчаров С. Н., Пикалов И. С. и др. Расчетные методы оценки детонационной стойкости прямогонных бензиновых фракций // Технологии нефти и газа. 2007. № 5. С. 75-80.

3. Смышляева Ю. А., Иванчина Э. Д., Кравцов А. В., Зыонг Ч. Т., Фан Ф. Разработка базы данных по октановым числам для математической модели процесса компаундирования товарных бензинов // Известия Томского политехнического университета. 2011. № 3. С.75-80.

MSC2020 80A30

Mathematical model for calculating the octane number of catalytic reforming gasolines with group kinetics

E. S. Zaytseva[1], I. M. Gubaydullin[2]

Ufa State Petroleum Technological University [1],
Institute of Petrochemistry and Catalysis of Russian Academy of Sciences[2]

УДК 004.852

Восстановление каротажных кривых методами машинного обучения

Зарипова Э. А., Еникеев М. Р.

Уфимский государственный нефтяной технический университет

В докладе рассматриваются алгоритмы машинного обучения для восстановления кривых акустического и плотностного каротажа, на основе другой имеющейся скважинной информации. Выбор именно этих каротажей обосновывается тем, что на их основе можно предсказать литологию.

В статистике хорошо известно интуитивное соображение, согласно которому усреднение результатов наблюдений может дать более устойчивую и надежную оценку, поскольку ослабляется влияние случайных отклонений в отдельном измерении. На аналогичной идее было основано развитие алгоритмов комбинирования моделей, в результате чего построение их ансамблей оказалось одним из самых мощных методов машинного обучения, нередко превосходящим по качеству предсказаний другие методы.

Методом улучшения предсказаний является бустинг (boosting), идея которого заключается в итеративном процессе последовательного построения частных моделей. Каждая новая модель обучается с использованием информации об ошибках, сделанных на предыдущем этапе, а результирующая функция представляет собой линейную комбинацию всего ансамбля моделей с учетом минимизации любой штрафной функции.

В ходе работы сравнивается работа четырех методов обучения, основанных на градиентном бустинге.

Суть метода нейронных сетей заключается в том, что в опорной скважине обучаются нейроны, а именно определяются зависимости между исходными данными и выходной диаграммой. Затем устанавливается возможность использования этих зависимостей для расчета синтетических кривых в ответ на входные данные, схожие, но неидентичные тем, что были использованы при обучении.

Процедура восстановления каротажных кривых заключается:

- Загрузка и подготовка данных,
- Вычисление корреляционной матрицы,
- Нормализация кривых,
- Создание тренировочной и тестовой выборок для валидации получаемого решения,
- Обучение GradientBoostingRegressor(), GridSearchCV(),
- Обучение LGBMRegressor(), GridSearchCV(),
- Обучение XGBoostRegressor(), GridSearchCV(),
- Обучение CatBoostRegressor(), GridSearchCV(),
- Расчет метрик и оценка результата,
- Анализ полученных результатов.

Загрузка и подготовка данных.

На вход подаются данные 286 скважин, чему соответствует 421469 точек (рис. 1). Осуществляется обработка данных:

- Проверка/заполнение пропусков,
- Удаление аномальных данных.

В ходе работы были удалены данные четырех скважин, поскольку они имели разные области определения, что сильно ухудшает результат. Методом подбора пар признаков основой базового решения выбраны каротажи GR, NEU, RT и $RES - DEP$, а целевыми каротажами - DT и DEN - акустическая скорость и плотность, потому что они дали самый лучший результат.

	BS	CALI	DEN	DEPT	DT	GR	NEU	PE	RES_DEP	RES_MED	RES_MIC	RES_SLW	RT	SP	Stratigraphy	Wellname
0	NaN	230.473404	2.618527	2571.60	283.249512	121.194298	0.235311	NaN	4.007868	3.347113	NaN	2.462722	4.136996	40.374001	7.0	0_2
1	NaN	230.293793	2.621109	2571.65	283.019104	123.683601	0.233350	NaN	3.980783	3.329070	NaN	2.467258	4.104412	40.353569	7.0	0_2
2	NaN	230.113403	2.623705	2571.70	282.787506	126.185204	0.231378	NaN	3.953749	3.311036	NaN	2.471825	4.071928	40.333031	7.0	0_2
3	NaN	229.932907	2.626300	2571.75	282.555908	128.686798	0.229407	NaN	3.926900	3.293100	NaN	2.476400	4.039700	40.312500	7.0	0_2
4	NaN	230.266403	2.632016	2571.80	280.377106	126.202202	0.232660	NaN	3.911065	3.286945	NaN	2.491029	4.030546	40.148239	7.0	0_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
421464	220.699997	220.235992	2.584000	2730.90	245.781006	111.054001	0.271000	NaN	3.244000	3.166000	NaN	3.459000	3.090000	NaN	13.0	2_555
421465	220.699997	221.149002	2.582000	2730.95	246.509995	107.334999	0.267000	NaN	3.231000	3.182000	NaN	3.452000	3.093000	NaN	13.0	2_555
421466	220.699997	221.826004	2.613000	2731.00	247.238007	104.625999	0.269000	NaN	3.218000	3.197000	NaN	3.440000	3.094000	NaN	13.0	2_555
421467	220.699997	222.169006	2.640000	2731.05	247.968994	103.586998	0.283000	NaN	3.204000	3.211000	NaN	3.428000	3.098000	NaN	13.0	2_555
421468	220.699997	222.279007	2.639000	2731.10	248.695999	105.808998	0.297000	NaN	3.188000	3.219000	NaN	3.411000	3.094000	NaN	13.0	2_555

421469 rows × 16 columns

Рис. 1. Входные данные по каротажным кривым для тестового месторождения

Вычисление корреляционной матрицы. Корреляционная матрица - таблица, в которой определяется взаимосвязь признаков датафрейма. Такая матрица используется для того, чтобы определить какие признаки линейно зависят между собой.

На рисунке 2 представлена корреляционная матрица параметров каротажных кривых для тестового месторождения.

	BS	CALI	DEN	DEPT	DT	GR	NEU	PE	RES_DEP	RES_MED	RES_MIC	RES_SLW	RT	SP	Stratigraphy	GR/NEU
BS	1	0.026	0.0081	0.0095	-0.032	0.0021	-0.026	-0.0021	0.0056	-0.015	0.0098	-0.019	0.0074	-0.11	-0.014	0.021
CALI	0.026	1	0.1	0.024	0.012	0.13	0.022	0.21	-0.01	-0.0038	-0.029	-0.0011	-0.015	0.04	0.053	0.012
DEN	0.0081	0.1	1	-0.00058	-0.16	0.52	-0.046	0.86	0.03	0.058	0.087	0.067	0.0083	0.054	0.3	0.091
DEPT	0.0095	0.024	-0.00058	1	-0.077	0.018	0.019	-0.0079	0.011	0.0059	-0.0019	0.004	0.018	-0.045	0.099	0.00024
DT	-0.032	0.012	-0.16	-0.077	1	0.4	0.66	-0.044	-0.3	-0.28	-0.31	-0.27	-0.3	0.049	-0.026	-0.076
GR	0.0021	0.13	0.52	0.018	0.4	1	0.53	0.65	-0.19	-0.16	-0.18	-0.15	-0.21	0.067	0.14	0.039
NEU	-0.026	0.022	-0.046	0.019	0.66	0.53	1	0.078	-0.34	-0.32	-0.36	-0.31	-0.33	0.034	0.027	-0.11
PE	-0.0021	0.21	0.86	-0.0079	-0.044	0.65	0.078	1	0.056	0.082	0.11	0.086	0.034	0.055	0.29	0.45
RES_DEP	0.0056	-0.01	0.03	0.011	-0.3	-0.19	-0.34	0.056	1	0.66	0.48	0.5	0.86	-0.002	0.01	0.081
RES_MED	-0.015	-0.0038	0.058	0.0059	-0.28	-0.16	-0.32	0.082	0.66	1	0.44	0.79	0.59	-0.0018	0.0036	0.081
RES_MIC	0.0098	-0.029	0.087	-0.0019	-0.31	-0.18	-0.36	0.11	0.48	0.44	1	0.46	0.48	-0.0074	-0.018	0.48
RES_SLW	-0.019	-0.0011	0.067	0.004	-0.27	-0.15	-0.31	0.086	0.5	0.79	0.46	1	0.48	0.0062	-0.00037	0.095
RT	0.0074	-0.015	0.0083	0.018	-0.3	-0.21	-0.33	0.034	0.86	0.59	0.48	0.48	1	-0.0024	0.013	0.069
SP	-0.11	0.04	0.054	-0.045	0.049	0.067	0.034	0.055	-0.002	-0.0018	-0.0074	0.0062	-0.0024	1	0.058	0.038
Stratigraphy	-0.014	0.053	0.3	0.099	-0.026	0.14	0.027	0.29	0.01	0.0036	-0.018	-0.00037	0.013	0.058	1	0.013
GR/NEU	0.021	0.012	0.091	0.00024	-0.076	0.039	-0.11	0.45	0.081	0.081	0.48	0.095	0.069	0.038	0.013	1

Рис. 2. Корреляционная матрица между каротажными кривыми. Красный цвет - корреляция между параметрами отсутствует, синий цвет - наблюдается линейная зависимость между параметрами

Нормализация кривых.

Нормализация каротажных кривых на основании распределений по опорной скважине позволяет привести кривые ГИС к одному масштабу измерения. Преобразование одной

кривой в единицы измерения другой производится с помощью регрессионного уравнения. Уравнение регрессии связи показаний рассматриваемых методов строится по опорным пластам. Эти пласты связаны общим свойством, влияние второго свойства отсутствует. Нормализация производится по опорным пластам, и в этом случае будет отмечаться расхождение кривых в интервалах разреза, обладающих вторым свойством.

Процесс нормализации осуществляется в два этапа: находится уравнение нормализации, затем проводится сама нормализация. В большинстве случаев уравнение нормализации между двумя кривыми представлено в виде прямой $y = a + bx$, где y – базовая кривая, масштаб которой не меняется; x – трансформируемая кривая; и b – коэффициенты, означающие сдвиг нулевых линий между кривыми и изменение масштаба нормализуемой кривой.

Используется два вида трансформации – логарифмический $\lg(x)$ и гиперболический $\frac{1}{\sqrt{x}}$, позволяющие привести уравнение нормализации к приближенному уравнению прямой линии. Коэффициенты и b определяются по опорным пластам.

В ходе работы применяется стандартная нормировка StandardScaler() с логарифмической трансформацией и линейное нормирование.

Создание тренировочной и тестовой выборок для валидации получаемого решения.

Тренировочный набор - поднабор для того, чтобы тренировать модель.

Тестовый набор - поднабор для тестирования модели.

Тестовый набор должен быть достаточно большим, чтобы результат был статистически достоверным.

Разбиваем данные скважин на тренировочную и тестовую части в пропорции 0,8 и 0,2 соответственно.

Обучение.

GradientBoostingRegressor - ГБ строит аддитивную модель в прямом поэтапном способе, что позволяет оптимизировать произвольные дифференцируемые функции потерь. На каждом этапе дерево регрессии помещается на отрицательный градиент учитывая функцию потери.

LGBMRegressor – это платформа для повышения градиента, использующая алгоритмы обучения на основе дерева. Он предназначен для распространения и эффективности со следующими преимуществами: более быстрая скорость обучения и высокая эффективность, более низкое использование памяти, лучшая точность, поддержка параллельного и GPU обучения, способен обрабатывать крупномасштабные данные

XGBoost - это оптимизированная распределенная библиотека повышения градиента, разработанная для обеспечения высокой эффективности , гибкости и переносимости . Он реализует алгоритмы машинного обучения в рамках GradientBoosting . XGBoost обеспечивает параллельное усиление дерева (также известное как GBDT, GBM), которое быстро и точно решает многие проблемы с данными.

CatBoost - создает решающую модель прогнозирования в виде ансамбля слабых моделей прогнозирования, обычно деревьев решений. Он строит модель поэтапно, позволяя оптимизировать произвольную дифференцируемую функцию потерь.

Обьект *GridSearchCV()* занимается подбором оптимальных параметров для модели из заданного списка.

Расчет метрик и оценка результата.

Алгоритм расчета финальной метрики: для каждой скважины рассчитывается результирующий коэффициент детерминации (для каждого каротажа в отдельности - акустического и плотностного), далее в результате осреднения получаются средние значения R^2 по всем скважинам для каждого каротажа (2 числа), которые в дальнейшем также усредняются.

Анализ полученных результатов. Самую высокую точность предсказания дал ме-

	GradientBoosting		*LGBM*		*CatBoost*		*XGBoost*	
	training	testing	training	testing	training	testing	training	testing
R^2	0.43	0.65	0.57	0.76	0.39	0.74	0.47	0.42
Best_params	learning_rate: 0.1, n_estimators: 60		learning_rate: 0.1, n_estimators: 60, num_leave: 50		depth: 4, eval_metric: RMSE, leaf_estimation_iterations: 4, learning_rate: 0.05		colsample_bytree: 0.8, learning_rate: 0.31, max_depth: 1, min_child_weight: 1, n_estimator: 60, subsample: 1	

Рис. 3. Результаты целевой метрики

тод LGBMRegressor() - 0.76 с параметрами скорость обучения - 0.1, количество деревьев - 60, максимальное количество листьев дерева - 50. Таким образом, в дальнейшем для улучшения точности прогнозирования параметры методов будут модифицироваться.

Литература

1. Еникеев М. Р., Фазлытдинов М. Ф., Еникеева Л. В., Губайдуллин И. М. Прогноз обводненности на проектируемых к бурению скважинах методами машинного обучения. Сборник трудов ИТНТ-2019: V междунар. конф. и молодеж. шк. «Информ. технологии и нанотехнологии». Самара: Новая техника. 2019. Т. 4: Науки о данных. 2019. С. 434-444.

2. Косков В. Н., Косков В. В. Геофизические исследования скважин и интерпретация данных ГИС. Учеб. пособие. Пермь: Перм. гос. техн. ун-т. 2007. 122 с.

3. Еникеев М. Р., Губайдуллин И. М., Малеева М. А. Информационно-вычислительная аналитическая система для оценки и прогнозирования коррозионных процессов на поверхности стали и алюминия // Системы и средства информатики. 2017. Т. 27. № 3. С. 155-170

4. Заворотько Ю. М. Геофизические методы исследования скважин. Москва: «Недра»; 1983. 208 с.

MSC2020 68T05

Recovery of logging curves using machine learning methods

E. A. Zaripova, M. R. Enikeev

Ufa State Petroleum Technological University [1]

УДК 517.938.5

Построение энергетической функции Морса-Ботта для регулярных топологических потоков*

Зинина С. Х.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Функцией Ляпунова динамической системы, заданной на замкнутом топологическом многообразие M^n называется непрерывная функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$, которая постоянна на каждой цепной компоненте системы и убывает вдоль её орбит вне цепно рекуррентного множества. В силу результатов Ч. Конли [1], функция Ляпунова существует для любой динамической системы, а сам факт существования носит название "Фундаментальная теорема динамических систем". Критическими значениями функции φ Ч. Конли назвал числа, принадлежащие образу цепно рекуррентного множества. Однако для гладкой функции ее критическим значением принято называть образ критической точки (точки, где градиент функции обращается в ноль), которая, вообще говоря, не обязана принадлежать цепно рекуррентному множеству. В связи с чем, наряду с функцией Ляпунова, в гладкой категории используется понятие *энергетической функции*, то есть гладкой функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством системы.

Первые результаты по построению энергетической функции принадлежат С. Смейлу [2], который в 1961 году доказал существование энергетической функции Морса у градиентно-подобных потоков. К. Мейер [3] в 1968 году обобщил этот результат, построив энергетическую функцию Морса-Ботта для произвольного потока Морса-Смейла. В работе [4] О. В. Починкой и С. Х. Зининой рассматривались топологические потоки с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством на замкнутых поверхностях и было доказано, что они обладают энергетической (непрерывной) функцией Морса.

Введем класс G непрерывных потоков f^t на M^n, обобщающих понятие потоков Морса-Смейла. Такие потоки имеют гиперболическое (в топологическом смысле) цепно рекуррентное множество R_{f^t}, состоящее из конечного числа орбит (*цепных компонент*). Каждая неблуждающая орбита является либо неподвижной точкой, либо периодической орбитой $\mathcal{O}$, для которой корректно определено понятие устойчивого $W^s_{\mathcal{O}}$ и неустойчивого $W^u_{\mathcal{O}}$ многообразий. Можно доказать, что цепные компоненты рассматриваемых потоков не образуют циклов и, следовательно, могут быть полностью упорядочены $O_1 \prec \cdots \prec \mathcal{O}_k$ с сохранением отношения Смейла: $W^s_{\mathcal{O}_i} \cap W^u_{\mathcal{O}_j} \neq \emptyset \Rightarrow i < j$.

Верна следующая теорема, устанавливающая основные динамические свойства потоков из класса G.

Теорема 1. *Пусть $f^t \in G$. Тогда*

1) $M = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^u_{\mathcal{O}_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^s_{\mathcal{O}_i}$;

2) Для любой неподвижной точки $\mathcal{O}_i$ существует число $\lambda_i \in \{0, \ldots, n\}$ (индекс Морса точки $\mathcal{O}_i$) такое, что ее неустойчивое многообразие $W^u_{\mathcal{O}_i}$ является топологическим подмногообразием многообразия M, гомеоморфным $\mathbb{R}^{\lambda_i}$ и устойчивое многообразие $W^s_{\mathcal{O}_i}$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931, работа также поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «Базис» (проект 19-7-1-15-1) и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20-31-90069.

является топологическим подмногообразием многообразия M, гомеоморфным $\mathbb{R}^{n-\lambda_i}$;

3) Для периодической орбиты $\mathcal{O}_i$ существует число $\lambda_i \in \{0, \dots, n-1\}$ (индекс Морса орбиты $\mathcal{O}_i$) и пара чисел $\mu_i, \nu_i \in \{-1, +1\}$ (тип орбиты $\mathcal{O}_i$) такие, что ее неустойчивое многообразие $W^u_{\mathcal{O}_i}$ является топологическим подмногообразием многообразия M, гомеоморфным $\mathbb{R}^{\lambda_i} \times \mathbb{S}^1$ для $\mu_i = +1$ и $\mathbb{R}^{\lambda_i} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ для $\mu_i = -1$; устойчивое многообразие $W^s_{\mathcal{O}_i}$ является топологическим подмногообразием многообразия M, гомеоморфным $\mathbb{R}^{n-\lambda_i} \times \mathbb{S}^1$ для $\nu_i = +1$ и $\mathbb{R}^{n-\lambda_i} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ для $\nu_i = -1$;

4) $(cl(W^u_{\mathcal{O}_i}) \setminus W^u_{\mathcal{O}_i}) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} W^u_{\mathcal{O}_j}$; $(cl(W^s_{\mathcal{O}_i}) \setminus W^s_{\mathcal{O}_i}) \subset \bigcup\limits_{j=i+1}^{k} W^s_{\mathcal{O}_j}$.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 2. *Каждый поток $f^t \in G$ обладает энергетической функцией Морса-Ботта, критические точки которой либо являются невырожденными, либо имеют степень вырождения 1.*

Литература

1. Conley C. Isolated invariant sets and the Morse index. CBMS Regional Conference Series in Math. Vol. 38. Providence, RI: AMS. 1978.

2. Smale S. On gradient dynamical systems. Ann. of Math. 1961. vol. 74. pp. 199-206.

3. Meyer K. R. Energy functions for Morse Smale systems. Amer. J. Math. 1968. vol.90. pp. 1031-1040.

4. Починка О. В., Зинина С. Х. Энергетическая функция Морса для топологических потоков с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством на поверхностях // Математические заметки. 2020. Т. 107, № 2. С. 276-285.

MSC2020 37D05

Construction of the Morse-Bott energy function for regular topological flows

S. Kh. Zinina

National Research Mordovia State University

УДК 004.852

Прогнозирование рекуррентной нейронной сетью технологических ремонтных операций нефтяных скважин

Карамова Э. Р., Еникеев М. Р.

Уфимский государственный нефтяной технический университет

В процессе использования нефтяных скважин существует возможность возникновения тех или иных неполадок, связанных как непосредственно со скважинами, так и с соответствующим подземным оборудованием. Для предупреждения возникновения неисправностей, способных привести к нарушениям и выводу скважины из эксплуатации, следует предпринимать соответствующие меры. Ремонт нефтяных скважин заключается в выполнении мероприятий по предупреждению и устранению неполадок работы скважин.

Каждый вид ремонта включает в себя операции, проводимые с целью поддержания скважины в состоянии полной работоспособности. Последовательность операций регламентирована и имеет неизменяемую структуру согласно плану ГТМ (геолого-технических мероприятий). Вследствие этого, выбрав любую последовательность из N ремонтных операций, можно на ее основе определить следующую $N+1$ ремонтную операцию, как человеком, так и нейронной сетью.

В работе рассматривается задача применения рекурретной нейронной сети вида LSTM (Long short-term memory) для предсказания следующей ремонтной операции на основе последовательности предыдущих операций (рис. 1).

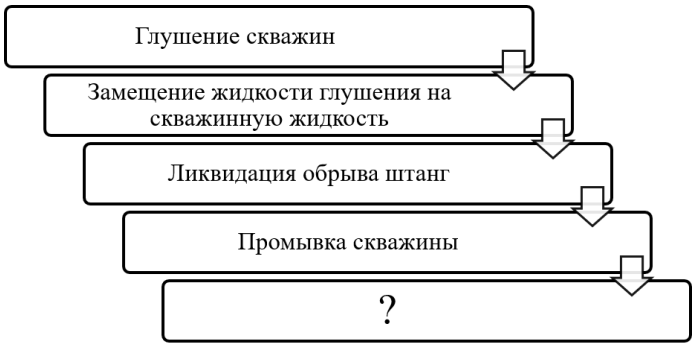


Рис. 1. Предсказание следующей операции на основе последовательности.

Процесс получения значения точности предсказания $N+1$ ремонтной операции состоит из трех этапов: подготовки данных для обучения, создание архитектуры нейронной сети и оценка построенной сети на тестовых данных.

Подготовка данных. В данном исследовании рассматривалась сводка по ремонтным операциям на скважинах, статистика по которым была собрана за годовой период времени.

Данные по ремонтным операциям были отсортированы, перекодированы из текстового в численное представление, т.е. каждая операция имела свой уникальный идентификатор, и разбиты на массивы, содержащие последовательности длиной по 5 элементов. Всего было получено 400 000 последовательностей, содержащих 596 видов ремонтных операций.

Набор данных, состояоий из 400000 элементов был разделен на две части — тренировочная часть составляла 70% от всей выборки, тестовая часть 30%. Необходимость такого подхода вызвана следующим фактом: после того, как модель была обучена на тренировочных экземплярах, необходимо проверить результаты и эффективность её работы на тестовых образцах, которых ещё не было в наборе данных, на которых модель обучалась для оценки точности сети.

Создание нейронной сети. Для достижения поставленной цели была выбрана разновидность рекуррентной нейронная сети с долгой краткосрочной памятью – LSTM (Long short-term memory Neural Network), которая содержит обратные связи и позволяет сохранять информацию. При этом под обратной связью подразумевается связь от логически более удалённого элемента к менее удалённому элементу. Сеть способна обучаться на длинных последовательностях входных данных и запоминать их.

Рисунок 2 иллюстрирует архитектуру построенной сети LSTM для данной задачи: первый embedding-слой нейронной сети создает словарь, отображающий целочисленные индексы в плотные векторы, второй и третий lstm-слои добавляют поддержку переноса информации через многие интервалы времени, заканчивается сеть двумя полносвязными dense-слоем для предсказания.

Layer (type)	Output Shape	Param #
embedding (Embedding)	(None, 4, 32)	19072
lstm (LSTM)	(None, 4, 32)	8320
lstm_1 (LSTM)	(None, 32)	8320
dense (Dense)	(None, 1024)	33792
dense_1 (Dense)	(None, 596)	610900

Total params: 680,404
Trainable params: 680,404

Рис. 2. Структура нейронной сети.

Оценка нейронной сети на тестовых данных. Оценка рекуррентной сети LSTM на тестовых данных осуществлялась на четырех элементах каждой последовательности, принятых за x, выводила прогноз пятого элемента, который сравнивала с пятым действительным элементом последовательности, принятого за y. Если предсказанное значение совпадало с действительным, то значение точности увеличивалось. Схема работы алгоритма приведена на рисунке 3.

$$x_{test} = [x_1, x_2, x_3, x_4]$$
$$y_{test} = [y]$$
$$[x_1, x_2, x_3, x_4] \xrightarrow{predict} x_5 \xrightarrow{compare\ with\ y_{test}} accuracy$$

Рис. 3. Механизм предсказания $N + 1$ элемента последовательности.

В результате работы такого алгоритма была получена точность предсказания операции технологического ремонтного процееса нефтяной скважины с помощью нейронной сети на

основе LSTM равная 50%. Это означает, что созданная нейронная сеть справилась с поставленной задачей, но требует изменения параметров нейронной сети лдля достижения лучших результатов.

Литература

1. Шолле Ф. Глубокое обучение на Python. СПб.: Питер, 2018. С. 155-205.
2. Тарик Р. Создаем нейронную сеть. СПб.: Питер, 2016. С. 129–198.
3. Moolayil J. Learn Keras for Deep Neural Networks. Vancouver, Canada, 2019. С. 162-167.
4. Understanding LSTM Networks [Electronic resource]. URL: http://people.idsia.ch/ juergen/rnn.html
5. Nal Kalchbrenner Grid Long Short-Term Memory [Electronic resource]. URL: https://arxiv.org/pdf/1507.01526v1.pdf

MSC2020 68T05

Predicting of oil well technological repair operations by a neural network

E. R. Karamova, M. R. Enikeev
Ufa State Petroleum Technological University

УДК 004.942

Моделирование движения парашютиста при снижении на стабилизирующем парашюте

Клочкова И. Ю., Винник Г. Н.
РВВДКУ

Процесс прыжка парашютиста можно разбить на следующие основные этапы: первый этап – падение после отделения от самолета; второй этап – снижение на стабилизирующем парашюте; третий этап – наполнение купола основного парашюта; четвертый этап – снижение на раскрытом парашюте. Рассмотрим второй этап прыжка. Составим систему дифференциальных уравнений, описывающую снижение на стабилизирующем парашюте. Снижение на стабилизирующем парашюте длится примерно 3 сек. Наполненный воздухом вытяжной парашют, будучи связанным с вершиной купола основного парашюта, вытягивает его вместе со стропами на всю их длину. Заметим, что в течение первых двух этапов, с момента отделения парашютиста от самолета до полного вытягивания купола и строп основного парашюта на всю их длину, парашют тормозящего действия еще не оказывает. Изменения падения скорости парашютиста происходит только в результате сопротивления воздуха, действующего на самого парашютиста [1].

Движение парашютиста на этапе снижения на стабилизирующем парашюте описывает следующая система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{V}_x = c_1 + b_1 V_x + a_1\sqrt{V_x^2 + V_z^2}, \\ \dot{V}_y = c_2 + b_2 V_y + a_2\sqrt{V_y^2 + V_z^2}, \\ \dot{V}_z = c_3 + b_3 V_z + k_3\sqrt{V_x^2 + V_z^2} + m_3\sqrt{V_y^2 + V_z^2}, \end{cases} \tag{1}$$

где V_x – скорость парашютиста по координате x, V_y – скорость парашютиста по координате y, V_z – скорость парашютиста по координате z; коэффициенты , a_n, k_3, m_3 пропорциональны площади сечения тела S, поперечного по отношению к потоку, и форме тела; b_n определяется свойствами и плотностью среды, c_n зависит от ускорения свободного падения и массы тела. [2, 3]

С помощью программы GPS Loger, установленной на мобильное устройство, получены результаты измерения характеристик второго этапа прыжка парашютиста. На основании полученных данных сформирован массив, отображающий зависимость трех координат от времени.

Используя методы численного дифференцирования пакета прикладных программ Maple, определим скорость изменения пространственных координат для этапа снижения на стабилизирующем парашюте. С помощью метода регрессионного анализа построим линейные зависимости скоростей от пространственных координат. Полученные линейные зависимости определяют систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -2,3 - 0,005x + 0,008z, \\ \dot{y} = -29,7 + 0,0005y + 0,042z, \\ \dot{z} = -1,46 - 0,008x - 0,004y + 0,002z. \end{cases} \tag{2}$$

Для расчета коэффициентов системы (1) предлагается использовать значения скоростей и ускорений, полученные численными методами как решения системы (2). При этом

значения скоростей и ускорений определяемые системой (2) имеют гладкую структуру в отличие от значений скоростей, получаемых при расчете данных измерений трека парашютиста. С учетом систем (1), (2) построим математическую модель движения парашютиста на этапе снижения на стабилизирующем парашюте

$$\begin{cases} \dot{V_x} = -0,016 + 0,002V_x + 0,006\sqrt{V_x^2 + V_z^2}, \\ V_x = \dot{x}, \\ \dot{V_y} = -0,027 - 0,053V_y + 0,023\sqrt{V_y^2 + V_z^2}, \\ V_y = \dot{y}, \\ \dot{V_z} = -0,02 - 0,039V_z + 0,015\sqrt{V_x^2 + V_z^2} + 0,008\sqrt{V_y^2 + V_z^2}, \\ V_z = \dot{z}. \end{cases} \tag{3}$$

Система (3) позволяет получить теоретическую зависимость координат, скоростей и ускорений движения парашютиста от времени. Построим теоретическую и фактическую траектории парашютиста. Теоретическая траектория определяется решением системы дифференциальных уравнений (3) с начальными условиями $x(0) = 14,727; y(0) = 31,184; z(0) = 764,01; \dot{x}(0) = 1; \dot{y}(0) = 2,5; \dot{z}(0) = -1$. Произведено сравнение фактической и теоретической координат окончания первого этапа и начала второго этапа прыжка, получено расхождение в пределах 6 м.

Проанализируем полученные результаты, для этого рассчитаем индекс кореляции по каждой из трех координат теоретической и фактической траекториий прыжка. Получили следующие результаты: $r_{x,x^*} = 0,99; r_{y,y^*} = 0,98; r_{z,z^*} = 0,99$, на основании которых можем сделать вывод о том, что математическая модель (3) может быть использована для описания движения парашютиста на этапе снижения на стабилизирующем парашюте.

Литература

1. Лялин В. В., Морозов В. И., Пономарев А. Т. Парашютные системы М.: Физматлит, 2009, 506 с.

2. Клочкова И. Ю., Мельников Д. Г. Динамическая система, описывающая движение парашютиста // Вестник российской академии естественных наук. 2019. Т. 19, № 2. С. 76-78.

3. Мамонов С. С., Клочкова И. Ю. Моделирование движения парашютиста при раскрытом парашюте // Вестник рязанского радиотехнического университета. 2018. Т. 66. С. 64-70.

MSC2020 70E15

Modeling the movement of a parachutist while descending on a stabilizing parachute

I. U. Klochkova, G. N. Vinnik
RVVDKU

УДК 51.7; 519.246

Стохастичность процессов распространения примесей в воздухе и её учёт *

Клочкова Л. В., Сузан Д. В., Тишкин В. Ф.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

Перед разработчиками мониторинговых интегрированных программных комплексов для экологии всегда стоят мультипликативные проблемы. С одной стороны, эти проблемы связанны с построением рациональной архитектуры системы, дающей возможность использовать достижения современных высоких технологий вычислительной техники и интернет технологий удалённого доступа. С другой стороны, стоят задачи преодоления математических трудностей при построении вычислительных алгоритмов при введении различных исходных данных, приводящих к изменению исходной дифференциальной системы уравнений физической модели процесса вплоть до изменения типа уравнений. Кроме того существует проблема управления огромным количеством данных, распределённых по различным базам. Управляющие оболочки должны выполнять каждый раз репликацию данных при вводе новых исходных данных. В разработанной системе «TIMES» существуют различные модули, которые позволяют создавать виртуальные картины различных ландшафтов местностей (слабохолмистых и с крутыми препятствиями, включая застройки крупных промышленных центров) и модели обтекания препятствий различными потоками. Исследование загрязнения окружающей среды в результате запусков ракет-носителей и при нормальной эксплуатации авиационных и космических комплексов - задача, актуальность которой является очевидной. Распространение примеси в различных слоях атмосферы происходит по различным законам. В гомогенном слое (перемешивания) примесь достаточно однородна по высоте и на высотах от 20 до 80 км практически представляет собой гомогенную смесь. В свободной атмосфере примесь распространяется на большие расстояния, практически не рассеиваясь. Примесь, выброшенная на высотах, выше тропопаузы, практически не дает следов на поверхности земли, а рассеивается глобально. Сначала были проведены расчеты распределения концентраций загрязняющих веществ в тропосфере при взлете самолётов. При расчетах величина выброса принималась равной условной величине – 1 г/с из двигателя. Расчетная концентрация измерялась в мг/м3. Расчеты проведены по модели «TIMES». Модель предназначена для расчета концентраций химически активных загрязнителей в тропосфере посредством моделирования физических и химических процессов, описываемых уравнениями диффузии-адвекции. Эти уравнения выражают массовый баланс, где учтены: эмиссия, перенос, турбулентность, химические реакции и процесс осаждения. Расчеты концентраций примеси показали, что невесомые загрязняющие вещества, выброшенные в тропосфере, перераспределяются по вертикали в зависимости от профиля коэффициента диффузии значительно медленнее, чем переносятся по ветру, т.е. по горизонтали диффузия примеси значительно больше, чем по вертикали. Однако горячие газы, истекающие из сопла двигателя, в виде облака поднимаются в атмосфере за счет сил плавучести и затем, когда температуры облака и окружающего воздуха выравниваются, распространяются в тропосфере за счет адвекции в поле ветра и диффузии в турбулентном слое перемешивания. Эффективная высота подъема выхлопных газов составляет десятки метров. Высота подъема может быть рассчитана с помощью математического моделирования

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №20-01-00578)

в случае устойчивых погодных условий, когда температура тропосферы падает с высотой. В пределах тропосферы поведение спутных следов самолётов и взлетающих ракет практически не отличаются. Построенная математическая транспортно-диффузионная модель распространения примесей на основе системы уравнений параболического типа выражает закон сохранения вещества. Перенос, изменение градиента концентраций, источники и стоки за счет физико-химических процессов в такой модели описываются как

$$\frac{\partial c}{\partial t} + div\, c\vec{w} - div(K\, grad\, c) + rc = Q, \tag{1}$$

где c -концентрация субстанции, K-некоторый когнитивный коэффициент, $\vec{w}$ – поле скоростей адвекции, Q - поле эмиссии, r - коэффициент, характеризующий интенсивность источников и стоков.

Модель процессов распространения загрязнителей для многослойной расчётной области сложной конфигурации может быть выражена системой уравнений, включающей модель ветрового поля в условиях городской застройки и над местностью, имеющей слабохолмистый ландшафт

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial t} + div\, c\vec{w} - div(K\, grad\, c) - \dfrac{\partial}{\partial z} K_z \dfrac{\partial c}{\partial z} + rc = Q, z > h_t(x,y) \\ c = 0, z \leq h_t(x,y), \end{cases} \tag{2}$$

где c -концентрация субстанции, K - коэффициент горизонтальной турбулентности, K_z-коэффициент вертикальной турбулентности,$\vec{w}$ – скорость ветра, Q - поле эмиссии, r - коэффициент, характеризующий интенсивность распада вещества, $h_t(x,y)$ - кусочно-непрерывная функция, которая описывает рельеф области, причем $h_t(x,y) = h_b$ если точка $(x,y,0)$ принадлежит основанию возвышения высотой h_bОднако существует большое число примеров рядов данных, требующих для своего описания подходов, учитывающих нелинейные и нестационарные свойства окружающей среды. В работе основной акцент делается на обоснование применимости методов математического прогнозирования для стохастических процессов. Задача прогнозирования ряда с определенной точностью на заданный горизонт возникает во многих практических приложениях. Такие модели предлагается использовать для прогнозирования загрязненности атмосферы мегаполисов, а также распространения инфекций или вредных примесей в случайно-неоднородной и нестационарной среде. Актуальность кинетических моделей для описания эволюции распределения случайных параметров, характеризующих интенсивность источника вредных примесей, состоит в следующем. Для таких задач общепринятым подходом является использование уравнений химической кинетики, описывающих эволюцию примесей, их состав и концентрацию в химически активном газе в определенных температурных и конвективных условиях внешней среды. Однако одновременно предлагается использовать уравнений такого типа для конкретных процессов с учётом того, что источник загрязнения по интенсивности и составу является случайным и притом нестационарным. В результате кинетические уравнения, применяемые в условиях неопределенности пространственного распределения примесей, приобретают дополнительные стохастические свойства из-за неопределенности функции источника. Возможность описать эту неопределенность кинетическим уравнением того же типа, что и среду, в которой осуществляется перенос изучаемого фактора, позволяет построить унифицированную кинетическую модель процесса в целом.

MSC2020 76R50

Stochasticity of contaminations spread processes in the air and its record

L. V. Klochkova , D. V. Suzan, V. F. Tishkin
Keldysh Institute of Applied Mathematics

УДК 517.938

Спектр и собственные функции явнорешаемой модели цепочки колец с перемычками в магнитном поле*

Костров О. Г., Полякина Н. М.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

В работе рассмотрен бесконечный одномерный периодический граф Г на плоскости, элементарная ячейка которого содержит два кольца, соединённые друг с другом контактами и дуговыми перемычками (смотри рис. 1). В работах [1, 2] ранее рассматривались спектральные свойства бесконечной одномерной цепочки колец, соединённых δ-контактами, без магнитного поля и в присутствии магнитного поля. В работе [3] был рассмотрен квантовый транспорт через граф, состоящий из такой ячейки и двух присоединённых к ней проводников. В ней было показано, что при некоторых значениях потока Φ магнитного поля, перпендикулярного плоскости такого графа и сосредоточенного только в окрестности дуг T, V, коэффициент прохождения системы равен нулю независимо от квазиимпульса k.

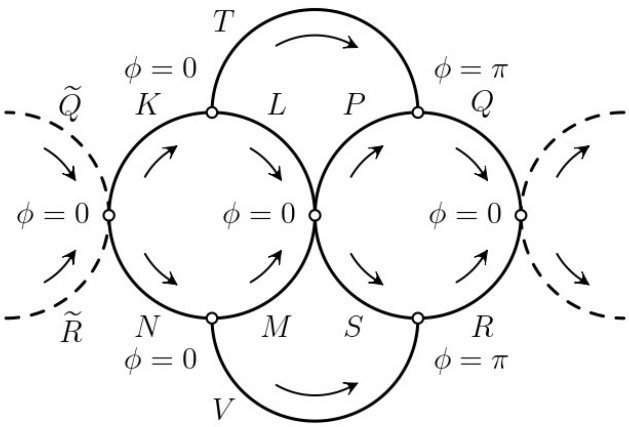


Рис. 1. Элементарная ячейка графа Г.

Гамильтониан, заданный на элементарной ячейке графа Г, равен прямой сумме

$$H = H_K \oplus H_L \oplus_M \oplus H_N \oplus H_P \oplus H_Q \oplus H_R \oplus H_S \oplus H_T \oplus H_V,$$

где K, L, M, N, P, Q, R, S, T и V – дуги одинакового радиуса r, $H_X = -d^2/d\phi^2$ – гамильтониан на любой дуге X, кроме дуг T, V, $H_T = H_V = (-id/d\phi + \Phi)^2$ – гамильтонианы на дугах T, V и значение Φ есть поток перпендикулярного плоскости графа Г магнитного поля, сосредоточенного в окрестности дуг T, V (смотри рис. 1). Для простоты здесь выбрана система единиц, в которой $2m = e = c = \hbar = r = 1$, где m, e – масса и заряд электрона, c – скорость света, $\hbar$ – постоянная Планка.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Мордовия в рамках научного проекта №18-41-130004.

Состояния движущегося электрона, определённые на графе Γ, будут описываться функцией вида $\Psi(\phi) = C^{+}e^{ik\phi} + C^{-}e^{-ik\phi}$, где k – квазиимпульс, угол ϕ изменяется на дугах K, N, P, S от 0 до $\pi/2$, на дугах L, M, Q, R – от $-\pi/2$ до 0 и на дугах T, V – от 0 до π (на рис. 1 стрелками указаны направления увеличения параметра ϕ).

В каждой точке контакта дуг на функцию $\Psi(\phi)$ наложены условия "δ-соединения": 1) предельные значения функций для различных дуг равны между собой; 2) сумма предельных значений производных функций для различных дуг пропорциональна значению функций (если переменная на дуге возрастает при выходе из точки контакта, то перед производной ставится знак "+", и если переменная на дуге убывает при выходе из точки контакта, то перед производной ставится знак "−"). Так, в центральной точке ячейки такие условия имеют вид

$$\Psi_L(0) = \Psi_M(0) = \Psi_P(0) = \Psi_S(0), \quad -\Psi'_L(0) - \Psi'_M(0) + \Psi'_P(0) + \Psi'_S(0) = \alpha\Psi_L(0),$$

где α – коэффициент пропорциональности. Для описания состояний, распространённых вдоль графа Γ, на функцию $\Psi(\phi)$ также дополнительно наложены так называемые условия Флоке

$$\Psi_{\tilde{Q}}(-0) = e^{i\theta}\Psi_Q(-0), \qquad \Psi_{\tilde{R}}(-0) = e^{i\theta}\Psi_R(-0),$$

$$\Psi'_{\tilde{Q}}(-0) = e^{i\theta}\Psi'_Q(-0), \qquad \Psi'_{\tilde{R}}(-0) = e^{i\theta}\Psi'_R(-0),$$

где дуги $\tilde{Q}$ и $\tilde{R}$ – дуги, принадлежащие соседней элементарной ячейке графа Γ и соединённые с дугами K и N (смотри рис. 1). Тогда задача описания собственных функций, распространённых вдоль графа Γ, сводится к задаче на элементарной ячейке графа Γ. В результате получается однородная линейная система из 20 уравнений с 20 неизвестными – коэффициентами функции $\Psi(\phi)$ на каждой из 10 дуг, которая, как известно, имеет ненулевое решение лишь когда определитель системы равен нулю (назовем это равенство *характеристическим уравнением*).

С помощью системы символьных вычислений Mathematica 8.0 при некоторых значениях потока магнитного поля Φ найдено и численно исследовано выражение для характеристического уравнения, определяющее возможные значения фазового множителя $e^{i\theta}$, для которых существуют собственные функции, распространённые вдоль графа Γ.

При $\alpha = \Phi = 0$ характеристическое уравнение имеет вид $\cos\theta = (9\cos 2\pi k - 1)/8$, откуда следует, что $\theta = \arccos((9\cos 2\pi k - 1)/8)$, то есть допустимые значения θ существуют при условии выполнения неравенства $n - \arccos(-7/9)/(2\pi) \leqslant k \leqslant n + \arccos(-7/9)/(2\pi)$, где $n \in \mathbb{Z}$, поэтому характеристическое уравнение определяет зонный спектр оператора H для собственных функций, распространённых вдоль графа Γ. Найденные значения для коэффициентов собственных функций имеют громоздкие выражения, поэтому их не приводим. Заметим, что для них справедливы равенства $C_K^+ = C_N^+$, $C_K^- = C_N^-$, $C_T^+ = C_V^+$, $C_T^- = C_V^-$, $C_L^+ = C_M^+ = C_P^+ = C_S^+$, $C_L^- = C_M^- = C_P^- = C_S^-$, $C_Q^+ = C_R^+$, $C_Q^- = C_R^-$. На рис. 2 изображен график характеристического уравнения $y(k) = \cos\theta$, где $y(k) = (9\cos 2\pi k - 1)/8$, а также интервалы зонного спектра на оси Ok, для которых существуют собственные функции, распространённые вдоль графа Γ.

При $\alpha = 0$ и $\Phi = 2n$, где $n \in \mathbb{Z}$, характеристическое уравнение имеет такой же вид.

При $\alpha \neq 0$ и $\Phi = 0$ характеристическое уравнение имеет вид

$$32k^3\cos\theta\,(\alpha\sin(\pi k/2) + 8k\cos(\pi k/2)) = \cos(5\pi k/2)\left(\alpha^4 + 144k^4 - 73\alpha^2k^2\right) -$$

$$-14\sin(5\pi k/2)\left(\alpha^3k - 12\alpha k^3\right) + 3\cos(3\pi k/2)\left(-\alpha^4 + 48k^4 + \alpha^2k^2\right) +$$

$$+3\sin(3\pi k/2)\left(40\alpha k^3 + 6\alpha^3k\right) + 2\cos(\pi k/2)\left(\alpha^4 - 16k^4 + 35\alpha^2k^2\right) - 16\sin(\pi k/2)\left(\alpha k^3 - \alpha^3\right).$$

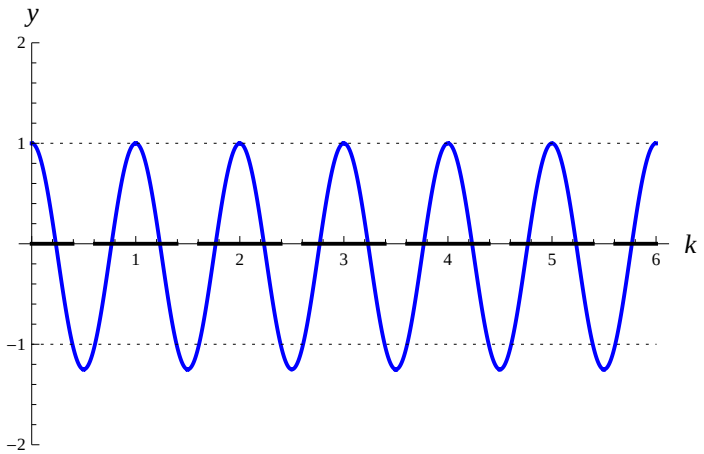


Рис. 2. График функции $y(k) = \cos\theta$ при $\Phi = \alpha = 0$.

На рис. 3 изображен график характеристического уравнения при $\alpha = 1.5$. На графике видно, что зоны спектра на числовой оси k разделились на две подзоны, при этом появились запрещенные значения k — решения уравнения $\alpha \sin(\pi k/2) + 8k\cos(\pi k/2) = 0$.

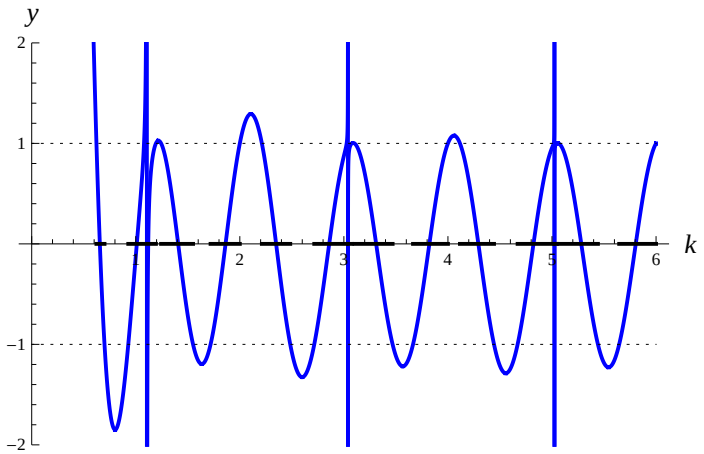


Рис. 3. График функции $y(k) = \cos\theta$ при $\Phi = 0$, $\alpha = 1.5$.

При $\alpha = 0$ и $\Phi = 2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$, характеристическое уравнение имеет вид $3\cos(3\pi k/2) + \cos(\pi k/2) = 0$, то есть оно не зависит от параметра θ. Это означает, что решения этого уравнения $k = 2m-1$, где $m \in \mathbb{N}$ и $k = \pm(2/\pi)\arccos\left(\pm\sqrt{2/3}\right) + 4m$, где $m \in \mathbb{N}$, являются точками дискретного спектра, отвечающего собственным функциям, распространённым вдоль графа Г. В результате работы найдены выражения для этих собственных функций. Например, для $k = 2m-1$ собственная функция имеет вид

$$\Psi_K(\phi) = \Psi_N(\phi) = 2\cos((2m+1)\phi),$$

$$\Psi_P(\phi) = \Psi_S(\phi) = \Psi_L(\phi) = \Psi_M(\phi) = -2e^{-i\theta/2}\cos((2m+1)\phi)\cos(\theta/2),$$

$$\Psi_T(\phi) = \Psi_V(\phi) = 2e^{-i((\theta+\pi)/2+31\phi)}\sin((2m+1)\phi)\sin(\theta/2),$$

$$\Psi_R(\phi) = \Psi_Q(\phi) = 2e^{-i\theta}\cos((2m+1)\phi).$$

Литература

1. Duclos P., Exner P., Turek O. On the spectrum of a bent chain graph. Journal of Physics A Mathematical and Theoretical. 41. 2008. 415206 (18 pp).
2. Exner P., Manko S. Spectral properties of magnetic chain graphs. Annales Henri Poincare. 2017. vol. 18, No. 3. pp. 929-953.
3. Еремин Д. А., Костров О. Г., Якунина А. Д. Математическая модель квантового графа, состоящего из двух колец с двумя перемычками // Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (27–30 мая 2019 г. Самара, Россия) : в 2-х томах. Т. 1 / под ред. В.П. Радченко. Самара : СамГТУ, 2019. С. 271-273.

MSC2020 46N50

Spectrum and eigenfunctions of an explicitly solvable model of a chain of rings with jumpers in a magnetic field

O. G.Kostrov, N. M. Polyakina
National Research Mordovia State University

УДК 517.925.52

О динамике систем, близких к двумерным гамильтоновым, с двойным предельным циклом при квазипериодических возмущениях *

Костромина О. С.

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе рассматриваются системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H(x,y)}{\partial y} + \varepsilon g(x,y,\omega_1 t,...,\omega_k t), \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H(x,y)}{\partial x} + \varepsilon f(x,y,\omega_1 t,...,\omega_k t), \end{cases} \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, функции H, g и f – достаточно гладкие и равномерно ограниченные по x, y вместе с частными производными порядка $\leqslant 2$ в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$ (или $D \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$); функции g и f – непрерывные и квазипериодические по t равномерно относительно $(x, y) \in D$ с несоизмеримыми над полем рациональных чисел частотами $\omega_i, i = \overline{1,k}$.

Мы предполагаем, что соответствующая невозмущенная система ($\varepsilon = 0$) является нелинейной гамильтоновой с гамильтонианом H и имеет ячейку $D_0 \in D$, заполненную замкнутыми фазовыми кривыми $H(x, y) = h$, $h \in [h_{min}, h_{max}]$ и не содержащую малых окрестностей состояний равновесия и сепаратрис. Также мы предполагаем неконсервативность исходной системы (1), что эквивалентно выполнению условия: $g'_x + f'_y \not\equiv 0$.

Переходя от переменных x, y к переменным «действие I – угол θ » в D_0:

$$x = X(I,\theta),\ y = Y(I,\theta),$$

где X, Y – периодические по θ с периодом 2π функции, получим систему вида

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon\left(f(X,Y,\theta_1,...,\theta_k)X'_\theta - g(X,Y,\theta_1,...,\theta_k)Y'_\theta\right), \\ \dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon\left(-f(X,Y,\theta_1,...,\theta_k)X'_I + g(X,Y,\theta_1,...,\theta_k)Y'_I\right), \\ \dot{\theta}_i = \omega_i,\ i = \overline{1,k}. \end{cases} \tag{2}$$

Мы предполагаем, что собственная частота $\omega(I)$ невозмущенной системы является монотонной функцией и не обращается в нуль на интервале $(I_{min}, I_{max}) \equiv (I(h_{min}), I(h_{max}))$. Функции F, G – достаточно гладкие по $I, \theta, \theta_i, i = \overline{1,k}$ в области $[I_{min}, I_{max}] \times \mathbb{T}^{k+1}$, где $\mathbb{T}^{k+1}$ – (k+1)-мерный тор.

Рассматривается резонансный случай, когда:

$$n\omega(I) = \sum_{i=1}^{k} m_i \omega_i,$$

где n, $m_i, i = \overline{1,k}$ – взаимно простые целые числа. Вещественные решения I этого уравнения на отрезке $[I_{min}, I_{max}]$ будем обозначать $I_{n\mathbf{m}}, \mathbf{m} = (m_1, ..., m_k)$. Тогда уровни $I = I_{n\mathbf{m}}$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-01-00306) и РНФ (грант 19-11-00280)

(замкнутые фазовые кривые $H(x,y) = h_{n\mathbf{m}}$ невозмущенной системы) будем называть *резонансными уровнями.* Окрестность $U_{\sqrt{\varepsilon}} = \{(I,\theta) : I_{n\mathbf{m}} - C\sqrt{\varepsilon} < I < I_{n\mathbf{m}} + C\sqrt{\varepsilon},\ 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ C = \text{const} > 0\}$ индивидуального резонансного уровня $I = I_{n\mathbf{m}}$ будем называть резонансной зоной.

Важную роль при исследовании структуры резонансной зоны играет соответствующая возмущенная автономная система:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H(x,y)}{\partial y} + \varepsilon g_0(x,y), \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H(x,y)}{\partial x} + \varepsilon f_0(x,y), \end{cases} \tag{3}$$

где

$$g_0(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_0^{2\pi} ... \int\limits_0^{2\pi} g(x,y,\theta_1,...,\theta_k) d\theta_1 ... d\theta_k,\ f_0(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_0^{2\pi} ... \int\limits_0^{2\pi} f(x,y,\theta_1,...,\theta_k) d\theta_1 ... d\theta_k.$$

В автономной системе (3) может существовать предельный цикл. При включении неавтономности резонансный уровень может совпасть с уровнем невозмущенной системы, порождающим предельный цикл в автономной системе. Воздействие квазипериодических по времени возмущений на системы с грубым предельным циклом было изучено в работах [1,2], а воздействие периодических по времени возмущений на системы с двойным предельным циклом – в работе [3]. В настоящей работе мы изучаем влияние квазипериодических возмущений на системы с двойным предельным циклом. Получена усредненная система, описывающая топологию резонансных зон. Согласно [1], простому устойчивому (неустойчивому) состоянию равновесия такой системы соответствует m-мерный устойчивый (неустойчивый) инвариантный тор в системе (2), или устойчивое (неустойчивое) квазипериодическое резонансное решение с периодами $\dfrac{2\pi n}{\omega_1}, ..., \dfrac{2\pi n}{\omega_k}$ в системе (1). Грубому устойчивому (неустойчивому) предельному циклу усредненной системы с частотой ω_0 соответствует (m+1)-мерный устойчивый (неустойчивый) инвариантный тор в системе (2), или устойчивое (неустойчивое) квазипериодическое резонансное решение с периодами $\dfrac{2\pi}{\omega_0}, \dfrac{2\pi n}{\omega_1}, ..., \dfrac{2\pi n}{\omega_k}$ в системе (1). Устанавливаются возможные фазовые портреты усредненной системы вблизи бифуркационного случая, когда резонансный уровень $I = I_{nm_1m_2}$ совпадает с уровнем $I = I_*$, в окрестности которого система (3) имеет двойной предельный цикл. Для иллюстрации полученных результатов приводятся результаты численного счета для уравнения маятникового типа с квазипериодическим по времени возмущением.

Литература

1. Морозов А. Д., Морозов К. Е. О квазипериодических возмущениях двумерных гамильтоновых систем // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 12. С. 1607-1615.

2. Morozov A. D., Morozov K. E. On synchronization of quasiperiodic oscillations. Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2018. vol. 14, No. 3. pp. 367-376.

3. Morozov A. D., Mamedov E. A. On a double cycle and resonances. Regular and Chaotic Dynamics. 2012. vol. 17, No. 1. pp. 63-71.

MSC2020 34C15

Dynamics of systems close to two-dimensional Hamiltonian ones with a double limit cycle under quasi-periodic perturbations

O. S. Kostromina

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

УДК 539.376

Моделирование ползучести стержня, находящегося в агрессивной среде*

Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), МАИ

Рассматривается диффузионный процесс в длинном металлическом стержне прямоугольного поперечного сечения, который погружен в агрессивную среду с концентрацией $c(x,t)$. Ширина сечения значительно превосходит его толщину $2H$, так что влиянием диффузии со стороны узких сторон прямоугольника можно пренебречь. Также предполагается, что длина стержня во много раз превосходит его поперечные размеры, поэтому влияние продольной координаты стержня на диффузионный процесс тоже можно не учитывать. Координата x направлена вдоль толщины стержня таким образом, что значения $x = 0$ и $x = 2H$ соответствуют широким сторонам стержня. Из условия симметрии рассматривается только половина стержня $0 \le x \le H$. Пусть c_0 - концентрация агрессивной среды на границе с металлом. При моделировании взаимодействия конструкции с агрессивной средой важно знать как распространяется агрессивный фронт. Однако уравнение диффузии, является уравнением параболического типа и движение этого фронта не оисывает. Процесс диффузии будет моделироваться волновым уравнением гиперболического типа, описывающим движение тепловой волны [1]

$$\tau_r c_{tt} + c_t = D c_{xx}, \tag{1}$$

где $c = c(x,t)$ - концентрация агрессивной среды; τ_r - время релаксации; D - коэффициент диффузии окружающей среды в исходный материал; t - время. Индексы при функции c определяют частные производные. Перепишем уравнение (1) в безразмерной форме:

$$U_{TT} + 2b_1 U_T = U_{XX}, \tag{2}$$

где $U = \frac{c}{c_0}$; $X = \frac{x}{H}$; $T = \frac{t}{H}\sqrt{\frac{D}{\tau_r}}$; $b_1 = \frac{H}{2\sqrt{D\tau_r}}$.

Теперь вернемся к старым обозначениям уравнения (1) с заменой $U(x,t) = c(x,t)$. В этом случае уравнение (2) примет вид

$$c_{tt} + 2b_1 c_t = c_{xx}. \tag{3}$$

Полагаем, что в начальный момент времени внутри образца агрессивная среда отсутствует, а на границах стержня ее концентрация остается постоянной. Тогда начальные условия будут однородными:

$$c(x,0) = 0, \quad c_t(x,0) = 0, \tag{4}$$

а краевые примут вид

$$c(0,t) = 1, \quad c_x(1,t) = 0. \tag{5}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 19-08-00718 а, 18-38-00424 мол а.

Применяя метод разделения переменных Фурье, получаем аналитическое решение задачи (3)-(5):

$$c(x,t) = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{k_2 e^{k_1 t} - k_1 e^{k_2 t}}{(2n+1)(k_1 - k_2)} \sin\lambda_n x - \right.$$
$$\left. -e^{-b_1 t} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n^2 - b_1^2}\cos\sqrt{\lambda_n^2 - b_1^2}t + b_1 \sin\sqrt{\lambda_n^2 - b_1^2}t}{(2n+1)(b_1 + \sqrt{\lambda_n^2 - b_1^2})} \sin\lambda_n x \right), \tag{6}$$

где $\lambda_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ -собственные значения задачи; $k_1 = -b_1 + \sqrt{b_1^2 - \lambda_n^2}, k_2 = -b_1 - \sqrt{b_1^2 - \lambda_n^2}$ - корни характеристического уравнения; N - целая часть числа $\frac{b_1}{\pi} - \frac{1}{2}$.

Теперь можно рассмотреть ползучесть стержня, помещенного в агрессвную среду, распространение концентрации которой в образце определяется выражением (6). Процесс ползучести будем моделировать следующей системой уравнений [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varepsilon^c}{\partial t} = \gamma^c \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial t} = \dfrac{B}{A}\gamma^c, \end{cases} \tag{7}$$

где ε^c-деформация ползучести, ω-параметр поврежденности, γ^c-скорость деформации ползучести

$$\gamma^c = \frac{A\sigma_0^n e^{bc(x,t)}}{(1 - X(t))^n \omega(x,t)^n (1 - \omega(x,t))^n}. \tag{8}$$

Здесь A, B, n, b-параметры ползучести, причем безразмерные значения A, B удовлетворяют равенствам $A = \sqrt{\frac{\tau_r}{D}} H\sigma_b^n \bar{A}$, $B = \sqrt{\frac{\tau_r}{D}} H\sigma_b^n \bar{B}$, $x = \frac{\bar{x}}{H}$, $\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_b}$, $t = \sqrt{\frac{D}{\tau_r}}\frac{\bar{t}}{H}$, σ_0-растягивающее стержень начальное безразмерное напряжение, σ_b-предел прочности материала стержня. Черточкой сверху помечены размерные величины. $X(t)$-безразмерная координата фронта разрушения, удовлетворяющая уравнению

$$\omega(X(t), t) = 1. \tag{9}$$

Из-за разрушения стержня осевое безразмерное напряжение будет изменяться по закону

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0}{1 - X(t)}.$$

Систему (7) следует интегрировать при нулевых начальных условиях:

$$\varepsilon^c(x,0) = 0, \quad \omega(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1. \tag{10}$$

В силу симметрии должны выполняться следующие условия:

$$\varepsilon_x^c(1,t) = 0, \quad \omega_x(1,t) = 0.$$

Параметр поврежденности должен удовлетворять уравнению

$$\int_0^{\omega} \omega^n (1-\omega)^n d\omega = B\sigma_0^n \int_0^t \frac{e^{bc(x,t)}}{(1 - X(t))^n} dt. \tag{11}$$

В качестве времени разрушения стержня принимаем значение $t = t_*$, при котором либо безразмерное напряжение σ, либо координата фронта разрушения $X(t)$, принимают значение равное единице.

В течение первой стадии ползучести $0 \leq t \leq t_1$ координата фронта разрушения остается неизменной: $X(t) = 0$. Разрушение материала впервые наступит в том месте, где функция $c(x,t)$ максимальна. В случае граничного условия $c(0,t) = 1$ максимальное значение концентрации достигается при $x = 0$. Подставляя из выражения (6) в (11) функцию $c(0,t)$ при $X(t) = 0$, получаем выражение для вычисления времени скрытой стадии разрушения t_1

$$\int_0^1 \omega^n (1-\omega)^n d\omega = B\sigma_0^n \int_0^{t_1} e^{bc(0,t)} dt.$$

При $t = t_1$ поверхностный слой стержня разрушается и возникает фронт разрушения $X(t)$, перемещающийся от внешней поверхности стержня к его осевому сечению $x = 1$. На фронте разрушения параметр поврежденности принимает значение (9).

Таким образом, проблема состоит в решении уравнений (7)- (9) при условии (10).

Приближенный процесс ползучести стержня при малых деформациях вплоть до его разрушения описан в монографии [3].

Литература

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Гос. изд-во техн-теор. лит. 1952. 392 с.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М:. Физматлит, 2016. 503 с.

MSC2020 65N20, 74A45

Modeling the creep of a bar in an aggressive environment

E. B. Kuznetsov, S. S. Leonov
Moscow Aviation Institute (National Research University)

УДК 519.633.6; 536.21; 538.945

Математическое моделирование процесса теплоотдачи пленки нитрида ниобия при импульсном нагреве током

Кузьмичев Н. Д., Васютин М. А., Данилова Е. В., Лапшина Е. А.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Нитрид ниобия (NbN) используется для сверхпроводящих болометров в радиоастрономии и терагерцовой спектроскопии (hot-electron bolometer, HEB) [1]. Тонкие пленки из NbN используются в качестве однофотонных детекторов (superconducting single-photon detectors, SSPDs) [2]. При проведении экспериментов по исследованию вольт-амперных характеристик (ВАХ), связанных с пропусканием через них сильного тока, необходимым является выполнение условия достаточного теплоотвода. Поэтому математическое моделирование процесса теплоотдачи пленок NbN при пропускании через них тока является актуальной и практически важной задачей. В программном обеспечении MathCad было решено одномерное неоднородное уравнение теплопроводности для определения распределения температуры u(x,t) в системе пленка-подложка-термостат с использованием неявной разностной схемы (см., [3]). Уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x,t), \tag{1}$$

где $a^2 = \lambda / c_p \rho = 4.3 \cdot 10^{-2} cm^2/s$ – коэффициент температуропроводности кварцевой подложки и пленки NbN, $c_\rho = 17\ J/(kg{\cdot}\mathrm{K})$ -удельная теплоёмкость подложки при 20 K [4], $\rho = 2.2\ g/cm^3$ – плотность подложки, $\lambda = 0.16\ W/(m\Delta\mathrm{K})$ – теплопроводность подложки при 20 K, u – температура плёнки, t – время, x – координата с началом на внешней от подложки плоскости плёнки, направленная перпендикулярно в сторону подложки. $f(x,t) = P(x,t)/(c_{NbN} \cdot \rho_{NbN}), P(x,t)$– объёмная плотность мощности источника тепла (плёнки), $c_{NbN} = 17\ J/(kg{\cdot}\mathrm{K})$ – удельная теплоёмкость NbN плёнки при T = 14 K (сумма решёточной и электронной теплоёмкости), $\rho_{NbN} = 8.4\ g/cm^3$ – плотность плёнки. Учитывая, что сила тока линейно возрастает за время t_0 от 0 до I_{max}, величина $P(x,t)$ определяется законом Джоуля-Ленца:

$$P(x,t) = \begin{cases} \rho \cdot j_0^2 \cdot t^2, & \text{если } x \le d,\ t \le t_0; \\ 0, & \text{если } x > d,\ t > t_0. \end{cases}$$

Здесь $\rho \approx 440\ \mu\Omega \cdot cm$ – удельное сопротивление плёнки в нормальном состоянии, $j_0 = I_{max}/(d \cdot b \cdot t_0)$, d – толщина и b – ширина пленки.

Начальным условием будет функция $\psi(x)$, которая определяет начальную температуру системы. Задаем краевую задачу 3-го рода на левом конце в силу того, что левая граница пленки находится в теплообмене со средой, имеющей температуру $\phi_1(t)$. На правом конце будут граничные условия 1-го рода, т.к. подложка находится в контакте с термостатом имеющем температуру $\phi_2(t)$. Условия на границе пленка-подложка не определяем, так как коэффициенты температуропроводности пленки и подложки имеют приблизительно одинаковые значения. В итоге начально-краевые условия для уравнения (1) имеют вид:

$$\begin{cases} u(x,0) = \psi(x); \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = H[u(0,t) - \phi_1(t)]; \\ u(L,t) = \phi_2(t). \end{cases} \tag{2}$$

В нашем конкретном случае эксперимента имеем: $\psi(x) = \phi_1(t) = \phi_2(t) = 14$K. Нанесем на пространственно-временную область $0 < x < L$, $0 < t < T_0$ конечно-разностную сетку $x_i = ih, t_j = j\tau$, с шагом по времени $\tau = T_0/M$, по x с шагом $h = L/N$. Здесь $0 \le i \le N, 0 \le j \le M$, L – толщина системы пленка-подложка, T_0 – временной интервал моделирования, N и M – количество шагов. Неявная конечно-разностная аппроксимация начально-краевой задачи (1) и (2) обладает устойчивостью [3] поэтому мы воспользуемся ею. Аппроксимация краевой задачи (2) на левом конце в нашем приближении $\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{0,t} \approx \frac{u_1^{j+1} - u_0^{j+1}}{h} = H(u_0^{j+1} - \phi_1^{j+1})$ и имеет вид:

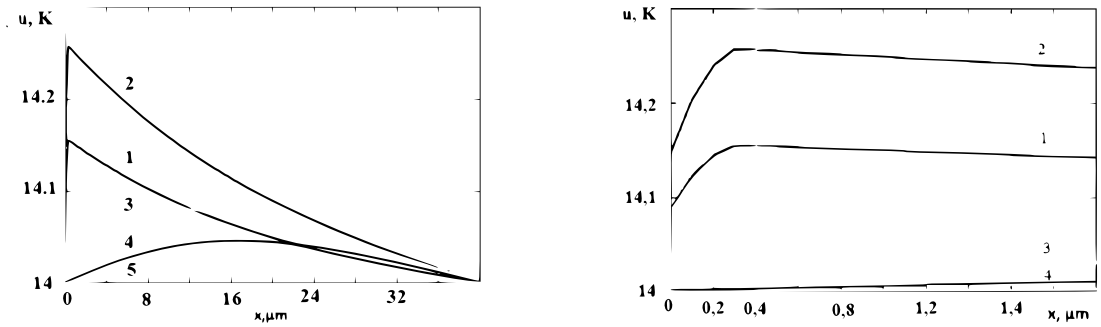
$$u_0^{j+1} = \frac{u_1^{j+1} + \delta\phi_1^{j+1}}{1+\delta}, \tag{3}$$

где $\delta = hH$, а H – коэффициент теплообмена. На правом конце имеем: $u_N^j = \phi_2(j\tau) = \phi_2^j$. В итоге мы имеем M систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с 3-х диагональной матрицей:

$$\begin{cases} (1+\sigma\lambda)u_1^{j+1} - \lambda u_2^{j+1} = u_1^j + \tau f_1^j + (\sigma - 1)\lambda\phi_1^{j+1}; \\ -\lambda u_{i-1}^{j+1} + (1+2\lambda)u_i^{j+1} - \lambda u_{i+1}^{j+1} = u_i^j + \tau f_i^j; \\ -\lambda u_{N-1}^{j+1} + (1+2\lambda)u_{N-1}^{j+1} = u_{N-1}^j + \tau f_{N-1}^j + \lambda\phi_2^{j+1}. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь: $\lambda = a^2\tau/h^2, 2 \le i \le N-2, 0 \le j \le M-1, \sigma = 1 + \frac{\delta}{1+\delta}$.

Температуру u_i^j на первом и последующих временных слоях получаем из решения СЛАУ (4) методом прогонки. При отсутствии теплообмена $\delta = 0$ будет 2-я краевая задача, а при $\delta = \infty$ - 1-я краевая задача. Результаты численных расчетов температуры $u(x,t)$ для $H = 10$ μm^{-1}, L = 40 μm, $t_0 = 250$ μs и остальными вышеприведенными параметрами приведены на рис. 1.



а) б)

Рис. 1. Распределение температуры по толщине системы пленка-подложка в разные моменты времени после начала импульса. Цифрами обозначены моменты времени: 1 – 200 μs, 2 – 250 μs, 3 – 275 μs, 4 – 300 μs, 5 – 375 μs. На рис. 1б. серым цветом выделена область пленки.

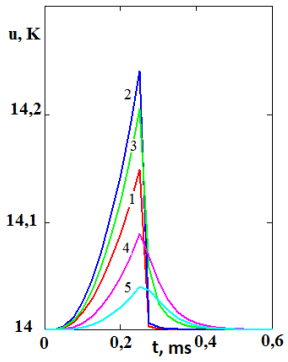


Рис. 2. Изменение температуры с течением времени в системе пленка-подложка в разных точках системы. Цифрами обозначены координаты x точек: 1 – 0 μm, 2 – 0,2 μm, 3 - 5 μm, 4 – 20 μm, 5 – 30 μm.

При экспериментальном исследовании ВАХ плёнки необходимо обеспечить хороший теплоотвод, чтобы её нагрев не превышал нескольких десятых градуса. Поэтому результаты численного моделирования процесса теплоотдачи пленки настоящей работы актуальны.

Из полученных результатов приведенных рисунках 1 – 2 видно, что максимальная температура нагрева находится внутри пленки и наибольшее ее значение достигается в конце импульса. Максимальная разность температур поверхностей пленки достигается также в конце импульса и равна в нашем случае: $\Delta u_s = u(400nm, 250\mu s) - u(0, 250\mu s) \approx 0.12K$

Значение Δu_{max} при малых H с его ростом резко падает, а при H больше 20 μm^{-1} уменьшается медленно. Величина H неизвестна. Оценить ее с помощью симметрии задачи. Для этого вначале находилось такое значение H, при котором максимум нагрева плёнки приходился на её середину (x = 0.2 μm). Высокое значение параметра H могут обеспечить прижимные контакты с высокой теплопроводностью. В качестве материала контактов целесообразно использовать бериллиевую бронзу (BeCu). Т.к. теплопроводности подложки и контактов известны, то оценим H, учитывая, что площадь контактов составляет около 20% площади плёнки. Оценка составила H = 50 μm^{-1}.

Таким образом, при хорошем теплоотводе поверхностями пленки можно достичь нагрева пленки на 0.2 – 0.3 K. Это достигается, применением прижимных контактов из бериллиевой бронзы, что позволяет проводить исследование ВАХ сверхпроводников с токами высокой плотности ($10^4 - 10^5 A/cm^2$) без значительного нагрева образцов. Полученный результат работы показывает, что небольшой рост температуры, вызванный импульсом тока, вносит незначительные искажения в реальные ВАХ.

Литература

1. Shurakov A., Lobanov Y., Goltsman G. Superconducting hot-electron bolometer: from the discovery of hot-electron phenomena to practical applications. Superconductor Science and Technology. 2016.

2. Zolotov P. I., Divochiy A. V., Vakhtomin Yu. B., Lubenchenko A. V., Morozov P. V., Shurkaeva I. V., Smirnov K. V. Influence of sputtering parameters on the main characteristics of ultra-thin vanadium nitride film. Journal of Physics: Conference Series. 2018 V. 1124. I. 5.

3. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 406 с.

4. Таблицы физических величин. Справочник. Под ред. акад. И.К. Кикоина. М., Атомиздат. 1976, 1008 с.

MSC2020 35K20

Mathematical modeling of the heat transfer process of a niobium nitride film during pulsed heating by current

N. D. Kuzmichev , M. A. Vasyutin , E. V. Danilova , E. A. Lapshina
National Research Mordovia State University

УДК 519.6

Построение гибридных численных потоков для решения уравнений Эйлера *

Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

Численное моделирование сверхзвукового обтекания твердых тел представляет собой незаменимый инструмент для проектирования авиационно-космической техники. Ударные волны, которые формируются в сверхзвуковых потоках, создают некоторые вычислительные проблемы, которые увеличивают сложность моделирования: снижение порядка точности, проблемы сходимости, возникновение неустойчивостей. Одной из таких наиболее изученных неустойчивостей является возникновение «карбункула», которая влияет на профиль фронта ударной волны и деформирует его [1,2]. Эта неустойчивость, может резко повлиять на численное моделирование головной ударной волны перед носовой частью летательного аппарата.

Как известно, на возникновение неустойчивости карбункула влияют используемые численные потоки. В работе [2] проведено сравнение различных численных потоков и показано, что наиболее подвержены возникновению этой неустойчивости потоки, обладающие низкой диссипацией, а использование высоко диссипативных потоков позволяют избежать возникновения карбункула. С другой стороны, высокая диссипация приводит к понижению точности расчетной схемы. По этой причине было предпринято несколько попыток разработки новых методов, подавляющих развития неустойчивостей, при этом обеспечивают низкую диссипацию [3–6].

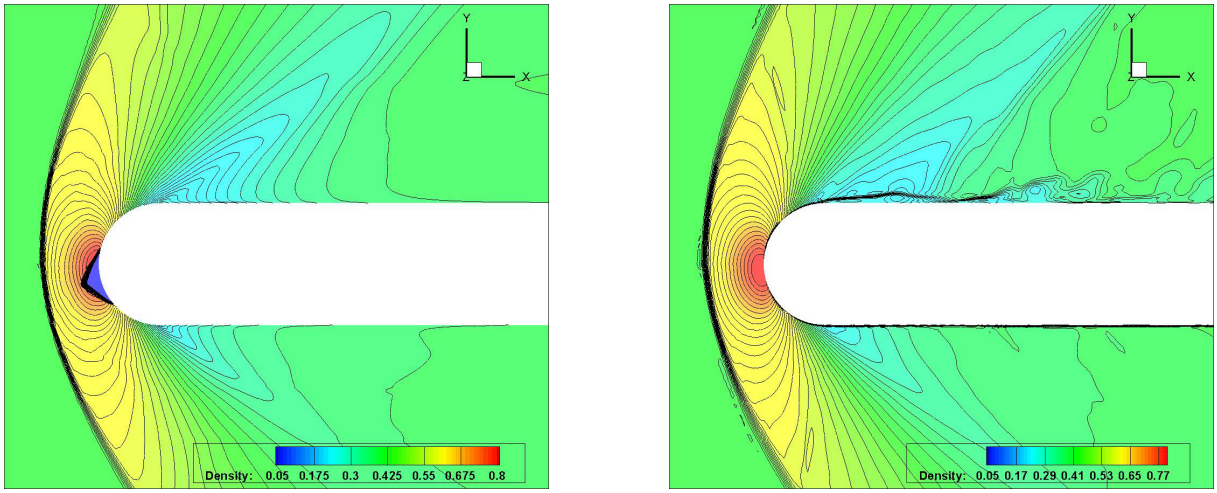
В настоящей работе предлагается новый гибридный численный поток для вычисления потоков Эйлеровой части системы уравнений Навье-Стокса, который позволяет избежать возникновения неустойчивости и сохраняет высокую точность на ударных волнах и пограничных слоях. Данный поток, представляет собой комбинацию численного потока Годунова [7] и численного потока Русанова-Лакса-Фридрихса [8, 9]. Проведено тестирование данного алгоритма при численном моделирование сверхзвукового обтекания крылатой ракеты Tomahawk. Проведена серия численных расчетов обтекания сверхзвуковым вязким потоком с числом Рейнольдса $Re = 1.104E + 07$, с числом Маха в набегающем потоке $M_\infty = 1,\ 3$, угол атаки $\alpha = 5°$. Вычислительная область представляет собой структурированную сетку с $N = 1.1E + 07$ элементами. Расчеты выполнялись программным комплексом DG3D [10].

При моделировании данной задачи разрывным методом Галеркина второго порядка точности с численным потоком HLLC [11] было обнаружено развитие неустойчивости. В носовой части летательного аппарата возникала область вакуума (рис. 1а) в виде клина, перпендикулярная направлению набегающего потока, которая возрастала со временем, искривляла ударную волну и приводила к разваливанию расчета на достаточно раннем временном моменте.

Происхождение данного вида неустойчивости мы связываем с происхождением, аналогичным возникновению карбункула [2]: высокие числа Рейнольдса, порядка 10^7, низко диссипативный поток HLLC, первый порядок точности схемы. Несмотря на то, что расчет проводился разрывным методом Галеркина второго порядка, но, как известно, в области за фронтом ударной волны порядок схемы может падать до первого порядка [11]. При расчете

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 20-01-00578-а.

с численным потоком Русанова-Лакса-Фридрихса (RLF) такой неустойчивости не возникло (рис. 1б), но высокая диссипативность потока создала более размытые области.



а) численный поток HLLC; б) численный поток RLF.

Рис. 1. Распределение поля плотности.

Далее были проведены два расчета с новыми гибридными численными потоками (рис. 2). Первый поток представляет собой линейную комбинацию высокоточного потока Годунова (Godunov) и устойчивого потока Русанова-Лакса-Фридрихса

$$\hat{F} = \theta F^{\text{Godunov}} + (1-\theta) F^{\text{RLF}}.$$

Где

$$\theta = \begin{cases} \frac{|\mathbf{\Delta u} \cdot n|}{|\mathbf{\Delta u}|} = \frac{|\Delta u n_x + \Delta v n_y + \Delta w n_z|}{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2}}, & |\mathbf{\Delta u}| > \varepsilon, \\ 1, |\mathbf{\Delta u}| \leq \varepsilon \end{cases}$$

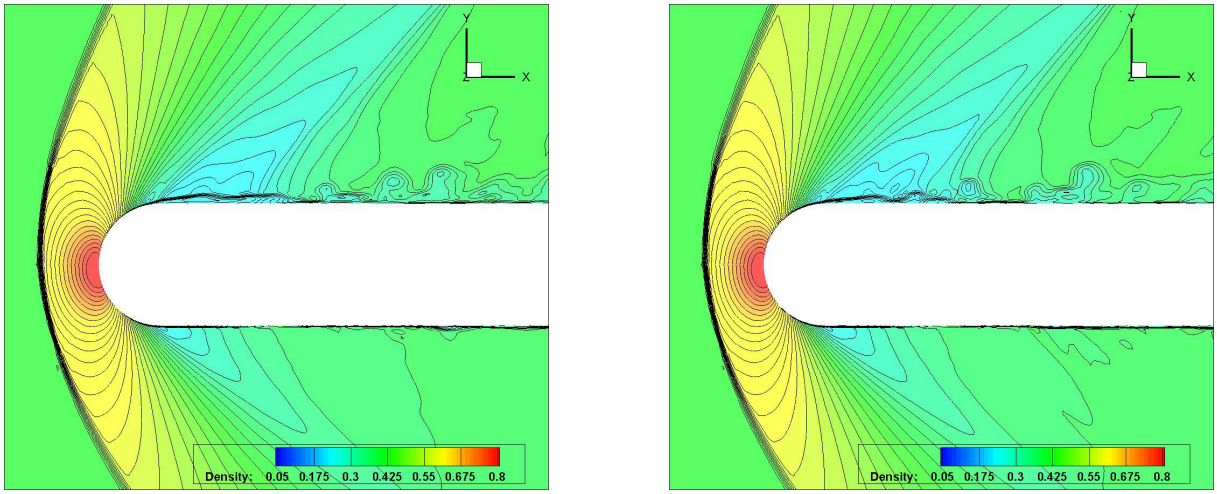
где ε - малая константа, чтобы избежать деления на ноль (например, $\varepsilon = 10^{-6}$), n - нормаль к границе ячейки, а Δu - скачок вектора скорости через границу. Параметр θ вычисляется из нормали к границе ячейки и скачка скорости через поверхность границы ячейки. Направление скачка скорости определяет нормаль к ударной волне: когда граница ячейки совпадает с фронтом ударной волны, используется поток Годунова, а когда граница раздела перпендикулярна ударной волне, применяется поток RLF. Таким образом, увеличивается диссипация в направлении, совпадающим с ударной волной, и устраняется неустойчивость. Алгоритм является локальным и может быть легко реализован в разрывном методе Галеркина. Поскольку стоимость потока RLF значительно ниже по сравнению с потоком Годунова, предлагаемый гибридный подход не увеличивает значительно вычислительные затраты по сравнению с исходным потоком Годунова. Однако надежность значительно улучшена. Иной подход к построению гибридного потока заключается в добавлении диссипативного члена в областях где это необходимо.

$$\hat{F} = \frac{F^{\text{Godunov}}(U^+) + F^{\text{Godunov}}(U^-)}{2} - W\frac{U^+ + U^-}{2}.$$

$$W = \theta W^*, W^* = max\left(|u_n + c|, |u_n - c|\right)$$

где W^* - максимум собственных значений матрицы $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{A_n} = \frac{dG}{dU}$, $G = F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z$, U - вектор консервативных переменных, F - вектор потоковых функций в уравнении

Эйлера, θ – параметр, определенный выше, W - скорость, вдоль которой решается задача Римана в численном потоке Годунова.



а) численный поток 1 типа; б) численный поток 2 типа.

Рис. 2. Распределение поля плотности.

Оба предложенных потока показали устойчивую работу при расчетах, позволили избежать возникновения неустойчивостей, сохранили точность и структуру ударной волны и показали хорошую точность решения в пограничном слое.

Литература

1. Родионов А. В. Искусственная вязкость для подавления ударно-волновой неустойчивости в схемах типа Годунова повышенной точности Препринт / ФГУП "Российский федеральный ядерный центр ВНИИЭФ"116-2018.

2. Pandolfi M., D'Ambrosio D. Numerical Instabilities in Upwind Methods: Analysis and Cures for the "Carbuncle" Phenomenon. Journal of Computational Physics. 2001. vol. 166. pp. 271-301.

3. Nishikawa H., Kitamura K. Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers. Journal of Computational Physics. 2008. vol. 227, No 4. pp. 2560-2581.

4. Guo S., Tao W.-Q. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals. 2018. vol. 73, pp. 33-47.

5. Hu L. J., Yuan L. A robust hybrid hllc-force scheme for curing numerical shock instability. Applied Mechanics and Materials. 2014. vol. 577. pp. 749–753.

6. Ferrero A., D'Ambrosio D. An Hybrid Numerical Flux for Supersonic Flows with Application to Rocket Nozzles. 17th International conference of numerical analysis and applied mathematics, 23-28 september 2019, Rhodes, Greece.

7. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник, 1959. Т.47(89), №3, с. 271-306.

8. В. В. Русанов. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // Журнал вычислительной математ. и математ. физики, 1961. Т.I, №2. с.267-279.

9. Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1954. vol. 7, №1, pp.159-193.

10. Краснов М. М., Кучугов П. А., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф. Разрывный метод Галёркина на трёхмерных тетраэдральных сетках. Использование операторного метода программирования, Матем. моделирование. 2017. Т. 29:2. с. 3-22.

11. Toro E F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Springer, Third Edition, 2010 HLLC.

12. Ладонкина М. Е. Неклюдова О. А., Остапенко В. В., Тишкин В. Ф. О точности разрывного метода Галеркина при расчете ударных волн, ЖВМиМФ. 2018. Т. 58, № 8. С. 148-156.

MSC2020 35Q30, 76N15

Construction of hybrid numerical fluxs to solve the Euler equations

M. E. Ladonkina, V. F. Tishkin

Keldysh Institute of Applied Mathematics

УДК 519.63

Математическое моделирование нестационарного течения многофазного потока в пористой среде*

Мазитов А. А.[1], Бобренёва Ю. О.[2], Губайдуллин И. М.[1,2]

Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН, [1]
Уфимский государственный нефтяной технический университет [2]

В работе рассматривается математическая модель, описывающая многокомпонентное течение в нефтяном пласте. Целью работы является разработка математической модели нестационарного течения многокомпонентного потока в нефтяном пласте.

Для месторождений, находящихся на поздних стадиях разработки основной целью является увеличение темпа отбора нефти из залежи и поддержание пластового давления на эксплуатируемом объекте. Для достижения этой цели зачастую используется система поддержания пластового давления, которая предполагает нагнетание агента в пласт для создания напорного режима. В качестве агента применяют воду или газ [1].

Качественное описание многофазных потоков и количественная оценка их основных параметров необходимы для проектирования конструкций добывающих скважин, транспортировки продукции, а также для контроля над потоками и для прогноза их показателей [2]. Несмотря на огромное количество различных прикладных задач, до сих пор отсутствует общепринятая модель, описывающая подобные течения в нефтяном пласте.

Изучение любого объекта невозможно одним лишь его экспериментальным исследованием. Поэтому, сформулировав цели и выявив самое существенное в объекте, часто прибегают к моделированию. Модель должна быть удобна для изучения и проста в использовании, но при этом должна наиболее полно отражать все те качества, которые необходимо изучить, для достижения поставленной цели. Поэтому для одного и того же объекта может быть создан целый класс моделей, соответствующих разным целям его изучения.

Основными методами исследования являются методы вычислительной математики, механики жидкости и газа в пористых средах [3]. Многокомпонентное течение в пористых средах в нефтяном пласте представляется уравнениями механики сплошной среды, описывающие основные законы сохранения: массы, импульса и энергии [4]. Задача ставится для квазилинейной системы уравнений математической физики смешанного типа

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\varphi^\alpha \rho_o)}{\partial t} + \nabla(\rho_o U_o^\alpha) = 0, \\ \dfrac{\partial(\varphi^\alpha \rho_w)}{\partial t} + \nabla(\rho_w U_w^\alpha) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

скорости фильтрации воды и нефти равны:

$$\begin{cases} U_o^\alpha = -\dfrac{k_\alpha k_{ro} S_o^\alpha}{\mu_o} gradP_o^\alpha, \\ U_w^\alpha = -\dfrac{k_\alpha k_{rw} S_w^\alpha}{\mu_w} gradP_w^\alpha. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь P – пластовое давление в сети трещин (МПа), φ пористость матрицы (д.ед), k– проницаемость (м^2), μ - вязкость нефти/воды (Па*с) i=o,w , где o – нефть, w – вода, k^α

*Работа выполнена в рамках гранта № 18-07-00341

– абсолютная проницаемость (м^2), k_rw,k_ro – относительные фазовые проницаемости (м^2), S_i^α– насыщенность, ρ – плотность (г/м^3), U_i^α - скорость течения фазы.

В качестве численного метода решения в работе планируется использовать прямые методы решения разностных уравнений [5]. Для решения дифференциальных уравнений в частных производных - метод контрольных объемов.

Полученная математическая модель позволит количественно описывать поведение давления в нефтяных пластах.

Литература

1. Тугарова М. А. Породы-коллекторы: Свойства, петрографические признаки, классификации: учебно-методическое пособие. СПб : С.-Петербургский гос. университет, 2004. 36 с.

2. Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д. Нефтегазовая гидромеханика. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 544 с.

3. Алишаев М. Г., Розенберг М. Д., Теслюк Е. В. Неизотермическая фильтрация при разработке нефтяных месторождений. М: Недра, 1985. 270 с.

4. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. 628 с.

5. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М: Наука, 1989. 432 с.

MSC2020 80A30

Mathematical modeling of unsteady multiphase flow in a porous medium

A. A. Mazitov[1], Ya. O. Bobreneva[2], I. M. Gubaydullin[1, 2]

Institute of Petrochemistry and Catalysis of Russian Academy of Sciences [1],
Ufa State Petroleum Technological University [12]

УДК 517.91

Исследование динамики математической модели системы фазовой автоподстройки с запаздыванием

Мамонов С. С., Ионова И. В., Харламова А. О.

Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина

Рассматривается система фазовой автоподстройки с запаздыванием, динамика которой описывается операторным уравнением [1]- [5]

$$p\sigma + K_\varphi(p)K_\tau(p)\Omega_y F(\sigma) = \Omega_H, \tag{1}$$

где $p = d/dt$ – оператор дифференцирования,$\sigma(t)$ – разность фаз эталонного и подстраиваемого генераторов, Ω_y – полоса удержания фазового кольца,$K_\varphi(p)$ – коэффициент передачи фильтров нижних частот в фазовой цепи управления, $K_\tau(p) = e^{-\tau p} \approx (1 - \tau p)$ – операторный коэффициент запаздывания, τ – время запаздывания, $F(\sigma)$ – характеристика фазового детектора, $F(\sigma)$ – Δ-периодическая непрерывно дифференцируемая функция, $\Omega_H = const$ – начальная расстройка. Уравнение (1) рассматривается в случае дробно-рационального фильтра $K_\varphi(p) = \frac{A_1p+A_2}{B_0p^2+B_1p+B_2}$ и $K_\tau(p) = (1 - \tau p)$. Пусть $K(p) = K_\varphi(p)K_\tau(p)$, тогда получим равенство $K(p) = \frac{a_0p^2+a_1p+a_2}{B_0p^2+B_1p+B_2}$, где $a_0 = -\tau A_1 < 0$, $a_1 = A_1 - \tau A_2$, $a_2 = A_2 > 0$. Введём следующие обозначения $\varphi(\sigma) = F(\sigma) - \gamma$, $\gamma = \Omega_H(a_2\Omega_y)^{-1}$, $\alpha_1 = B_1B_0^{-1}$, $\beta_1 = B_2B_0^{-1}$,$\rho = -\Omega_y a_0 B_0^{-1} = \Omega_y \tau A_1 B_0^{-1} > 0$, $\Gamma = \Omega_y B_0^{-1}(a_1 + \rho B_1)$, $\nu = -\Omega_y B_0^{-1}(a_2 - B_1B_0^{-1}(a_1 + \rho B_1) + \rho B_2) = -\nu_1$, $\rho_1 = \nu_1\beta_1^{-1} > 0$, $\rho_0 = \rho - \rho_1 > 0$. Заменой переменных $\dot\sigma = x_2 + \rho\varphi(\sigma)$, $\dot x_2 = x_1 - \Gamma\varphi(\sigma)$ операторное уравнение (1) сводится к фазовой системе дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\dot x = Ax + b\varphi(\sigma), \dot\sigma = c^T x + (\rho_1 + \rho_0)\varphi(\sigma). \tag{2}$$

Система (2) является математической моделью системы фазовой автоподстройки с запаздыванием, для которой справедливы соотношения $A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -\nu_1 \\ -\Gamma \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $c^Tb = -\Gamma$, $c^TA = l^T$, $l^Tb = -\nu_1 < 0$, $rang||c, l|| = 2$, $l^TA = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $c^TA^{-1}b \neq 0$, $\rho = \rho_1 + \rho_0 > 0$, $\varphi(\sigma)$– Δ-периодическая функция. Запаздывание в системе автоподстройки определяет значение параметра $\rho > 0$, при отсутствии запаздывания выполняется равенство $\rho = 0$.

В случае $\rho = 0$ изучению системы (2) посвящены многочисленные работы [1]- [3]. В настоящей работе качественно-численными методами для системы (2) получены условия существования колебательных, вращательных и колебательно-вращательных предельных циклов [4]- [8]. Численными методами с использованием вращения векторного поля показано, что бифуркация цикла определяется как увеличением оборотности устойчивого цикла, так и формированием неустойчивых циклов на разных частотах. При этом вопрос об устойчивости колебательных и вращательных предельных циклов решается с помощью мультипликаторного анализа [4]- [8].

Результаты, полученные для математической модели (2), позволяют получить условия существования различных режимов, реализуемых в системе (1), таких как режимы фазовой синхронизации, режимы фазовой мультистабильности, квазисинхронные режимы и режим вынужденной фазовой синхронизации, влияющих на появление в системе (1) режима скрытой синхронизации [5].

В работе рассмотрен пример электрической цепи, для которой найдены условия, определяющие значения коэффициентов фильтра нижних частот и запаздывания для вынужденной фазовой синхронизации [4].

Для системы (2) показано, что наличие запаздывания ($\rho > 0$) приводит к появлению вынужденной фазовой синхронизации. В частности, при $\rho = 0$ рассмотрена система (2), в которой наблюдается режим биений. Увеличение ρ до значения 1.16, приводит к трансформации режима биений в квазисинхронный режим фазовой синхронизации [5]. На рисунке 1 изображены режим биений при отсутствии запаздывания $\rho = 0$ и квазисинхронные режимы при $\rho = 1.16$.

Наличие запаздывания позволяет для системы фазовой автоподстройки формировать режим фазовой мультистабильности, в этом случае в системе (2) наблюдаются три колебательных цикла. Два устойчивых $z_{10}(t)$, $z_{20}(t)$ цикла и один неустойчивый $z_0^-(t)$ определяют режим фазовой мультистабильности системы (1). Для определения пространственных характеристик циклов, в работе используются понятия кривизны и кручения цикла. На основе анализа пространственных характеристик циклов решается вопрос о выборе цикла, соответствующего наилучшему режиму синхронизации. На рисунке 2 представлена мультистабильность системы (2).

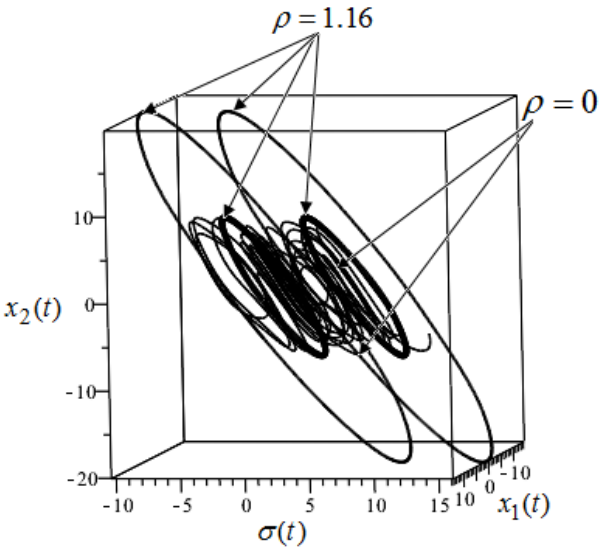


Рис. 1 Вынужденная синхронизация

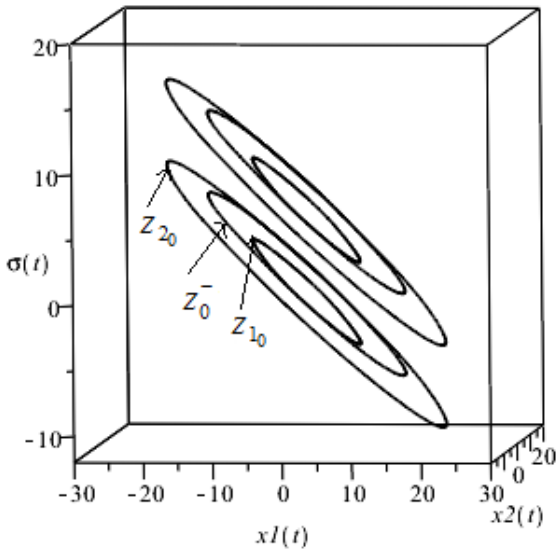


Рис. 2 Мультистабильность системы (2)

Проведенный анализ позволяет проследить динамику математической модели системы фазовой автоподстройки (ФАП) с запаздыванием и сделать вывод о наличии в такой системе режимов скрытой синхронизации. Запаздывание может быть использовано для подавления хаотически модулированных режимов биения и формированию на их базе квазисинхронных режимов, обеспечивающих фазовую синхронизацию. Полученные результаты позволяют получить практические рекомендации для определения параметров фильтров второго порядка с запаздыванием, при которых в системе ФАП наблюдается мультистабильность, что позволяет использовать систему ФАП как генератор многочастотных колебаний.

Литература

1. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 448с.
2. Матросов В. В. Нелинейная динамика системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка // Изв. вуз. Радиофизика. 2006. Т.49, №3. С. 267-278.
3. Шалфеев В. Д., Матросов В. В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. 366 с.
4. Мамонов С. С., Харламова А. О. Вынужденная синхронизация систем фазовой автоподстройки с запаздыванием // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2017. № 62. С. 26-35.
5. Мамонов С. С., Ионова И. В., Харламова А. О. Механизмы возникновения скрытой синхронизации динамических систем // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3. С. 333-348.
6. Мамонов С. С., Харламова А. О. Циклы первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 148. С. 83-92.
7. Мамонов С. С., Ионова И. В., Харламова А. О. Колебательно-вращательные циклы фазовой системы дифференциальных уравнений // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2018. № 4. С. 51-57.
8. Мамонов С. С., Ионова И. В., Харламова А. О. Кривизна колебательных циклов фазовых систем // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 19, № 2. С.105-110.

MSC2020 34C25

The study of the dynamics of a mathematical model delayed phase locked loop systems

S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova

Ryazan State University named after S. A. Yesenina

УДК 517.518

Реализация неявной схемы для решения уравнений газовой динамики с использованием разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках*

Масягин В. Ф.

МГУ им. Н. П. Огарева

В работе рассматривается трехмерная система уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) + \nabla p = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + p)\mathbf{v}) = 0, \tag{3}$$

дополненная подходящими начальными и граничными условиями, которые конкретизируются для каждой задачи. В системе (1)–(3) ρ - плотность, $\mathbf{v} = (u, v, w)$ - вектор скорости, p - давление, $E = \rho\left(e + \frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)$ - полная энергия, e - внутренняя энегрия. Система уравнений замыкается уравнением состояния $p = \rho e\,(\gamma - 1)$, где γ – показатель адиабаты.

Для пространственной аппрокимации уравнений используется метод Галеркина с разрывными базисными функциями. Производные по времени аппроксимируются с использованием схемы Эйлера.

Для нахождения значений функций на гранях в конвективных слагаемых используется потоковая функция Годунова.

Построение неявной схемы базируется на представлении системы уравнений в так называемой «дельта-форме», когда рассматриваются не сами искомые функции, а их приращения на каждом шаге по времени [1].

Полученную в результате СЛАУ решаем с использованием решателей из библиотеки NVIDIA AmgX [2]. В данной работе представлены результаты, полученные с использованием решателя PBICGSTAB.

Для обеспечения монотонности численного решения используется лимитер Кокбурна [3]

Для верификации численного алгоритма решены 2 модельные задачи. В первой из них моделируется течение невязкого сжимаемого газа в плоском канале с клином при числе Маха, равным 2 [4]. На рис. 1 представлено распределение полей числа Маха и полного давления.

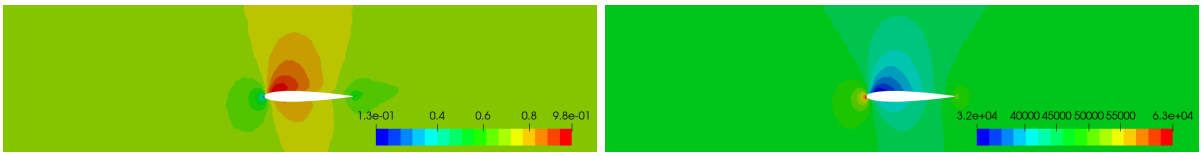
Во второй задаче моделируется трансзвуковое обтекние симметричного аэродинамического профиля NACA 0012 [5]. На рис. 2 представлено распределение полей числа Маха и давления. На рис. 3 представлено распределение коэффициента давления на поверхности профиля.

Представленные результаты находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными и известными численными решениями представленных выше задач. Для улучшения численных результатов в дальнейшем планируется учитывать эффекты вязкости и задействовать известные модели турбулентности.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-71-00131)

а) б)

Рис. 1. Распределение полей: (а) числа Маха (б) полного давления.



а) б)

Рис. 2. Распределение полей: (а) числа Маха (б) давления.

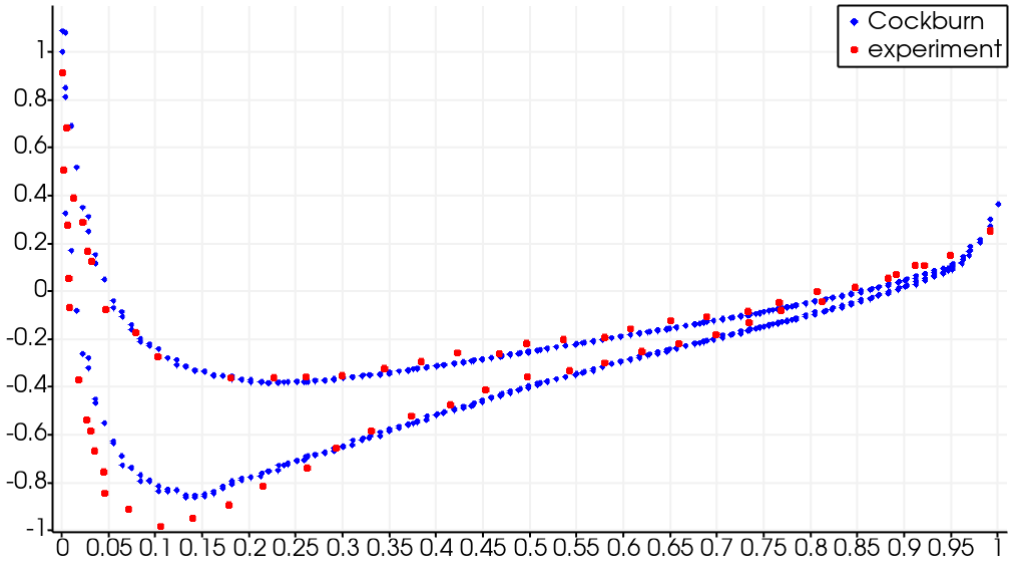


Рис. 3. Распределения коэффициента давления на поверхности профиля.

Литература

1. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2 томах. М.: Мир, 1990. 728 с.

2. Naumov M. [et al.] AmgX: a library for GPU accelerated algebraic multigrid and preconditioned iterative methods. SIAM J. Sci. Comput. 2015. Vol. 37, No. 5. pp. 602-626.

3. Cockburn. B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for

Convection-Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations. Lecture Notes in Mathematics. 1998. vol. 1697. pp. 151-268.

4. Волков К. Н., Дерюгин Ю. Н., Емельянов В. Н., Карпенко А. Г., Козелков А. С., Смирнов П. Г., Тетерина И. В. Реализация параллельных вычислений на графических процессорах в пакете вычислительной газовой динамики ЛОГОС // Выч. мет. программирование. 2013. Т. 14, № 3. С. 334–342.

5. Harris C. D. Two-dimensional Aerodynamic Characteristics of the NACA0012 Airfoil in the Langley 8-Foot Transonic Pressure Tunnel. NACA Technical Memorandum 81927. Langley Research Center. 1981.

MSC2020 65Q10

Implementation of an implicit scheme for solving gas dynamics equations using the discontinuous Galerkin method on unstructured grids

Masyagin V.F.

National Research Mordovia State University

УДК 519.6

Применение искусственных нейронных сетей для вычисления дискретных потоков при численном решении задач газовой динамики *

Нефедов М. С., Жалнин Р. В.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва

В работе рассматривается построение и обучение нейронной сети для вычисления дискретных потоков при численном решении задач газовой динамики. Приводится одномерная расширенная система уравнений Эйлера с нулевыми правыми частями [1]

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Ее численное решение осуществляется с помощью явной разностной схемы годуновского типа с первым порядком аппроксимации по времени и пространству [1]

$$\frac{U_i^{(j+1)} - U_i^{(j)}}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2}^{(j)} - F_{i-1/2}^{(j)}}{\Delta x} = 0. \tag{2}$$

При подготовки данных для обучения нейронной сети, использовалась подпрограмма для решения задачи о распаде разрыва, разработанная в ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. На вход программы подается 10 параметров: RB, PB, UB, VB, WB, RE, PE, UE, VE, WE, где R – плотность, P – давление, E – энергия, UB, VB, WB и UE, VE, WE – компоненты вектора скорости. Индексы B и E – соответственно параметры «слева» и «справа». На выходе получаются параметры: RI, EI, PI, UI, VI, WI, где E – энергия. С помощью этих данных была обучена нейронная сеть.

Результаты обучения:

Применение сети на задаче Сода. В области $x \in [0; 1]$ содержатся два одинаковых идеальных совершенных газа, распределенных в начальный момент времени:

$$(\rho, u, p, \gamma) = \begin{cases} 1.0, 0.0, 1.0, 1.4; 0 \le x \le 0.5, \\ 0.125, 0.0, 0.1, 1.4; 0.5 < x \le 1. \end{cases} \tag{3}$$

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-41-130001

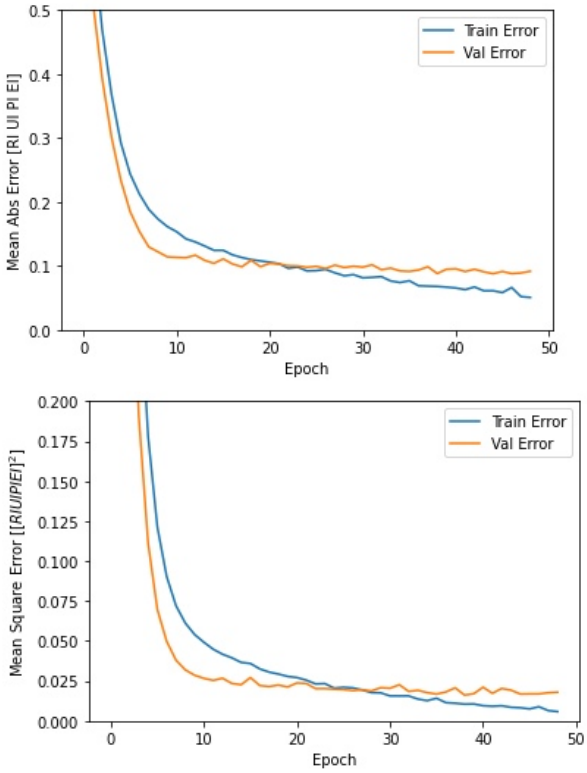


Рис. 1. Результат обучения сети

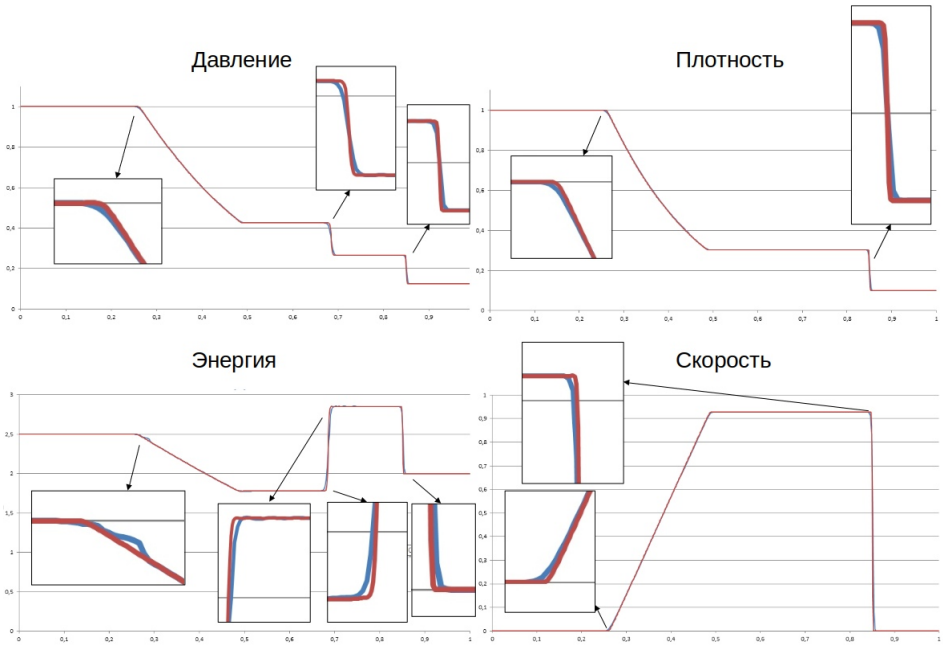


Рис. 2. Решение задачи Сода с помощью нейронной сети

Применение используемого метода на тестовой задаче – задаче Сода, показало, что решение имеет достаточно высокие порядки точности: около двух и более.

Таблица 1. Порядки сходимости решения.

Сетка	(100; 200)	(200; 400)	(400; 800)
ρ	1.812	2.243	2.963
u	1.174	2.123	3.323
p	1.823	2.351	2.991
e	1.799	1.997	2.985

Литература

1. Тишкин В. Ф. Разностные схемы трехмерной газовой динамики задачи о развитии неустойчивости Рихтмайера–Мешкова / В. Ф. Тишкин, В. В. Никишин, И. В. Попов, А. П. Фаворский // Математическое моделирование. 1995. Т. 7, № 5. С. 15-25.

2. Deep learning vs machine learning: a simple way to understand the difference [Electronic resource]. URL: https://www.zendesk.com/blog/machine-learning-and-deep-learning/

3. Google Colaboratory [Electronic resource]. URL: https://colab.research.google.com/drive/1lz8P9v7KVdbawtXw0ik6eOLZguUx55F0

4. Install TensorFlow with pip [Electronic resource]. URL: https://www.tensorflow.org/install/pip?hl=ru

5. Keras: the Python deep learning API [Electronic resource]. URL: https://keras.io/

MSC2020 76M25

Application of artificial neural networks for calculating discrete flows in the numerical solution of gas dynamics problems

M. S. Nefedov, R. V. Zhalnin

National Research Mordovia State University

УДК 519.853.4

Об особенностях целевой функции в задаче оценивания параметра квадратичного отображения *

Николаева Н. Г., Шелудько А. С.

Южно-Уральский государственный университет

Одним из классов математических моделей временных процессов являются одномерные отображения вида

$$x_k = f(x_{k-1}, \lambda), \tag{1}$$

где x_k – переменная состояния; λ – параметр модели; k – номер временного шага. Некоторые нелинейные отображения при определенных значениях параметра λ могут порождать последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$ со сложным, нерегулярным поведением [1]. Такие отображения, а также порожденные ими временные процессы, называются хаотическими [2]. Одним из самых известных примеров является квадратичное отображение

$$x_k = \lambda x_{k-1}(1 - x_{k-1}), \tag{2}$$

которое является хаотическим при $x_0 \in (0;1)$ и $\lambda \in (3{,}569945\ldots;4]$. Сложная динамика хаотического отображения отражается в различных аналитических характеристиках, таких как бифуркационная диаграмма, показатель Ляпунова, спектральная плотность, автокорреляционная функция [1, 3]. С точки зрения вычислительных методов, сильная чувствительность реализации отображения (1) к малым изменениям начального условия x_0 и параметра λ проявляется в многоэкстремальности целевой функции при решении задачи оценивания параметров моделей хаотических процессов [4, 5].

В данной работе рассматривается задача оценивания параметра λ отображения (1) по зашумленным измерениям

$$y_k = x_k + v_k,\ k = 1{,}2, \ldots, N, \tag{3}$$

где v_k — ошибки измерений; N – число измерений. В рассматриваемой задаче неизвестным также является начальное условие x_0, от которого неявно зависит значение переменной состояния x_k в момент времени k:

$$x_k = \underbrace{f(f(f \ldots f}_{k}(x_0, \lambda) \ldots)) = f^k(x_0, \lambda).$$

Решение задачи оценивания в рамках оптимизационного подхода основано на поиске глобального минимума целевой функции, которая определяет меру близости реализации отображения (1) к измеряемым значениям (3). Например, при применении метода наименьших квадратов целевая функция имеет вид:

$$F(x_0, \lambda) = (y_1 - f(x_0, \lambda))^2 + (y_2 - f(f(x_0, \lambda), \lambda))^2 + \ldots = \sum_{k=1}^{N} \Big(y_k - f^k(x_0, \lambda)\Big)^2. \tag{4}$$

В силу относительной простоты и отсутствия требований к свойствам отображения (1) метод наименьших квадратов остается самым распространенным методом оценивания параметров [6]. Однако следует также отметить исследования [7, 8], в которых используются другие варианты целевых функций.

*Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

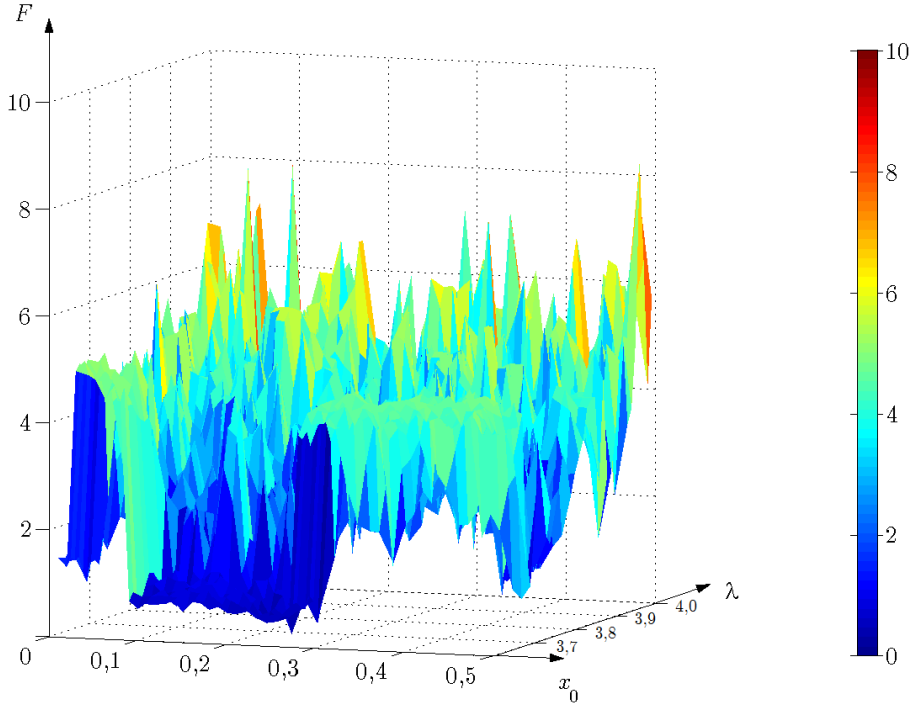


Рис. 1. Целевая функция в задаче оценивания параметра квадратичного отображения.

На рис. 1 показан пример целевой функции (4) в задаче оценивания параметра λ квадратичного отображения (2). В рассматриваемом примере истинное значение параметра $\lambda^* = 3{,}65$, начальное условие $x_0^* = 0{,}25$. Значения ошибок измерений v_k получены с помощью генератора псевдослучайных чисел с нормальным распределением, нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 0{,}05$ (используется функция *randn* из стандартной библиотеки *Matlab*). При построении графика на рис. 1 шаг изменения переменных $\Delta = 10^{-2}$. В данном масштабе целевая функция визуально имеет негладкий «рельеф» и только несколько точек локального экстремума, которые являются кандидатами на выбор в качестве точки глобального минимума. На самом деле функция (4) является дифференцируемой, а в окрестности точки (x_0^*, λ^*) расположено много близких по значению функции локальных экстремумов. Это можно увидеть на рис. 2, где шаг изменения переменных $\Delta = 5 \cdot 10^{-5}$.

Указанные особенности целевой функции влияют на результаты вычислительных методов. Одним из алгоритмов глобальной оптимизации, который часто используется при решении задачи оценивания параметров моделей хаотических процессов, является метод роя частиц [9, 10]. Алгоритм основан на рассмотрении множества частиц, которые перемещаются по индивидуальным траекториям в пространстве переменных целевой функции (4). Каждая частица хранит информацию о своем наилучшем положении – точке траектории, в которой значение функции было минимальным. Между частицами также происходит обмен информацией о наилучшем положении среди всех частиц – точке, которая принимается за приближение к точке глобального минимума (в рассмотренном примере $\hat{x}_0 = 0{,}25002119$, $\hat{\lambda} = 3{,}65020120$). На рис. 3 показаны наилучшие положения частиц после $M = 10^3$ итераций, которые как видно находятся в окрестности двух вытянутых «впадин» целевой функции. Данные особенности целевой функции целесообразно учитывать при разработке алгоритма поиска глобального минимума.

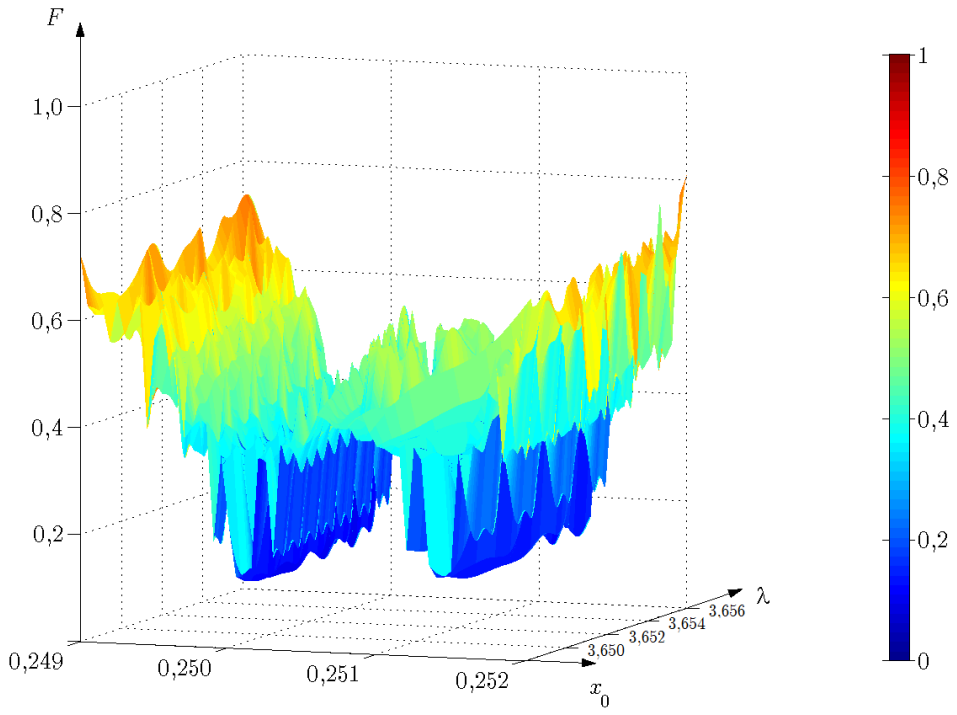


Рис. 2. Целевая функция в окрестности глобального минимума.

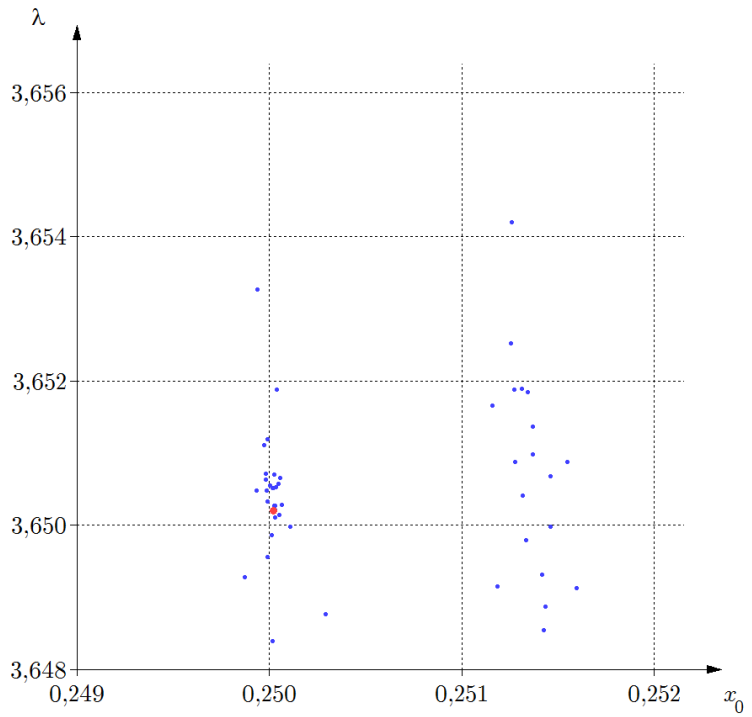


Рис. 3. Наилучшие положения частиц в методе роя частиц (красной точкой обозначено найденное решение задачи минимизации целевой функции).

Литература

1. Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Основы теории сложных систем. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. 620 с.
2. Аникин В. М., Голубенцев А. Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М.: Физматлит, 2007. 328 с.
3. Ширяев В. И. Финансовые рынки. Нейронные сети, хаос и нелинейная динамика. М.: Либроком, 2009. 232 с.
4. Елсаков С. М., Ширяев В. И. О многоэкстремальности в задачах оценивания состояния систем детерминированного хаоса // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2009. № 3. С. 37-41.
5. Шелудько А. С. Гарантированное оценивание параметров дискретных моделей хаотических процессов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Вычислительная математика и информатика». 2018. Т. 7, № 1. С. 25-39.
6. Безручко Б.П., Смирнов Д.А. Современные проблемы моделирования по временным рядам // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2006. Т. 6, № 1–2. С. 3-27.
7. Смирнов Д. А., Власкин В. С., Пономаренко В.И. Метод оценки параметров одномерных отображений по хаотическим временным рядам // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, № 3. С. 18-26.
8. Jafari S., Sprott J.C., Pham V.-T., Golpayegani S., Jafari A. A New Cost Function for Parameter Estimation of Chaotic Systems Using Return Maps as Fingerprints. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. Vol. 24, № 10.
9. He Q., Wang L., Liu B. Parameter estimation for chaotic systems by particle swarm optimization. Chaos, Solitons & Fractals. 2007. Vol. 32, № 2. P. 654-661.
10. Карпенко А. П., Селиверстов Е. Ю. Глобальная оптимизация методом роя частиц. Обзор // Информационные технологии. 2010. № 2. С. 25-34.

MSC2020 90C26

Some features of the cost function in the parameter estimation problem for the logistic map

N. G. Nikolaeva, A. S. Sheludko

South Ural State University

УДК 517.977.1

О стабилизации линейных управляемых динамических систем относительно части переменных

Никонов В. И.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Рассматривается линейная стационарная управляемая динамическая система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + Bz(t) + Pu(t), \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = Cy(t) + Dz(t) + Qu(t). \end{cases} \tag{1}$$

где $y \in R^m, z \in R^p, u \in R^r, A, B, C, D, P, Q$–постоянные матрицы соответствующих размеров.

Требуется найти управление вида $u = u_1 + u^*$, где u_1– управление, решающее задачу декомпозиции системы (1) с целью исключения некоторых компонент вектора z, а $u^* = K_1 y + K_2 z$– управление, решающее задачу стабилизации выделенной подсистемы.

При определенных дополнительных условиях на систему (1), решение поставленной задачи было получено в работах [1]- [2].

Предложен геометрический подход к решению данной задачи. Изучены вопросы существования такого решения. Использование результатов работы [3], позволяет решить задачу стабилизации линейных интервальных динамических систем.

Исходная задача переводится на алгебро-геометрический язык, позволяющий получить конструктивное решение поставленной задачи. Полученный результат интерпретируется в терминах существования инвариантных подпространств некоторого линейного оператора.

Литература

1. Воротников В. И. О полной управляемости и стабилизации движения относительно части переменных // Автоматика и телемеханика. 1982. № 3. С. 15-21.

2. Воротников В. И. Об управляемости и стабилизации движения относительно части переменных // ПММ. 1982. Т. 46. С. 914-923.

3. Никонов В. И., Щенников В. Н. Устойчивоподобные свойства решений линейных интервальных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1999. № 12. С. 49-57.

MSC2020 93C05

On a partial stabilization of linear control systems

Nikonov V. I.

National Research Mordovia State University

УДК 519.63

Исследование многокомпонентных потоков газа с химическими реакциями под воздействием различных источников энергии *

Пескова Е. Е.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Математическое моделирование многокомпонентных реагирующих газовых течений является нетривиальной задачей, поскольку данные течения характеризуются большим количеством одновременно протекающих процессов. Динамика таких течений описывается уравнениями Навье-Стокса, которые включают в себя учет вязкости, диффузии, теплопроводности, химических реакций, влияния различных источников энергии.

В настоящем докладе описывается вычислительный алгоритм, построенный для исследования дозвуковых реагирующих потоков. Он основан на расщеплении исходных уравнений по физическим процессам. Сначала решается система уравнений химической кинетики. Затем интегрируются уравнения законов сохранения массы, импульса и энергии с использованием начального поля давления, в результате чего находятся газодинамические величины и концентрации веществ. Далее рассчитывается поле поправок к давлению из решения уравнения Пуассона и корректируются поле давления и поле скорости [1, 2].

Приводятся результаты исследования процесса пиролиза этана в плоской трубе с подводом энергии посредством внешнего обогрева стенок. В расчетах задаются различные температуры и скорости стенок. Так же приводятся расчеты для процесса пиролиза этана в плоской трубе в режиме смешанной подачи энергии посредством внешнего обогрева стенок и лазерного излучения. Полученные распределения компонент смеси и газодинамических параметров соответствуют основным физико-химическим законам, наблюдаемым в процессах пиролиза этана.

На основе проведенного исследования сделан вывод, что разработанный вычислительный алгоритм подтвердил свою адекватность и может быть использован для моделирования реальных процессов газохимии [3].

Литература

1. Борисов В. Е., Якуш С. Е. Применение адаптивных иерархических сеток для расчета течений реагирующих газов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2015. Т. 16. Вып. 2. URL: http://chemphys.edu.ru/issues/2015-16-2/articles/544/

2. Жалнин Р. В., Пескова Е. Е., Стадниченко О. А., Тишкин В. Ф. Моделирование течения многокомпонентного реагирующего газа с использованием алгоритмов высокого порядка точности //Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2017. Т. 27, № 4. С. 608-617.

3. Stadnichenko O. A., Snytnikov V. N., Snytnikov Vl. N., Masyuk N. S. Mathematical modeling of ethane pyrolysis in a flow reactor with allowance for laser radiation effects. Chemical Engineering Research and Design. 2016. vol. 109. pp. 405-413.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-41-130001

MSC2020 35Q30, 76N15

Study of multicomponent gas flows with chemical reactions under the influence of different energy sources

E. E. Peskova
National Research Mordovia State University

УДК 519.863

Оценка общей эффективности оборудования для производства фармацевтической продукции

Поверинов А. И.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

В данной статье рассматривается расчет показателя общей эффективности оборудования (OEE – Overall Equipment Effectiveness), который является главным стандартом для измерения производительности производства фармацевтической продукции [1].

Общая эффективность оборудования (OEE) – это термин, используемый для оценки того, насколько эффективно используется процесс производства. Другими словами, общая эффективность оборудования помогает заметить проблему в ваших операциях, определить, какой процент производственного времени действительно продуктивен, и исправить выявленные проблемы, предоставив стандартизированный показатель для отслеживания прогресса. Цель измерения OEE является постоянное совершенствование процесса выпуска фармацевтической продукции [2], [3].

Показатель OEE базируется на трех элементах: Доступность – измеряется продуктивное время (потеря на остановки). Производительность – показывает производительность оборудования во время работы (потеря скорости). Качество – учитывает потери в качестве.

С помощью этих трех элементов можно улучшить результаты в производстве или производственных процессах при выпуске лекарственных средств.

Для вычисления OEE используется следующая формула:

$$OOE = A * P * Q.$$

Здесь: OOE -– показатель общей эффективности оборудования; A – доступность; P – производительность; Q - качество. Показатель OOE измеряется в процентах. После вычисления OOE можно сделать вывод о состоянии производства лекарственных препаратов и дать рекомендацию по его улучшению.

Для этого используется следующая классификация:

1. $OOE > 95\%$ – высокая конкурентоспособность.
2. $85\% < OEE < 95\%$ – хорошая конкурентоспособность.
3. $75\% < OEE < 85\%$ – конкурентоспособность ниже среднего.
4. $65\% < OEE < 75\%$ – низкая конкурентоспособность.
5. $OEE < 65\%$ – очень низкая конкурентоспособность.

Литература

1. Немирский Г. Г. Методологические аспекты концепции общей эффективности оборудования // Исследования и разработки в области машиностроения, энергетики и управления. Материалы XV Международной научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Министерство образования Республики Беларусь; Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого». 2015. С. 307-309.

2. Тернавский А.И. Концепция общей эффективности оборудования как основополагающий фактор снижения себестоимости продукции посредством

устранения потерь // Социально-экономические науки и гуманитарные исследования. Сборник материалов XIX Международной научно-практической конференции. 2017. С. 46-50.

3. Мамедова Т. Ф., Ляпина А. А. Алгоритм исследования моделей нелинейной динамики // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2013. No. 3 (27). С. 48–57.

MSC2020 62P10

Evaluation of the overall efficiency of equipment for the production of pharmaceutical products

A. I. Poverinov

National Research Mordovia State University

УДК 519.624

Итеративный метод второго порядка с постоянными коэффициентами для монотонных уравнений в гильбертовом пространстве

Рязанцева И. П.

Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева

Исследована сходимость неявного итеративного метода второго порядка с постоянными коэффициентами для нелинейных монотонных уравнений в вещественном гильбертовом пространстве H.

Пусть (u, v) – скалярное произведение элементов u и v из H, $A : H \to H$ – нелинейный оператор, обладающий свойствами:
а) A – сильно монотонный оператор, т.е. справедливо неравенство

$$(Au - Av, u - v) \geq M\|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in H, \;\; M > 0; \tag{1}$$

б) A удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$\|Au - Av\| \leq L\|u - v\| \quad \forall u, v \in H, \;\; L > 0. \tag{2}$$

Рассмотрим в H уравнение

$$Ax = f, \quad f \in H. \tag{3}$$

В наших предположениях оно имеет единственное решение x в H (см., например, [1], [2]).

Построим в H итеративный процесс второго порядка следующего вида

$$\frac{1}{\tau}\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{\tau}\right) + \lambda\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} + \mu[Ay_n - f] = 0, \quad n = 1, 2, \; \dots, \tag{4}$$

где элементы y_{-1}, y_0 из H задаются, τ, λ и μ – некоторые положительные постоянные. Методы вида (4) рассматривались ранее в предположении, что $\lambda = \lambda_n$, $\tau = \tau_n$, где $\{\lambda_n\}$ и $\{\tau_n\}$ – бесконечно малые последовательности (см., например, [3], регуляризованный вариант в [4]).
Уравнение (4) перепишем в следующем виде

$$\mu\tau Ay_n + \left(\frac{1}{\tau} + \lambda\right) y_n = \mu\tau f + \frac{2y_{n-1} - y_{n-2}}{\tau} + \lambda y_{n-1}. \tag{5}$$

Таким образом, для нахождения элемента y_n при любом $n \geq 1$ имеем уравнение с сильно монотонным непрерывным оператором. Следовательно (см., например, [1], [2]), элемент y_n определяется из (4) однозначно при всех $n \geq 1$.

Построим оценки сверху для решений разностных числовых неравенств первого и второго порядка.
Всюду далее $\{\omega_k\}$ и $\{b_k\}$ – последовательности неотрицательных чисел, τ – положительное число.

Справедливо утверждение (см. [5]).

Лемма 1. *Пусть члены последовательности* $\{\omega_k\}$ *удовлетворяют разностному неравенству первого порядка вида*

$$\frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{\tau} - d\omega_k \le b_k, \qquad d < 0, \quad b_k \ge 0,$$

где элемент $\omega_0 \ge 0$ *задаётся, тогда*

$$\omega_k \le \omega_0 \exp(-ck) + \tau \sum_{i=1}^{k} b_i \exp(c(i-k)), \quad k \ge 1, \qquad c = \frac{d\tau}{d\tau - 1}. \tag{6}$$

Пусть теперь члены последовательности $\{\omega_n\}$ удовлетворяют разностному неравенству второго порядка следующего вида

$$\frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{\tau}(1 + p\tau) - \frac{\omega_{k-1} - \omega_{k-2}}{\tau} + \tau\omega_k \le b_k\tau, \quad k \ge 1, \tag{7}$$

где $\tau_0 > 0$, и неотрицательные значения ω_0 и ω_{-1} задаются, p и q – некоторые действительные числа.

Лемма 2. *Пусть* p *и* q *в (7) таковы, что уравнение* $s^2 + ps + q = 0$ *имеет различные отрицательные корни* d_1 *и* d_2. *Тогда имеет место оценка*

$$\omega_k \le \omega_0 \exp(-h_2 k) +$$

$$+\tau \sum_{i=1}^{k} \left[|u_0| \exp(-h_1 i) + \tau \sum_{j=1}^{i} b_j \exp(h_1(j-i)) \right] \exp(h_2(i-k)),$$

где

$$h_j = \frac{d_j \tau}{d_j \tau - 1}, \quad j = 1, 2.$$

Таким образом, для неотрицательных решений разностного числового неравенства второго порядка установлена оценка сверху. Эта оценка используется при доказательстве сходимости изучаемого итеративного метода (4). Достаточные условия сходимости предложенного метода включают некоторые соотношения, связывающие параметры, определяющие свойства (1) и (2) оператора решаемого уравнения, и коэффициенты разностного уравнения второго порядка, определяющего изучаемый метод, и имеют вид

$$q > 0, \quad p^2 - 4q > 0,$$

где

$$p = \lambda + 3\lambda_1 \mu L \alpha_1 \tau^2, \quad q = 2M\mu\tau - 4\lambda_1 \mu L \alpha_1 \tau^2, \quad \alpha_1 > 1, \quad \lambda_1 = \frac{1}{1 - \exp(-\tilde{\mu}_1)},$$

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1 \tau + 1}, \quad \mu_1 = 2\lambda - \mu L.$$

Параметрическое обеспечение предложенного метода подтверждено примером. Предложенный метод второго порядка с постоянными коэффициентами имеет лучшую оценку сверху скорости сходимости по сравнению с тем же методом с переменными коэффициентами, который изучался ранее [3, 4].

Литература

1. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 416 с.
2. Alber Ya., Ryazantseva I. Nonlinear ill-posed problems of monotone type. Dordrecht: Springer, 2006. 410 p.
3. Рязанцева И.П. Итеративные процессы второго порядка для монотонных включений в гильбертовом пространстве // Изв. вузов. Математика. 2013. № 7. С. 52-61.
4. Рязанцева И.П. Метод второго порядка для аккретивных включений в банаховом пространстве //Дифференц. уравнения. 2014. Т.50, № 9. С. 1264-1275.
5. Апарцин А.С. К построению сходящихся итерационных процессов в гильбертовом пространстве// Труды по прикладной математике и кибернетике. Иркутск: Иркутский университет, 1972. С. 7-14.

MSC2020 65J15

Continuous method of second order with constant coefficients for monotone equations in Hilbert space

I. P. Ryazantseva

Nizhny Novgorod State Tehnical University after R. E. Alekseev

УДК 004.023

Применение эволюционно-генетического алгоритма к задаче одномерного раскроя

Старостин Н. В., Быкова М. А., Скулкина Н. С.
ННГУ им. Н. И. Лобачевского

В работе рассматривается проблема планирования независимых процессов. Планирование независимых процессов заключается в сбалансированном распределении задач по вычислителям. Предполагается, что все задачи заданы изначально и изменению не подлежат. Требуется распределить данные задачи по вычислителям с целью минимизировать количество задействованных вычислителей, чтобы уменьшить стоимость пользования вычислителями. Задачу планирования и запуска независимых параллельных процессов можно записать в терминах классической задачи одномерного раскроя. Тогда, вычислители — это прутья, производительность процессора – это длина прута, задачи — это заготовки, а сложность задачи – длина заготовки. Тогда требуется распределить данные заготовки по прутьям с целью минимизировать количество задействованных прутьев.

1. Математическая постановка задачи

1.1. Исходные параметры

- L – длина прутьев, $L \in N$;
- n – количество заготовок, $n \in N$;
- l_i – длина заготовки под номером i , $l_i \leq L, l_i \in N, i. = \overline{1,n}$

1.2. Варьируемые параметры

- y – количество использованных прутьев, $y \in N$;
- x_i – номер прута, из которого будет изготовлена i-тая заготовка, $i = \overline{1,n}$.

1.3. Ограничения математической модели

- y – количество использованных прутьев, $y \in N$;
- x_i – номер прута, из которого будет изготовлена i-тая заготовка, $i = \overline{1,n}$.

1.4. Ограничения математической модели

- $x_i \in \{1, 2, \ldots, y\}, i = \overline{1,n}$;
- $\sum\limits_{i:x_i=j} l_i \leq L, j = \overline{1,y}$.

1.5. Критерий оптимальности

$$y \to min$$

Задача одномерного раскроя относится к классу NP-трудных задач [1], т.к. к ней сводится за полиномиальное время NP-полная задача о разбиении.

2. Эволюционно-генетический алгоритм

В ходе работы был реализован эволюционно-генетический алгоритм.

Способ кодирования: $Y = (y_1 y_2, \ldots, y_n)$, где Y - перестановка из номеров заготовок, объединённая в порядке вырезания их из прутьев, где сначала вырезаются все заготовки из одного прута.

В работе изучены и реализованы методы формирования начальной популяции: случайный метод и жадный алгоритм; случайный метод выбора родительской пары, положительное ассоциативное скрещивание и отрицательное ассоциативное скрещивание; порядковый оператор кроссовера; точечный оператор мутации; стратегия перекрывающихся поколений и элитарная стратегия; операторы селекции: бета-турнир и рулетка. ЭГА прекращает работу, если средняя приспособленность не меняется 4 поколения подряд.

Общая сложность эволюционно-генетического алгоритма со случайным формированием начальной популяции: $(n2 * m) + (m2)$. Общая сложность алгоритма с формированием начальной популяции жадным алгоритмом: $(n3 * m) + (m2)$. Варьирование других параметров эволюционно-генетического алгоритма не влияет на его сложность.

3. Программная система

Была реализована система, позволяющая задавать исходные данные задачи; настраивать параметры генетического алгоритма; получать точное решение с помощью полного перебора для задач размерности n <10; решать задачи большой размерности с помощью ЭГА.

4. Вычислительные эксперименты

Было реализовано два вычислительных эксперимента. В начале сравнивалась работа ЭГА с различными параметрами. Предполагалось, что параметры друг на друга не влияют. Фиксировались параметры ЭГА:

- способ генерации начального поколения – случайный,
- выбор родительской пары – случайный,
- селекция с помощью бета-турнира.

Варьировался только один параметр. Результаты эксперимента приведены в таблице 1. Из таблицы 1 видно, что средние результаты ЭГА с генерированием начальной популяции с помощью жадного алгоритма значительно лучше, чем со случайной генерацией. ЭГА с различным выбором родительской пары и селекцией не сильно отличаются по результатам.

Для дальнейшей работы применялся ЭГА со следующими параметрами:

- генерирование начальной популяции с помощью жадного алгоритма,
- случайный выбор родительской пары,
- селекция бета-турниром.

Таблица 1. Результаты первого эксперимента

Номер эксперимента	Размер задачи (кол-во заготовок)	Оптимум полным перебором	Время работы полного перебора (мин)	Рекорд из 10 запусков ЭГА (среднее значение результатов по запускам)		
				Генерация начального поколения		
				Случайная	Жадным алгоритмом	
1	n=9	5	02:07	5 (5,2)	5 (5)	
2	n=9	4	02:06	4 (4,3)	4 (4)	
3	n=15	-	>1ч	8 (8,8)	8 (8)	
4	n=15	-	>1ч	7 (7,9)	7 (7)	
				Выбор родительской пары		
				Случайный	Положительное ассоциативное скрещивание	Отрицательное ассоциативное скрещивание
1	n=9	5	02:07	5 (5,2)	5 (5,1)	5 (5,2)
2	n=9	4	02:06	4 (4,3)	4 (4,3)	4 (4,4)
3	n=15	-	>1ч	8 (8,8)	9 (9)	8 (8,9)
4	n=15	-	>1ч	7 (7,9)	8 (8)	8 (8)
				Селекция		
				Бета-турнир	Рулетка	
1	n=9	5	02:07	5 (5,2)	5 (5,1)	
2	n=9	4	02:06	4 (4,3)	4 (4,5)	
3	n=15	-	>1ч	8 (8,8)	8 (8,9)	
4	n=15	-	>1ч	7 (7,9)	8 (8)	

Во втором вычислительном эксперименте сравнивалось время работы ЭГА с задачами различной размерности. Каждый эксперимент запускался 10 раз. Учитывалось среднее количество поколений среди всех запусков, приспособленность лучшей особи среди всех запусков и средняя приспособленность лучших особей. Результаты экспериментов показывают, что время работы ЭГА крайне мало, если сравнивать его со временем работы полного перебора даже для задач малой размерности. Также, время работы ЭГА возрастает с увеличением размерности задачи. Исходя из средних значений приспособленности среди всех запусков можно сказать, что ЭГА всегда находит один и тот же или близкий результат.

Литература

1. Кнут Д. Э. Искусство программирования. 2004.
2. Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства 1939.
3. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи М.: Мир, 1982.
4. Gilmore P. C., Gomory R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem (Part I). Oper. Res. 9. 1961. pp. 849-859.
5. Gilmore P. C., Gomory R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem (Part II). Operations Research 11. 1963. pp. 863-887.
6. Афраймович Л. Г. Учебно-методическая разработка «Информационные технологии в области принятия решений. Часть 1». – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2016.
7. Валеева А. Ф. Конструктивные методы решения задач ортогональной упаковки и раскроя. Уфа. 2006.
8. Батищев Д. И., Неймарк Е.А., Старостин Н.В. Применение генетических алгоритмов к решению задач дискретной оптимизации. 2007.

MSC2020 68W50

Application of the evolutionary genetic algorithm to the one-dimensional cutting-stock problem

N. V. Starostin, M. A. Bykova, N. S. Skulkina
Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod

УДК 519.63

Исследование динамики эллипсоида вращения в однородном потоке вязкой жидкости в пакете Fluent

Сыромясов А. О., Гришаева О. В.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

В рамках работы проводится исследование обтекания неподвижного твердого эллипсоида вращения однородным потоком несжимаемой вязкой жидкостью. В зависимости от ориентации эллипсоида относительно потока вычисляется сила сопротивления, действующая на твердое тело, и подъемная сила. Вычисления проводятся в системе ANSYS Fluent.

Перед тем, как решать данную задачу, нужно разобрать более простую проблему обтекания неподвижного шара однородным потоком безграничной вязкой жидкости. Эта проблема включает в себя определение силы сопротивления, действующей на шар, и расчетной области, в которой решение, предоставляемое программой ANSYS, дает небольшую относительную погрешность по сравнению с формулой Стокса.

Жидкость будем считать несжимаемой, а течение – медленным, так что число Рейнольдса мало:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U l}{\eta} \ll 1. \tag{1}$$

Здесь U — характерная скорость течения, l — характерный размер обтекаемого тела, ρ и η – плотность и вязкость жидкости. Здесь и далее под U будем понимать неискаженную скорость потока, набегающего на тело.

Предположение (1) дает возможность использовать приближение Стокса для моделирования течения и, в конечном итоге, найти силу сопротивления, действующую на шар со стороны жидкости [1]:

$$F = 6\pi R\eta U. \tag{2}$$

В этой формуле R – радиус шара; соответственно, в (1) считается $l = R$.

Известно также уточнение формулы Стокса (2), справедливое при малых, но конечных числах Рейнольдса:

$$F_{prec} = 6\pi R\eta U \left(1 + \frac{3}{8}\mathrm{Re} - \frac{9}{40}\mathrm{Re}^2 \ln(\frac{1}{\mathrm{Re}})\right). \tag{3}$$

Рассмотрев аналитическое решение задачи, перейдем к численному моделированию с помощью системы ANSYS Fluent. В связи с тем, что решатель этого пакета основан на методе конечных объемов, полностью избавиться от инерционных эффектов при моделировании течения затруднительно. Однако, подобрав соответствующие параметры жидкости, можно сделать инерционные эффекты малыми по сравнению с вязкими. Для этого опишем жидкость с плотностью $\rho = 0.1$ кг/м^3 и вязкостью $\eta = 10$ кг/м·с. Кроме того, будем считать, что $R = 1$ м, а U принимает значения 0.01, 0.1 и 0.8 м/с. Тогда из (1) следует, что $\mathrm{Re} \leq 0.08$, а значит, для расчета силы, действующей на шар, можно использовать формулы (2) и (3).

Разрабатывая модель течения во Fluent, нужно помнить, что приближение Стокса, из которого выводится (2), неприменимо на больших расстояниях от обтекаемого тела. Размеры r_0 области, для которых указанное приближение корректно, должны удовлетворять следующему условию [1]:

$$r_0 \ll \frac{\nu}{U}, \tag{4}$$

где $\nu = \eta/\rho$ — кинематическая вязкость жидкости.

Проведя расчеты, мы видим, что $r_0 = 10$ м удовлетворяет условию (4).

Создадим расчетную область в виде цилиндра радиуса r_0 и высоты $2r_0$; обтекаемое тело расположим в его центре. Тогда, с одной стороны, приближение Стокса внутри цилиндра будет все еще справедливым; с другой стороны, границы цилиндра не будут оказывать существенного влияния на течение вблизи частицы, поскольку $R \ll r_0$.

После построения геометрии следует указать граничные условия [2]. Для этого поверхность полученного тела разбивается на несколько областей: образующие цилиндра, частица, входное и выходное отверстие. Частица считается неподвижной (тип граничного условия – неподвижная стенка или "Stationary Wall" в терминологии ANSYS Fluent). Основания цилиндра считаются источником и стоком скорости, соответственно ("Velocity Inlet" и "Velocity Outlet"); скорость течения U направлена по нормали к этим поверхностям.

Наибольший интерес представляет условие для стенок сосуда: нам удалось установить, что для описания однородного потока следует выбрать тип условия "Moving Wall" (подвижная стенка) и указать скорость движения вдоль по образующим цилиндра, равную U. Если же считать боковые стенки трубы неподвижными, то вместо однородного потока будет смоделирован параболический поток, аналогичный решению задачи Пуазейля [1].

Сравним действующую на частицу силу сопротивления, найденную аналитически по формулам (2) (3), и рассчитанную численно (назовем ее F_{ANSYS}). Результаты сравнения занесем в табл. 1.

Таблица 1. Сравнение результатов, полученных численно и аналитически.

Re	U, м/с	F, Н	F_{prec}, Н	F_{ANSYS}, Н	δ_1	δ_2
0.0001	0.01	1.8849	1.885	1.885	0.005%	0%
0.01	0.1	18.849	18.856	18.854	0.03%	0.01%
0.008	0.8	150.796	151.238	151.183	0.2%	0.03%

Здесь $\delta_1 = |F - F_{ANSYS}|/F_{ANSYS} \cdot 100\%$ и $\delta_2 = |F_{prec} - F_{ANSYS}|/F_{ANSYS} \cdot 100\%$ суть относительные погрешности F_{ANSYS} по сравнению с F и F_{prec}, соответственно.

Как видно, δ_1 и δ_2 очень малы. Отсюда можно сделать вывод, что ANSYS Fluent позволяет моделировать и безынерционные течения с достаточно хорошей точностью, если правильно подобрать размер расчетной области. Как и следовало ожидать, $\delta_2 < \delta_1$, т.е. поток сильно вязкой жидкости, в котором присутствуют инерционные эффекты, моделируется во Fluent более точно.

Как было ранее сказано, задача об обтекании шара является вспомогательной: она позволяет оценить значение r_0. Пользуясь полученным результатом, перейдем к решению задачи об эллипсоиде.

Будем рассматривать вытянутый и сплюснутый эллипсоиды вращения. Полуоси первого из них равны 1 м, 1 м и 0.5 м, а полуоси второго – 0.5 м, 0.5 м и 1 м. В каждом из случаев будем считать, что расчетная область имеет прежний размер, а центр эллипсоида совпадает с центром области. Рассмотрим несколько вариантов угла наклона каждого из тел вращения по отношению к оси трубы: 0°, 30°, 45°, 60° и 90°. Плотность и вязкость жидкости сохраняются такими же, что и в предыдущей задаче, а скорость течения U считается равной 0.1 м/с.

Пользуясь данными, полученными при расчетах во Fluent, построим графики зависимости силы сопротивления от площади проекции частицы на плоскость, перпендикулярную

потоку. Напомним, что сила сопротивления – это компонента силы, действующей на инородное тело со стороны потока, которая направлена вдоль этого потока.

Рис. 1 отображает искомую зависимость для вытянутого эллипсоида. Зависимость для сплюснутого эллипсоида аналогична.

Рис. 1. Сила сопротивления для вытянутого эллипсоида.

В обоих случаях мы можем наблюдать, что чем больше упомянутая площадь (которая, в свою очередь, монотонно зависит от угла наклона оси эллипсоида), тем больше сила сопротивления. Этот результат логичен: чем в большей степени тело развернуто поперек потока, тем больше оно искажает течение и тем большее сопротивление испытывает.

Далее изобразим график зависимости действующей на эллипсоиды подъемной силы от угла наклона оси к направлению течения. Как известно [3], подъемная сила перпендикулярна направлению потока и образуется из-за того, что поток, обтекающий тело, перестает быть симметричным. На рис. 2 представлен результат для вытянутого эллипсоида.

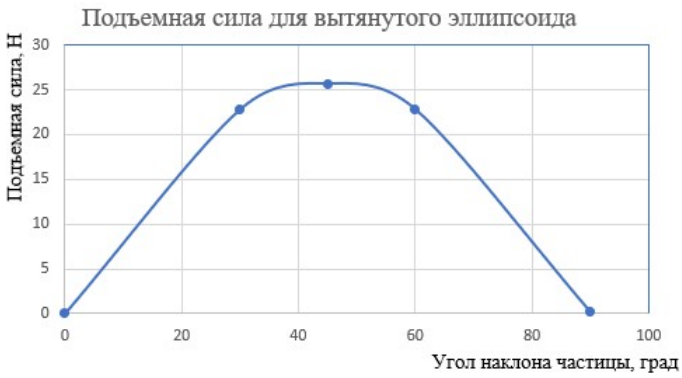


Рис. 2. Подъемная сила для вытянутого эллипсоида.

Сплюснутый эллипсоид демонстрирует схожее поведение подъемной силы: максимум при угле наклона, равном 45°, и убывание до 0 при углах 0° и 90°. Такое поведение объяснимо тем, что именно при 45° асимметрия потока наиболее выражена. Напротив, при углах 0° и 90° поток, обтекающий частицу, симметричен, поскольку ось трубы (вдоль которой и происходит течение) в указанных случаях совпадает с одной из осей симметрии эллипсоида.

В будущем моделирование можно проводить при более высоком разрешении сетки, что

поможет увеличить точность вычислений. Кроме того, необходимо будет рассмотреть более широкий набор вариантов расположения частиц относительно оси трубы.

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М. : Наука, 1986. 736 с.
2. Денисов М. А. Компьютерное проектирование. ANSYS. Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2014. 80 с.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. 7-е изд., испр. М. : Дрофа, 2003. 840 с.

MSC2020 76D07, 76M12

Modeling of dynamics of ellipsoid of revolution in a uniform viscous flow using ANSYS Fluent

A. O. Syromyasov, O. V. Grishaeva
National Research Mordovia State University

УДК 004.942

Максимизация выхода индивидуальных высокооктановых компонентов в процессе каталитической изомеризации на основе кинетической модели*

Фасхутдинова Р. И., Фасхутдинов А. Г., Губайдуллин И. М.

Институт нефтехимии и катализа – обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук

В работе рассматривается оптимизация реакторного блока процесса каталитической изомеризации пентан-гексановой фракции с использованием кинетической модели, направленной на увеличение содержания высокооктановых индивидуальных компонентов, степени превращения н-пентана и н-гексана и снижение выхода продуктов гидрокрекинга (метана, этана, пропана и бутанов) на основе Парето-аппроксимации.

Основная задача исследования заключается в подборе технологического режима, при котором увеличатся селективность суммы 2,2-диметилбутана и 2,3-диметилбутана, селективность изопентана, степени превращения н-пентана, н-гексана и уменьшится выход продуктов гидрокрекинга.

На основе литературных и промышленных данных составлена схема химических превращений и разработана кинетическая модель [1]. Основным отличием применяемого в данной работе подхода является детальное моделирование реакций гидрокрекинга компонентов реакционной смеси с образованием метана, этана, пропана, н-бутана и изобутана. Скорости реакций, входящие в кинетическую модель, были записаны согласно закону действующих масс [2]. Математическая модель процесса представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений [3,4].

После апробации нескольких явных и неявных методов численного решения систем дифференциальных уравнений подходящим в итоге методом оказался одноитерационный метод Розенброка 3-го порядка точности. Обратная задача решалась генетическим алго ритмом.

Перейдя к объекту исследования, варьируемыми параметрами при оптимизации реакторного блока процесса каталитической изомеризации пентан-гексановой фракции являются температуры на входе в реакторы.

Поставленная задача оптимизации была решена алгоритмом Nondominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA-II) [5] в ПС Matlab.

Всего было обработано более 100 значений варьируемых параметров температуры. Каждое значение соответствует отдельным температурным режимам работ реакторов.

Таким образом, на основе расчетов был подобран температурный режим реакторного блока, который позволяет увеличить селективность изопентана (по сравнению с про мышленными данными), суммы 2,2-диметилбутана и 2,3-диметилбутана, повысить степень превращения н-пентана, н-гексанана, а также снизить выход продуктов гидрокрекинга.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (Договор № 20-31-90094/20)

Литература

1. Faskhutdinov A.G., Akhmetov I.V., Musina A.E., Gubaydullin I.M. Improvement of resource efficiency of the catalytic isomerization process by mathematical modeling. CEUR-WS. 2018. Vol. 2212. pp. 377-383.

2. Logan S.R. Fundamentals of Chemical Kinetics. AddisonWesleyLongman. 1996. 280 p.

3. Коледина К. Ф., Губайдуллин И. М. // Журнал физической химии. 2016. Т. 90. №5. С.671-678.

4. Губайдуллин И. М., Коледина К. Ф., Линд Ю. Б. // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. №6. С. 10.-65

5. Nurislamova L., Gubaydullin I., Koledina K., Safin R. Reac. Kinet. Mech. Cat. 2016. vol. 117(1). pp. 1-14.

MSC2020 49K15

Maximization of the yield of individual high-octane components in the process of catalytic isomerization based on the kinetic model

R. I. Faskhutdinova, A. G. Faskhutdinov, I. M. Gubaydullin

Institute of Petrochemistry and Catalysis of Russian Academy of Sciences

УДК 665.554

Модернизация контакторного реактора процесса сернокислотного алкилирования*

Хисамова А. А., Губайдуллин И. М.

Уфимский государственный нефтяной технический университет

Технология сернокислотного алкилирования в мире известна объединением легких изопарафинов, чаще всего изобутана, с C_3 - C_4 олефинами для получения смеси изопарафинов с более высокой молекулярной массой, использующейся в качестве компонента смеси с высоким октановым числом для моторного топлива. В настоящее время большинство установок алкилирования в промышленности используют технологию производства на основе серной кислоты.

Ключевым параметром в реакции сернокислотного алкилирования является температура. Поддержание температуры в заданных значениях необходимо с целью снижения количества побочных реакций при повышенной температуре, в том числе полимеризации олефинов. Со снижением температуры избирательность процесса повышается, то есть преобладают основные реакции алкилирования, а это значит, что качество получаемого алкилата возрастает. Поэтому повышение производительности должна сопровождаться улучшением охлаждения [1].

Моделирование потоков в реакторе было произведено программой Flow Simulation. В ходе исследования предложен перфорированный диск, изображенный на рис. 1 , который позволяет повысить эффективность охлаждения смеси за счет распределения потоков.

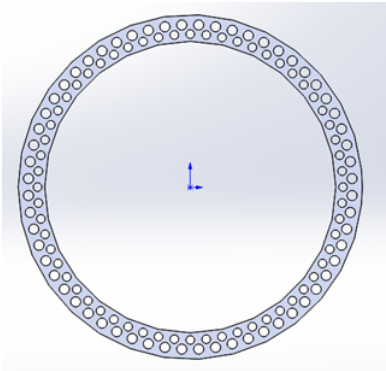


Рис. 1. Перфорированный диск.

В результате гидродинамического моделирования получены распределения скоростей потока внутри реактора до установки диска и после, которые представлены на рис. 1 . Скорость потока до установки перфорированного диска максимальна в центре трубного пучка и значительно снижается при удалении от центральной оси. На протяженном расстоянии вдоль трубного пучка наблюдается зона, в которой поток застаивается, а также зона, в которой поток течет быстро.

При моделировании потока после установки диска выявлено, что зона, в которой наблюдалась высокая скорость потока, замедлилась, в то же время происходит заметное снижение

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 18-07-00341

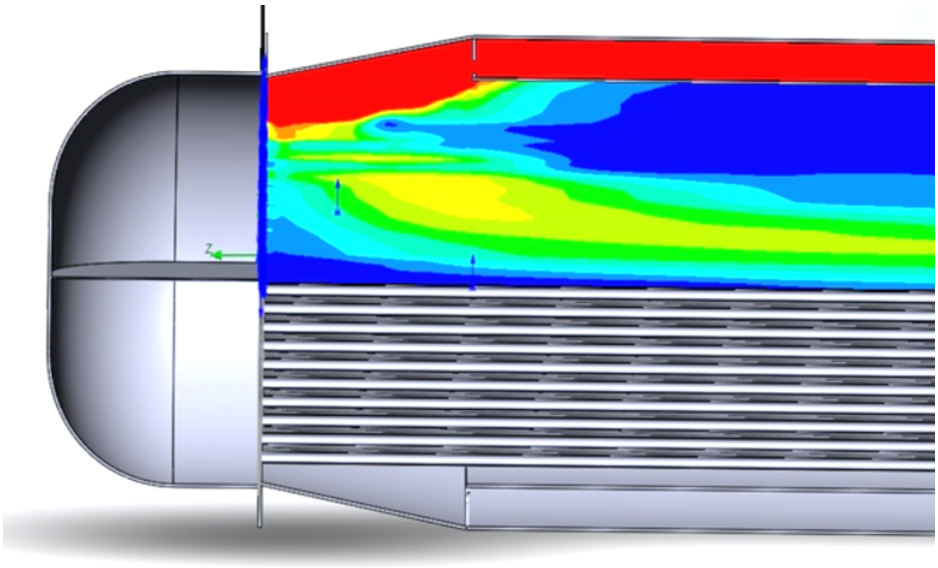


Рис. 2. Распределение скоростей на выходе из межтрубного пространства после установки диска.

зоны застоя и усреднение скорости потока вдоль трубного пучка, что в свою очередь положительно сказывается на эффективности охлаждения смеси. Это в свою очередь позволяет повысить производительность установки по бутан-бутиленовой фракции на 10 % [2].

Литература

1. Байбурский В. Л., Александрова И. А., Мортиков Е. С. Технология производства цеолитных катализаторов алкилирования изопарафиновых углеводородов. Нефтепереработка. 1984. № 8. С. 14-20.

2. STRARCO XP2 TEXNOLOGY [Электронный ресурс] – URL: https://www.digitalrefining.com/data/literature/file/236887879.pdf

MSC2020 80A30

Modernization of the contactor reactor for the sulfuric acid alkylation process

A. A. Khisamova, I. M. Gubaydullin

Ufa State Petroleum Technological University

УДК 512.644

Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений с малым параметром методом Ляпунова-Шмидта в регулярном случае

Шаманаев П. А., Прохоров С. А.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

В работе рассматривается задача о нахождении решений линейного уравнения с возмущением в виде малого линейного слагаемого вида [1], [2]

$$Bx = h + \varepsilon Ax, \tag{1}$$

где $x, h \in R^m$, B и A – $(m \times m)$-постоянные матрицы, ε – малый вещественный параметр.

Предполагается, что для любого достаточно малого ε существует матрица, обратная к матрице $B - \varepsilon A$ (регулярный случай). В этом случае согласно [2] существует полный A- жорданов набор матрицы B и система (1) при достаточно малом ε имеет единственное решение.

Отличительная особенность реализации метода Ляпунова-Шмидта в настоящей работе от изложения, содержащегося в работе [2], заключается в использовании обобщенного жорданова набора сопряженной матрицы B^*.

Алгоритм по реализации метода Ляпунова-Шмидта для решения системы (1):

1. Определить входные данные:
   B, A – постоянные $(m \times m)$-матрицы;
   B^*, A^* – сопряжённые матрицы к B и A, соответственно;
   h – постоянный m-ый вектор;
   ε – малое вещественное число.

2. Найти базис пространства $N(B) = span\left\{\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(1)}\right\}$ как решения уравнения $Bx = 0$.

3. Найти базис пространства $N(B^*) = span\left\{\psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)}, \ldots, \psi_n^{(1)}\right\}$ как решения уравнения $B^*y = 0$.

4. Построить A-жорданов набор матрицы B:
   4.1 Для k от 1 до n выполнить цикл
   4.2 $j = 1$;
   4.3 $z_k^{(j)} = A\varphi_k^{(j)}$;
   4.4 Если $(z_k^{(j)}, \psi_s^{(1)}) = 0$ для всех $s = \overline{1, n}$
   то найти $\varphi_k^{(j+1)}$ из уравнения
   $B\varphi_k^{(j+1)} = z_k^{(j)}$;
   $j = j + 1$;
   Переход к пункту 4.3;
   иначе
   $p_k = j$;
   КонецЕсли;
   4.5 Конец цикла по k.

5. Проверить условие полноты A-жорданова набора матрицы B:

5.1 Вычислить элементы матрицы D по формулам

$$d_{ks} = (z_k^{(p_k)}, \psi_s^{(1)}), \quad k, s = \overline{1, n},$$

где $z_k^{(p_k)} = A\varphi_k^{(p_k)}$.

5.2 Если определитель матрицы D равен нулю, то пополнить A-жорданов набор матрицы B до полного [3], [4]. После построения полного A-жорданова набора определитель матрицы D должен быть отличен от нуля.

6. Построить базис $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ биортогональный к $z_1^{(p_1)}, z_2^{(p_1)}, \ldots, z_n^{(p_1)}$:

6.1 Если $d_{ks} = \delta_{ks}$, где δ_{ks} – символ Кронекера, то базисы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ и $z_1^{(p_1)}, z_2^{(p_2)}, \ldots, z_n^{(p_n)}$ являются биортогональными и переходим к пункту 7.

6.2 Найти обратную матрицу D^{-1}.

6.3 Построить новый базис $\hat{\psi}_1$, $\hat{\psi}_2$, ..., $\hat{\psi}_n$ по формулам

$$\hat{\psi}_s = \sum_{k=1}^{n} \hat{d}_{ks}\psi_k, \quad s = \overline{1, n},$$

где $\hat{d}_{ks}$ - элементы обратной матрицы D^{-1}.

6.4. В качестве базиса $\psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)}, \ldots, \psi_n^{(1)}$ взять $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \ldots, \hat{\psi}_n$.

7. Построить A^*-жорданов набор матрицы B^*:

7.1 Для s от 1 до n выполнить цикл

7.2 l = 1;

7.3 $\gamma_s^{(l)} = A^*\psi_s^{(l)}$;

7.4 Если $(\varphi_k^{(1)}, \gamma_s^{(l)}) = 0$ для всех $k = \overline{1, n}$,

то найти $\psi_s^{(l+1)}$ из уравнения

$B^*\psi_s^{(l+1)} = \gamma_s^{(l)}$;

$l = l + 1$;

Переход к 7.3;

КонецЕсли;

7.5 Конец цикла по s.

8. Проверить условия биортогональности базисов $\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(1)}$ и $\gamma_1^{(p_1)}, \gamma_2^{(p_2)}, \ldots, \gamma_n^{(p_n)}$

$$(\varphi_k^{(1)}, \gamma_s^{(p_s)}) = \delta_{ks}, \quad k, s = \overline{1, n}.$$

где $\gamma_s^{(p_s)} = A^*\psi_s^{(p_s)}$.

9. Найти коэффициенты c_{sl} по формулам

$$c_{sl} = (h, \psi_s^{(l)}),$$
$$l = \overline{2, p_s}, \quad s = \overline{1, n}.$$

10. Найти величины ξ_k по формулам

$$\xi_k = -\frac{1}{\varepsilon^{p_k}} \sum_{j=2}^{p_k} c_{kj}\varepsilon^{j-1}, \quad k = \overline{1, n}.$$

11. Найти дополнительное слагаемое $y(\varepsilon)$, принадлежащее к дополнению корневого пространства до R^m, как решение уравнения

$$[B - \varepsilon A + \sum_{k=1}^{n} S_k]y = h;$$

где $S_k = z_k^{(p_k)} \cdot \bar{\gamma}_k^{(p_k)}$ - $(m \times m)$-матрицы, $k = \overline{1, n}$.

12. Построить решение системы (1) в виде

$$x(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \varepsilon^{p_k}} \xi_k \sum_{j=1}^{p_k} \varepsilon^{j-1} \varphi_k^{(j)} + y(\varepsilon).$$

Алгоритм по методу Ляпунова-Шмидта был реализован в математическом пакете Maple. Нахождение нулей матриц B, B^*, и присоединенных элементов обобщенных жордановых наборов, организовано в виде библиотек.

Литература

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. УМН. 1960. Т. 15, 3(93). С. 3—80.

2. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука. 1964. 524 с.

3. Логинов Б. В., Русак Ю. Б. Обобщённая жорданова структура аналитической оператор-функции и её роль в теории ветвления. Известия АН УзССР. Ташкент. 1977. 82 с.

4. Логинов Б. В., Русак Ю. Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления, "Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными сб. н. работ, ред. М. С. Салахитдинов, Изд-во "Фан"АН Узб.ССР, Ташкент. 1978. С. 133-148.

MSC2020 15A06

Algorithm for solving systems of linear algebraic equations with a small parameter by the Lyapunov-Schmidt method in the regular case

P. A. Shamanaev, S. A. Prokhorov

National Research Mordovia State University

УДК 517.9

К вопросу о частичной устойчивости нулевого решения нелинейных систем по линейному приближению

Шаманаев П. А., Язовцева О. С.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

В работе рассматривается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t,x), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, A – постоянная $(n \times n)$-матрица, $f \in C^{(0,1)}([T,+\infty) \times R^n, R^n)$, $f(t,0) \equiv 0$,

$$|f_j(t,x_1,...,x_n)| \le \psi_j(t,|x_1|,...,|x_n|), \quad \forall\ x \in D,\ j = \overline{1,n},$$

здесь $\psi_j \in C([T,+\infty) \times U_+, [0,+\infty))$, $U_+ = \{x :\ x \in D,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,n}\}$, $\psi_j(0,...,0) \equiv 0$, $\psi_j(t,|x_1|,...,|x_n|) \le \psi_j(t,|\tilde{x_1}|,...,|\tilde{x_n}|)$, $|x_i| \le |\tilde{x_i}|$, $x,\ \tilde{x} \in D$, $t \in [T,+\infty)$, D — некоторая область пространства R^n, содержащая окрестность нуля.

Ставится задача об исследовании покомпонентных асимптотических свойств (частичной устойчивости, асимптотической устойчивости, неустойчивости и асимптотического равновесия) нулевого решения системы (1) по линейному приближению

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{2}$$

где $y \in R^n$.

Основные результаты по теории устойчивости по отношению к части переменных (частичной устойчивости) содержатся в работах А. М. Ляпунова [1], И. Г. Малкина [2], В. В. Румянцева [3], В. В. Румянцева и А. С. Озиранера [4], В. И. Воротникова [5].

Вопросы о сохранении частичной устойчивости нулевого решения по линейному приближению изложены в работе А. С. Озиранера [6], в том числе в критическом случае - И. Г. Малкина [7], А. С. Озиранера [8], В. П. Прокопьева [9].

Для решения поставленной задачи используется подход [10]-[15], заключающийся в установлении локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности между системами (1) и (2). В этом случае, между множествами решений $x(t : t_0, x^{(0)})$ и $y(t : t_0, y^{(0)})$ соответствующих систем (1) и (2) устанавливается соответствие вида

$$x(t : t_0, x^{(0)}) = y(t : t_0, y^{(0)}) - \int\limits_t^{+\infty} Y(t-s) f(s, x(s : t_0, x^{(0)}))ds, \tag{3}$$

где $x^{(0)} \in U$, $y^{(0)} \in V$, $U, V \subseteq D$, $Y(t-t_0)$ – нормированная в нуле фундаментальная матрица системы (2). Существование соотношения вида (3) доказывается с помощью принципа Шаудера о существовании неподвижной точки.

Далее показывается, что соответствие вида (3) сохраняет покомпонентные асимптотические свойства решений в некоторой окрестности нуля при переходе от линейной системы (2) к нелинейной системе (1).

Полученные новые достаточные условия наличия покомпонентных асимптотических свойств решений системы (1), аналогичные соответствующим свойствам решений линейной системы (2), дополняют результаты работ [5], [6], [9] для случая, когда матрица линейного приближения содержит собственные значения с нулевыми вещественными частями, причем алгебраические и геометрические кратности этих собственных значений могут не совпадать.

Литература

1. Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Л.: Изд-во ЛГУ, 1963. 116 с.

2. Малкин И. Г. Об устойчивости движения в смысле Ляпунова // Мат. сб., 1949. Т. 3(61), № 1. С. 63-100.

3. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник Моск. ун-та, сер. мат., мех., астроном., физ., хим. 1957. № 4. С. 9-16.

4. Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных М.: Наука, 1987. 253 с.

5. Воротников В. И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука. 1991. 288 с.

6. Озиранер А. С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 4. С. 659–665.

7. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

8. Озиранер А. С. Об устойчивости движения в критическом случаях // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 415-421.

9. Прокопьев В.П. Об устойчивости движения относительно части переменных в критическом случае одного нулевого корня // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 422-426.

10. Воскресенский Е. В. Методы сравнения в нелинейном анализе. Саранск: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. 224 с.

11. Воскресенский Е. В. Асимптотические методы: теория и приложения. Саранск: СВМО, 2000. 300 с.

12. Язовцева О. С. Локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность и ее применение к исследованию устойчивости по части переменных [Электронный ресурс] // Огарев-online. 2017. № 13. Режим доступа: http://journal.mrsu.ru/arts/lokalnaya-pokomponentnaya-asimptoticheskaya-ekvivalentnost-i-ee-primenenie-k-issledovaniyu-ustojchivosti-po-chasti-peremennyx.

13. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложение к устойчивости по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 19, № 1. С. 102–115.

14. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия полиустойчивости по части переменных нулевого решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, № 3. С. 304–317.

15. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Исследование устойчивости положения равновесия системы динамики биоценоза в условиях межвидового взаимодействия // Вестник Мордовского университета. 2018. Т. 28, № 3. С. 321-332.

MSC2020 34D20

On the question of partial stability of the zero solution of nonlinear systems in the linear approximation

P. A. Shamanaev, O. S. Yazovtseva

National Research Mordovia State University

УДК 519.63

Моделирование процесса оптимизации структуры производства

Якунина А. Д., Мамедова Т. Ф., Корытин С. И.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

В работе рассматривается задача построения математической модели для расчета оптимальной структуры выпуска продукции и структуры цен, поддерживающих максимальный темп роста производства.

Для решения поставленной задачи , был проведен анализ текущих показателей предприятия и получена математическую модель для оптимизации структуры производства, а именно, построена математическую модели для расчета оптимальной структуры выпуска продукции и структуры цен, поддерживающих максимальный темп роста производства [1], [2].

Рассмотрим производителя, который использует определенное количество ресурсов для производства товара q по цене p.

Задачу можно сформулировать следующим образом. Для отыскания максимального темпа роста и оптимальной структуры производства необходимо определить параметры $\lambda > 0; q; p$ такие, что бы выполнялись условия:

$$\lambda \sum_{j=1}^{m} c_i \cdot q_j - q_i \leq 0, i = \overline{1, m};$$

$$p - \lambda \sum_{j=1}^{m} c_i \cdot p_i \leq 0, i = \overline{1, m};$$

$$p(\lambda \sum_{j=1}^{m} c_i \cdot q_j - q_i) = 0, i = \overline{1, m};$$

где q –вектор оптимальных пропорций выпуска продукции, p – вектор оптимальных цен, c – цена исходных продуктов.

Смоделируем рыночную ситуацию для конкретного производства. В качестве исходных данных рассмотрим результаты мониторинга цен на апельсиновый сок марки «Добрый» и данные полученные из опроса потребителей.

В ходе анализа цен, за которые супермаркеты предлагают покупателям приобрести сок «Добрый» были получены исходные данные для решения задачи.

С помощью специально написанной программы, исходные данные были обработаны и методом детерминантов вычислены коэффициенты для функции спроса - $Q_d = a \cdot P^n$, и функции предложения - $Q_s = b \cdot P^h$.

Далее рассматривалась точка равновесия – точка пересечения функций спроса и предложения, определялась равновесная цена и равновесный объем.

В результате вычислений была получены следующие коэффициенты:

$$a = 10^{16};$$

$$n = -8,349;$$

$$b = 2 \cdot 10^{-18};$$

$$h = 10,336.$$

И соответственно были получены функции спроса и предложения вида:

$$Q_d = 10^{16} \cdot p^{-8,349},$$
$$Q_s = 2 \cdot 10^{-18} \cdot p^{10,336}.$$

Рыночное равновесие наступает, когда объем предложения равен объему спроса, то есть:

$$Q_d = Q_s.$$

Из проделанных с помощью программы расчетов, было получено что равновесный объем, а следовательно и оптимальный, будет равен 7 и равновесие наступит при значении цены равной 88 рублям.

В ходе расчетов были получены оптимальная цена и оптимальный объем за отдельно взятый период. Применяя предложенный подход к разрешению аналогичных задач [3], [4], можно получить соответствующие результаты на дальнейшие периоды и установить коэффициент темпа роста для производства и увеличения в дальнейшем прибыли предприятия.

Литература

1. Бахтизин А. Р. Вычислительная модель «Россия: Центр – Федеральные округа» // М.: ЦЭМИ РАН, 2003. 134 с.

2. Симонов П. М. Экономико-математическое моделирование. Динамические модели экономики // Пермь.: Пермский гос. Ун-т, 2009. 274 с.

3. Шабанова В.Г., Василькин Н.В., Поверинов А.И. О методике прогнозирования роста капитала предприятия // Математические методы и информационные технологии управления в науке, образовании и правоохранительной сфере / Сборник материалов Всероссийской научно-технической конференции. Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Академия ФСИН России. Рязань: Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина. 2017. С. 51-55.

4. Мамедова Т.Ф., Каледин О.Е., Шабанова В.Г., Кирейчева Е.Ю. Математическая модель оптимизации управления хозяйственной деятельностью одного производственного предприятия // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. X Междунар. науч.-техн. конф. под ред. И. В. Бойкова. Пенза : ПГУ, 2016. С. 125-130.

MSC2020 62P10

Modeling the production structure optimization process

A. D. Yakunina, T. F. Mamedova, S. I. Korytin

National Research Mordovia State University

УДК 621.43

Анализ естественного износа и совершенствование конструкции цилиндропоршневой группы двигателя внутреннего сгорания

Авдеева Е. А., Коченов В. А.

Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия

Аннотация: На базе эмпирических данных, определены закономерности износа деталей цилиндропоршневой группы. На основании естественного изменения формы трущихся поверхностей и моделей перераспределения нагрузок в процессе эксплуатационного изнашивания сопряжений, разработаны конструкторские решения повышения долговечности и износостойкости двигателей внутреннего сгорания. Новизна разработок подтверждается патентами РФ на изобретения и полезные модели.

Ключевые слова: герметичность, износостойкость, цикл, нагрузка, износ.

1. Введение

Повышение герметичности и износостойкости цилиндропоршневой группы является актуальной научной и практически значимой задачей [1]. Наибольший износ двигателей внутреннего сгорания (ДВС) происходит в верхней мертвой точке и определяется максимальным давлением газов и его производными силами и моментами (рис. 1 а).

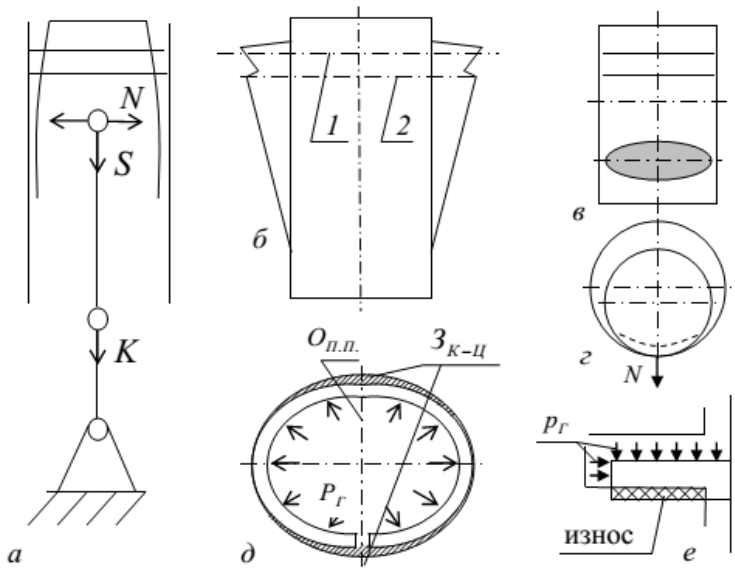


Рис. 1. Естественный износ ДВС: а – положение кривошипно-шатунного механизма в верхней мертвой точке; б – износ цилиндра; в – износ поршня; г – приращение площади контакта сопряжения поршень–цилиндр; д – образование зон повышенных зазоров в сопряжении кольцо–цилиндр; е – износ сопряжения кольцо–поршень; 1, 2 положение первого и второго компрессионного кольца.

Износ цилиндра характеризуется (рис. 1, б):
– конусообразностью с основанием конуса в верхней мертвой точке;

– овальностью, с большей осью перпендикулярной поршневому пальцу и оси двигателя (в плоскости качания шатуна);

– ступенчатостью и неравномерным износом ступеней в эксплуатации.

Основной износ цилиндра образуется в сопряжении с компрессионными кольцами. Конусность объясняется трением колец с цилиндром, зависимым от давления газов, а также разным смазыванием и температурой – неблагоприятными в верхней мертвой точке. Овальность объясняется дополнительным давлением кольца на цилиндр при изменении положения (перекладке, перекосе) поршня в цилиндре. Во вновь изготовленном сопряжении дополнительное давление пропорционально трению между кольцом и поршневой канавкой. В процессе эксплуатационного износа кольцо и канавка приобретают ступенчатую форму, что увеличивает давление на цилиндр, увеличивая овальность (Рис. 1).

2. Анализ и методы решения задачи

Естественный износ ДВС обуславливается следующими причинами:

а – положение кривошипно-шатунного механизма в верхней мертвой точке;

б – износ цилиндра;

в – износ поршня;

г – приращение площади контакта сопряжения поршень–цилиндр;

д – образование зон повышенных зазоров в сопряжении кольцо–цилиндр;

е – износ сопряжения кольцо–поршень.

Ступенчатость износа цилиндра зависит от компрессионных колец – число ступеней равно числу колец, ступени находятся в верхней мертвой точке и обусловливаются максимальным давлением газов. Переменная интенсивность износа ступеней объясняется тем, что верхнее кольцо работает в более тяжелых условиях и быстрее теряет герметичность, что приводит к перераспределению давления газов на другие кольца, увеличивая интенсивность износа их и сопрягаемых с ними деталей.

Естественный износ поршня (рис. 1, в, г) характеризуется:

– износом юбки в плоскости качания шатуна;

– нагаром и подгоранием масла на поверхностях расположенных по оси поршневого пальца – параллельно оси двигателя;

– большим износом верхней канавки под кольцо.

Износ юбки происходит по направлению действия боковой силы N. По оси поршневого пальца (где нет нормальной силы) износ отсутствует.

Нагар и подгорание масла объясняется перекосами поршня и износом цилиндра, образующими овальный контакт компрессионного кольца с цилиндром (рис. 1, д). При установке замка по оси поршневого пальца, под давлением газов кольцо разгибается, образуя зоны повышенных зазоров $З_{К\text{-}Ц}$. Герметичность пары кольцо–цилиндр нарушается, прорвавшиеся газы повышают температуру, образуя нагар на поршне. Свобода вращения колец предполагает их установку как в оптимальном – замки разведены на 180° и находятся перпендикулярно поршневому пальцу, так и в наихудшем положении – замки сведены (0°) и находятся по оси поршневого пальца.

Увеличенный износ верхней канавки объясняется близостью к камере сгорания и действием больших температур и давлений.

Износ компрессионных поршневых колец характеризуется (рис. 1, е):

– более интенсивным износом верхнего кольца;

– односторонним износом колец по высоте;

– большим износом кольца относительно канавки.

В процессе работы поршневое кольцо воспринимает давление газов, направленное большую часть времени рабочего цикла со стороны камеры сгорания. Упругость кольца и давле-

ние газов определяют изнашивающиеся поверхности. Это поверхности, составляющие пару трения с цилиндром и нижней стенкой поршневой канавки. В процессе эксплуатации на нижней стенке канавки образуется нагар, который компенсирует износ канавки и защищает ее от изнашивания. Нагар ухудшает триботехнические свойства канавки и увеличивает односторонний износ кольца по высоте. Естественный износ деталей цилиндропоршневой группы определяется давлением в трибосопряжениях [2]. Давление изменяется: в течение цикла, от режима работы ДВС, и при эксплуатационном износе. Например, в процессе приработки площадь скольжения увеличивается (см. рис. 1, г) – давление, интенсивность износа уменьшается. С целью снижения износа и времени приработки юбку поршня надо изготавливать с геометрией соответствующей приработанной $R_П = R_Ц$, где $R_П$ и $R_Ц$ – соответственно радиус рабочей (трущейся) поверхности поршня и цилиндра (рис. 2, а). Такая форма обеспечит наибольшую площадь скольжения и минимальное давление от силы N [3].

Для уменьшения овального износа цилиндра поршневую канавку и компрессионное кольцо нужно изготовлять со ступенчатостью обратной изношенной (рис. 2, б). При износе кольца и канавки по высоте давление кольца на цилиндр при перекладке поршня не будет расти [4].

Исключить образование зон повышенных зазоров между кольцом и цилиндром (см. рис. 1 д) можно за счет кольца переменной толщины (рис. 2,в). Решение увеличивает жесткость кольца [5].

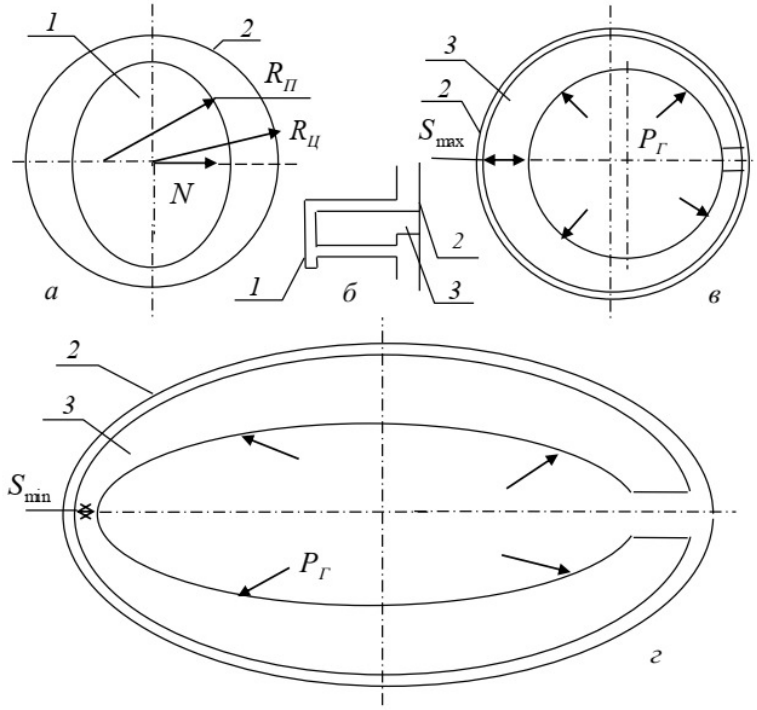


Рис. 2. Совершенствование цилиндропоршневой группы ДВС: 1 – поршень; 2 – цилиндр; 3 - кольцо.

Разрезное поршневое кольцо (рис. 2 г) содержит внутреннюю поверхность и наружную поверхность, контактирующую с цилиндром по овалу. Упругость кольца и давление газов $P_Г$ прижимают кольцо к цилиндру. Минимальный радиус наружной поверхности кольца образован с одной стороны замком, а с другой пазом с минимальной толщиной кольца S_{min}. Максимальный радиус контакта обеспечен большей толщиной кольца.

3. Заключение

Ориентированное расположение замка и паза разрезного поршневого кольца в цилиндре, минимизирует вращение и износ кольца по высоте, улучшает прирабатывание, герметичность и износостойкость цилиндропоршневой группы [6].

Литература

1. Коченов В.А. Естественный износ и проектирование приработанных трибосопряжений поршневых ДВС // Вестник машиностроения. 2013. вып. 1. С. 34-38.

2. Коченов В.А. Повышение износостойкости и долговечности ДВС автомобилей // Вестник машиностроения. 2013. вып. 6. С. 26-28.

3. Пат. 141165 Российская федерация, МПК F02F 5/00 Цилиндропоршневая группа деталей / Коченов В.А., ФГБОУ ВПО НГСХА – № 2014120843; заявл. 2013.03.12; опубл. 2014.05.27, Бюл. № 6. 3 с.

4. Пат. 151610 Российская федерация, МПК F02F 5/00 Компрессионное кольцо / Коченов В.А., ФГБОУ ВПО НГСХА – № 2013111137; заявл. 2014.05.22; опубл. 2015.04.10, Бюл. № 10. 3 с.

5. Пат. 183275 Российская федерация, МПК F02F 5/00 Уплотняющее сопряжение деталей / Коченов В.А., ФГБОУ ВПО НГСХА – № 2017106465; заявл. 2017.02.27; опубл. 2018.09.17, Бюл. № 26. 3 с.

6. Пат. 2691701 Российская федерация, МПК F02F 5/00 Кольцо / Коченов В.А.; Коченов В.А. – № 2018102070; заявл. 2018.01.18; опубл. 2019.06.17, Бюл. № 17. 3 с.

MSC2020 74M10, 74M15

Natural wear and improvement of cylindro-piston group internal combustion engines

E. A. Avdeeva, V. A. Kochenov

Nizhny Novgorod state agricultural academy

Abstract: On the basis of empirical data, patterns of wear of cylinder-piston parts are determined. Based on the natural change in the shape of rubbing surfaces and load redistribution models during operational wear of mates, design solutions have been developed to increase the durability and wear resistance of internal combustion engines. The novelty of the development is confirmed by RF patents for inventions and utility models.

Keywords: Tightness, wear resistance, cycle, load, wear.

References

1. Kochenov V.A. Natural wear and design of running-in tribological conjugations of piston ICEs. Vestnik mashinostroeniya. 2013. No. 1. pp. 34-38. (In Russian).

2. Kochenov V.A. Improving the wear resistance and durability of ICE cars. Vestnik mashinostroeniya. 2013. No. 6. pp. 26-28. (In Russian).

3. Pat. 141165 Russian Federation, MPK F02F 5/00 Cylinder-piston group of parts / Kochenov V.A.; Nizhny Novgorod State Agricultural Academy. - № 2014120843; appl. 2013.03.12; publ. 2014.05.27, Bul. No. 6. 3 p. (In Russian).

4. Pat. 151610 Russian Federation, MPK F02F 5/00 Compression ring / Kochenov V.A.; Nizhny Novgorod State Agricultural Academy. - № 2013111137; appl. 2014.05.22; publ. 2015.04.10, Bul. No. 10. 3 p. (In Russian).

5. Pat. 183275 Russian Federation, MPK F02F 5/00 Sealing pairing of parts / Kochenov V.A.; Nizhny Novgorod State Agricultural Academy. - № 2017106465; appl. 2017.02.27; publ. 2018.09.17, Bul. No. 26. 3 p. (In Russian).

6. Pat. 2691701 Russian Federation, MPK F02F 5/00 Ring / Kochenov V.A.; Kochenov V.A. - № 2018102070; appl. 2018.01.18; publ. 2019.06.17, Bul. No. 17. 3 p. (In Russian).

УДК 517.956.225; 517.544.8; 517.583

О суммировании рядов с помощью решения задачи Дирихле для прямоугольника *

Алексеева Е. С., Рассадин А. Э.

Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова [1],
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"[2]

Аннотация: В работе представлен метод получения новых тождеств для полного эллиптического интеграла первого рода. В основе этого метода лежит построение точного решения задачи Дирихле для прямоугольника при специальном выборе граничного условия, вычисление значений этого точного решения в специально подобранных внутренних точках этого прямоугольника и последующее сравнение их с значениями решения той же задачи, полученного методом разделения переменных, в тех же точках. Количество этих новых тождеств определяется запасом известных значений используемого точного решения.

Ключевые слова: конформное отображение, эллиптические функции Якоби, модуль полного эллиптического интеграла, обратная функция, числовые и функциональные ряды.

1. Построение специального решения задачи Дирихле на прямоугольнике

Рассмотрим двумерное уравнение Лапласа на прямоугольнике $D = (-a/2, a/2) \times (0, b)$:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0\,, \qquad (x, y) \in D\,. \tag{1}$$

с граничным условием, выражающимся через эллиптический косинус с модулем k $(0 < k < 1)$ следующим образом:

$$\Psi(x, 0) = cn\left(\frac{2\,\mathbf{K}(k)\,x}{a}, k\right), \quad \Psi(x, b) = 0\,, \quad \Psi(-a/2, y) = 0\,, \quad \Psi(a/2, y) = 0\,, \tag{2}$$

где

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)\,(1-k^2\zeta^2)}} \tag{3}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода [1, 2].

Как хорошо известно [1, стр. 171], конформное отображение прямоугольника D плоскости $z = x + iy$ на верхнюю полуплоскость $\Im w > 0$ плоскости $w = u + iv$ с соответствием точек $A_j \leftrightarrow B_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, представленным на рис. 1, выражается через эллиптический синус:

$$w = sn\left(\frac{2\,\mathbf{K}(k)\,z}{a}, k\right), \tag{4}$$

*Работа А.Э. Рассадина поддержана РФФИ, грант № 18-08-01356-а.

причём его модуль k определяется по сторонам a и b прямоугольника D соотношением [1, стр. 673]:

$$s(k) \equiv \frac{\mathbf{K}(k')}{\mathbf{K}(k)} = \frac{2\,b}{a}\,, \tag{5}$$

где $k' = \sqrt{1-k^2}$ — дополнительный модуль.

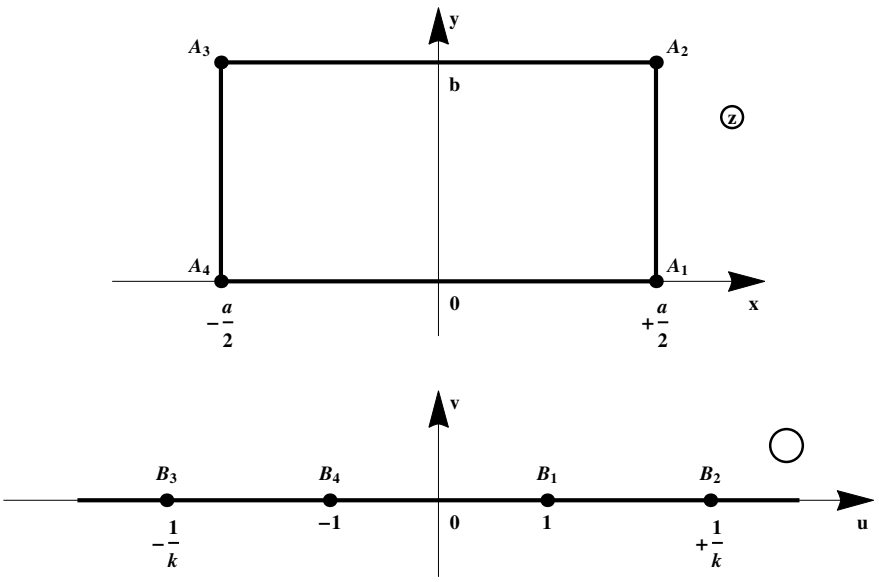


Рис. 1. К конформному отображению прямоугольника D комплексной плоскости z на верхнюю полуплоскость комплексной плоскости w.

Функция $s = s(k)$, определённая соотношением (5), имеет обратную [1, стр. 656]:

$$k(s) = 4\left\{\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\exp[-\pi\,(n+1/2)^2\,s]}{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\pi\,n^2\,s)}\right\}^2, \tag{6}$$

следовательно, по известному отношению b/a сторон прямоугольника D модуль k определяется единственным образом.

График функции (6) в зависимости от переменной s представлен на рис. 2.

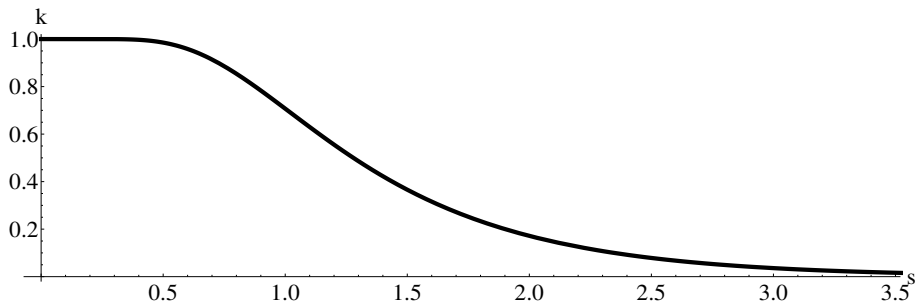


Рис. 2. К определению модуля k в конформном отображении прямоугольника на верхнюю полуплоскость.

Далее, будем считать, что модуль k эллиптического косинуса из формулы (2) совпадает с модулем k эллиптического синуса в формуле (4), определяемым соотношением (5), то есть

что они связаны аналогом основного тригонометрического тождества, поэтому при переходе на плоскость w с помощью конформного отображения (4) получим представление нашей задачи Дирихле в переменной w с помощью формулы Пуассона [3, стр. 341] в виде:

$$\widetilde{\Psi}(w) = \Re\left\{\frac{1}{\pi\, i}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-w}\,dt\right\}. \tag{7}$$

Интеграл, входящий в формулу (7), легко берётся с помощью теории вычетов [3, стр. 243], поэтому искомая функция, записанная в переменной w, равна:

$$\widetilde{\Psi}(w) = \Re\left\{\sqrt{1-w^2} + i\,w\right\}. \tag{8}$$

Возврашаясь в выражении (8) с помощью формулы (4) к переменной z, получим:

$$\Psi(z) = \Re\left\{cn\left(\frac{2\,\mathbf{K}(k)\,z}{a}, k\right) + i\,sn\left(\frac{2\,\mathbf{K}(k)\,z}{a}, k\right)\right\}. \tag{9}$$

2. Получение специального решения задачи Дирихле на прямоугольнике методом разделения переменных

Используя соотношение (5), известный ряд Фурье для эллиптического косинуса [2, стр. 267] можно записать следующим образом:

$$cn\left(\frac{2\,\mathbf{K}(k)\,x}{a}, k\right) = \frac{\pi}{k\,\mathbf{K}(k)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\cosh((2\,n+1)\,\pi\,b/a)}\cos\frac{(2\,n+1)\,\pi\,x}{a}. \tag{10}$$

Следуя общей схеме решения задачи Дирихле (1)-(2) методом разделения переменных [4], с помощью разложения (10) находим, что:

$$\Psi(x,y) = \frac{2\,\pi}{k\,\mathbf{K}(k)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sinh((2\,n+1)\,\pi\,(b-y)/a)}{\sinh((2\,n+1)\,2\,\pi\,b/a)}\cos\frac{(2\,n+1)\,\pi\,x}{a}. \tag{11}$$

3. Новые тождества для полного эллиптического интеграла первого рода

В силу единственности решения задачи Дирихле (1)-(2) [1–4] формулы (9) и (11) при $(x,y) \in \overline{D}$ совпадают. С другой стороны, для эллиптических синуса и косинуса при некоторых значениях комплексного аргумента z известны их точные значения [2, стр. 280], следовательно, через эти значения выражаются суммы функциональных рядов, которые получаются подстановкой $\Re z$ и $\Im z$ в правую часть формулы (11).

Например, поскольку $sn(0,k) = 0$ и $cn(0,k) = 1$, то, следуя этой схеме при $z = 0$, получим тождество:

$$1 = \frac{2\,\pi}{k\,\mathbf{K}(k)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sinh((2\,n+1)\,\pi\,b/a)}{\sinh((2\,n+1)\,2\,\pi\,b/a)}. \tag{12}$$

Воспользовавшись равенством (5) и формулой для гиперболического синуса двойного аргумента, перепишем соотношение (12) в виде:

$$\frac{k\,\mathbf{K}(k)}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\cosh((2\,n+1)\cdot\pi/2\cdot\mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}. \tag{13}$$

Далее, так как $sn(\mathbf{K}(k)/2,k) = 1/\sqrt{1+k'}$ и $cn(\mathbf{K}(k)/2,k) = \sqrt{k'/(1+k')}$ [2, стр. 280], то, рассматривая точку $z = a/4$, находим аналогичным образом, что:

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}}\,\frac{k\,\mathbf{K}(k)}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\pi\,n/2 + \sin\pi\,n/2}{\cosh((2\,n+1)\cdot\pi/2\cdot\mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}\,. \tag{14}$$

Вычисляя $\Psi(0,b/2)$ с помощью выражений $sn(i\,\mathbf{K}(k')/2,k) = i/\sqrt{k}$ и $cn(i\,\mathbf{K}(k')/2,k) = \sqrt{1+1/k}$ [2, стр. 280], получим тождество:

$$(\sqrt{1+k}-1)\,\frac{\sqrt{k}\,\mathbf{K}(k)}{2\,\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh((2\,n+1)\cdot\pi/4\cdot\mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}{\sinh((2\,n+1)\cdot\pi\cdot\mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}\,. \tag{15}$$

Наконец, так как $sn((\mathbf{K}(k)+i\,\mathbf{K}(k'))/2,k) = (\sqrt{1+k}+i\sqrt{1-k})/\sqrt{2\,k}$ и $cn((\mathbf{K}(k)+i\,\mathbf{K}(k'))/2,k) = \sqrt{k'/i\,k}$ [2, стр. 280], то определение значения $\Psi(a/4,b/2)$ даёт равенство:

$$(\sqrt{1+k}-1)\,\frac{\sqrt{k\,(1-k)}\,\mathbf{K}(k)}{2\sqrt{2}\,\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh((2\,n+1)\cdot\pi/4\cdot\mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}{\sinh((2\,n+1)\cdot\pi\cdot\mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}\,\cos\frac{(2\,n+1)\,\pi}{4}\,. \tag{16}$$

Точки $z = -a/4$ и $z = -a/4 + i\,b/2$ не рассматриваем, потому что решение (11) чётно по переменной x: $\Psi(x,y) = \Psi(-x,y)$.

Тождества (13)-(16) могут быть переписаны через переменную s, введённую соотношением (5), например, в переменной s формула (13) сводится к:

$$\frac{k(s)\,\mathbf{K}(k(s))}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cosh((2\,n+1)\cdot\pi\,s/2)}\,, \tag{17}$$

где $k(s)$ — функция (6).

Кроме того, известно большое число значений функций (3) и (5) для одних и тех же значений модуля k, в частности [5, стр. 28], при $k = (\sqrt{3}-1)/\sqrt{8}$:

$$s\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3}\,, \qquad \mathbf{K}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{3^{\,1/4}}{2^{7/3}\,\pi}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right), \tag{18}$$

где $\Gamma(\dots)$ — гамма-функция Эйлера.

Подставляя значения (18) в тождество (17), получим сумму следующего числового ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cosh((2\,n+1)\cdot\pi\sqrt{3}/2)} = \frac{3^{\,1/4}(\sqrt{3}-1)}{2^{\,23/6}\,\pi}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right). \tag{19}$$

4. Выводы

В представленной работе получены новые тождества (13)-(16) для полного эллиптического интеграла первого рода. С одной стороны, эти тождества дополняют данные в работе [6] оценки снизу и сверху для функции (3), выражающиеся через элементарные функции, а с другой стороны, они имеют и самостоятельное значение, например, в аналитической теории чисел (см. [5] и ссылки там).

Число этих тождеств, полученных в рамках предложенного выше метода, может быть увеличено неограниченно путём получения новых значений эллиптических функций Якоби с помощью теорем сложения [1, 2]. По каждой из этих формул для сумм функциональных рядов типа формулы (17) могут быть получены суммы числовых рядов типа суммы (19).

Далее, хорошо известно, что функция (3) удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению [2, стр. 157]:

$$k\,(1-k^2)\,\frac{d^2\mathbf{K}(k)}{dk^2}+(1-3\,k^2)\,\frac{d\mathbf{K}(k)}{dk}-k\,\mathbf{K}(k)=0. \tag{20}$$

Как только что выяснено, для решения этого уравнения существует счётное число тождеств вида (13)-(16). Эта ситуация напоминает положение дел для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, имеющих счётное число интегралов движения и точно решаемых методом обратной задачи рассеяния (см. [7] и библиографию там). Однако уравнение (20) — линейное.

Наконец, точное решение (9) задачи Дирихле (1)-(2) может использоваться для тестирования разностных схем для уравнения Лапласа — в том числе и на суперЭВМ .

Литература

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1987. 688 с.

2. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М., Наука, 1970. 304 с.

3. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1989. 480 с.

4. Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г., Натансон Г.И., Риз П.М., Слободецкий Л.Н., Смирнов М.М. Линейные уравнения математической физики. М., Наука, 1964. 368 с.

5. Borwein J.M., Borwein P.B. Pi and the AGM. A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity. John Wiley and Sons, 1987. 414 p.

6. Алексеева Е.С. Новые аппроксимации для полного эллиптического интеграла 1-го рода // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского / Казанское математическое общество. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы // Материалы Четырнадцатой Международной Казанской научной школы-конференции. Казань: Издательство Казанского математического общества, Издательство Академии наук Республики Татарстан, 2019. Т. 57. С. 20-23.

7. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М., Мир, 1989. 326 с.

MSC2020 30C20, 33E05, 35J08

On summation of series by means of solution of the Dirichlet problem for rectangle

E. S. Alekseeva [1], A. E. Rassadin [2]

Laboratory of infinite-dimensional analysis and mathematical physics, faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow State University [1], National Research University "Higher School of Economics"[2]

Abstract: In the article, method of receiving of new identities for the complete elliptic integral of the first kind has been presented. The corner stone of this method is construction of exact solution of the Dirichlet problem for rectangle under special choice of boundary condition. Further one ought to calculate values of this exact solution in specially chosen internal points of this rectangle and to compare them vith values of solution of the same problem obtained in the framework of separation of variables in the same points. Amount of these new identities is determined by store of known values of used exact solution.

Keywords: conformal mapping, Jacobian elliptic functions, modulus of complete elliptic integral, inverse function, numerical and functional series.

References

1. Lavrentyev M.A., Shabat B.V. Metodi teorii funktsii kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of functions of a complex variable]. M., Nauka Publ. 1987. 688 p. (In Russian).

2. Ahiezer N.I. Elementy teorii ellipticheskih funktsii [Elements of the theory of elliptic functions]. M., Nauka Publ. 1970. 304 p. (In Russian).

3. Sidorov Yu.V., Fedoryuk M.V., Shabunin M.I. Lektsii po teorii funktsii kompleksnogo peremennogo [Lectures on the theory of functions of a complex variable]. M., Nauka Publ. 1989. 480 p. (In Russian).

4. Babich V.M., Kapilevich M.B., Mikhlin S.G., Natanson G.I., Riz P.M., Slobodetskii L.N., Smirnov M.M. Lineiniye uravneniya matematicheskoi fiziki [Linear equations of mathematical physics]. M., Nauka Publ. 1964. 368 p. (In Russian).

5. Borwein J.M., Borwein P.B. Pi and the AGM. A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity. John Wiley and Sons, 1987. 414 p.

6. Alekseeva E.S. New approximations for a complete elliptic integral of the first kind. Trudi Matematicheskogo Tsentra imeni N.I. Lobachevskogo / Kazanskoye matematicheskoye obshestvo. Teoriya funktsii, eyo prilogenija i smezhnie voprosi. Materiali Chetirnadtsatoi Mezhdunarodnoi Kazanskoi nauchnoi shkoli-konferentsii. Kazan: Izdatelstvo Kazanskogo matematicheskogo obshestva, Izdatelstvo Akademii nauk Respubliki Tatarstan [Publ. of the Kazan Mathematical Society, Publ. of the Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan], 2019. Vol. 57. pp. 20-23.

7. Newell A. Solitoni v matematike i fizike [Solitons in mathematics and physics]. M., Mir Publ. 1989. 326 p. (In Russian).

УДК 517.958:531.12; 534.11

Об одном методе замены переменных для волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами

Анисимов В. Н., Литвинов В. Л.

Сызранский филиал ФГБОУ ВО «СамГТУ»

Аннотация: Рассмотрен аналитический метод решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами. С помощью замены переменных, останавливающих границы и оставляющих уравнение инвариантным, исходная краевая задача сведена к системе функционально – разностных уравнений, которая может быть решена с помощью прямого и обратного методов. Описан обратный метод, позволяющий аппроксимировать достаточно разнообразные законы движения границ законами, полученными из решения обратной задачи. Получены новые частные решения для достаточно широкого круга законов движения границ. Рассмотрен прямой асимптотический метод приближенного решения функционального уравнения. Произведена оценка погрешностей приближенного метода в зависимости от скорости движения границы.

Ключевые слова: волновое уравнение, краевые задачи, колебания систем с движущимися границами, замена переменных, законы движения границ, функциональные уравнения.

1. Введение

Одномерные системы, границы которых движутся, широко распространены в технике: канаты грузоподъемных установок [1, 4, 8, 11–15, 21], гибкие звенья передач [1, 2, 5, 16, 19, 20], стержни твердого топлива [22], бурильные колонны [8] и т. д. Наличие движущихся границ вызывает значительные затруднения при описании таких систем, поэтому здесь в основном используются приближенные методы решения [1–4, 8, 10, 16, 17, 20–22, 25]. Из аналитических методов наиболее эффективным является метод, предложенный в [5], который заключается в подборе новых переменных, останавливающих границы и оставляющих волновое уравнение инвариантным. В [6] решение ищется в виде суперпозиции двух волн, бегущих навстречу друг другу. Эффективен также метод, используемый в [7], заключающийся в замене геометрической переменной на чисто мнимую переменную, что позволяет свести волновое уравнение к уравнению Лапласа и применить для решения методику теории функций комплексного переменного.

В данной статье рассмотрен аналитический метод решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами. С помощью замены переменных, останавливающих границы и оставляющих уравнение инвариантным, исходная краевая задача сведена к системе функционально – разностных уравнений, которая может быть решена с помощью прямого и обратного методов. Описан обратный метод, позволяющий аппроксимировать достаточно разнообразные законы движения границ законами, полученными из решения обратной задачи. Получены новые частные решения для достаточно широкого круга законов движения границ. Рассмотрен прямой асимптотический метод приближенного решения функционального уравнения. Произведена оценка погрешностей приближенного метода в зависимости от скорости движения границы. В данном подходе удачно сочетается методика, используемая в [5, 6, 9, 18, 23, 24].

2. Постановка задачи

Рассмотрим свободные колебания в системе с движущимися границами.

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0. \tag{1}$$

Граничные условия на закрепленных концах имеют вид

$$\begin{gathered} u\big(l_1(t),t\big) = 0; \quad u\big(l_2(t),t\big) = 0, \\ \big(l_1(0) \le x \le l_2(0)\big). \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $u(x,t)$ – смещение точки объекта с координатой в момент времени t; a – скорость распространения волн в системе; $l_1(x)$, $l_2(x)$ – законы движения границ.

В работах [5,6] Весницким А. И. был предложен достаточно общий метод подбора новых переменных для волнового уравнения. Следуя этому методу, замена переменных производится в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\xi = \varphi\big(t + x/a\big) - \psi\big(t - x/a\big); \\ &\tau = a^{-1}\big[\varphi(t + x/a) + \psi(t - x/a)\big], \end{aligned} \tag{3}$$

где φ и ψ – некоторые функции. В результате такой замены исходное уравнение остается инвариантным (волновым), а φ и ψ определяются из условия постоянства ξ на границах.

В новых переменных ξ, τ, определяемых соотношением (3), исходная задача (1), (2) сводится к следующей

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau) - U_{\xi\xi}(\xi,\tau) = 0 \tag{4}$$

при граничных условиях

$$\begin{gathered} U\big(\ell_1(\tau),\tau\big) = 0; \quad U_\xi\big(\ell_2(\tau),\tau\big) = 0; \\ \big(\ell_1(\tau) \le \xi \le \ell_2(\tau)\big). \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь τ, ξ безразмерное время ($\tau \ge 0$) и безразмерная пространственная координата; $U(\xi,\tau) = u(x,t)$; $\ell_i(\tau)$ – законы движения границ.

Граничные условия (5) в переменных ξ, τ задаются на новых, вообще говоря, движущихся границах, положение которых зависит от двух функций φ и ψ. Так как φ и ψ произвольны, можно потребовать, чтобы граничные условия записывались на неподвижных границах, т.е. $\ell_1 = \text{const}$ и $\ell_2 = \text{const}$; $\big(\ell_2 > \ell_1\big)$.

Для этого необходимо, чтобы φ и ψ удовлетворяли системе функциональных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi\big(\tau + \ell_1(\tau)\big) - \psi\big(\tau - \ell_1(\tau)\big) = \ell_1; \\ \varphi\big(\tau + \ell_2(\tau)\big) - \psi\big(\tau - \ell_2(\tau)\big) = \ell_2, \end{cases} \tag{6}$$

которые однозначно определяют функции φ и ψ через известные законы движения границ. При движении границ со скоростью большей скорости распространения волн решение волнового уравнения становится некорректным, поэтому на скорость движения границ накладывается ограничение $\big|\ell_i'(\tau)\big| < 1$. Постоянные ℓ_i могут быть произвольными, но не равными величинами (например, $\ell_1 = 0$, $\ell_2 = 1$). Тогда система (6) примет вид:

$$\begin{cases} \varphi\big(\tau + \ell_1(\tau)\big) = \psi\big(\tau - \ell_1(\tau)\big); \\ \varphi\big(\tau + \ell_2(\tau)\big) = \psi\big(\tau - \ell_2(\tau)\big) + 1. \end{cases} \tag{7}$$

Существование решения данной системы было доказано в работе [5].

Решение (4), (5) находится методом Фурье [24]:

$$U(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\omega_{0n}\xi\right)\left(D_n\cos\left(\omega_{0n}\tau\right)+E_n\sin\left(\omega_{0n}\tau\right)\right)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}r_n\left\{\sin\left(\omega_{0n}(\tau+\xi)+\alpha_n\right)-\sin\left(\omega_{0n}(\tau-\xi)+\alpha_n\right)\right\},\quad (8)$$

где $\omega_{0n}\big(\varepsilon_0\tau\big)=\dfrac{\pi n}{\ell_2-\ell_1}$; $r_n=\dfrac{1}{2}\sqrt{D_n^2+E_n^2}$; $\alpha_n=\operatorname{arctg}\big(E_n/D_n\big)$.

Решение, полученное в работах [1–6, 8–10] имеет вид, аналогичный (8).

Возвращаясь к переменным x и t, получим

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}r_n\left\{\sin\left(\omega_{0n}\varphi(t+x)+\alpha_n\right)-\sin\left(\omega_{0n}\psi(t-x)+\alpha_n\right)\right\}.\quad (9)$$

Здесь φ и ψ находятся из решений системы функциональных уравнений (7) по известным законам движения границ, а постоянные D_n, E_n определяются из начальных условий.

Решить систему (7), вообще говоря, нелегко. При ее решении возможны два различных подхода:

– обратная задача [5, 6, 8, 9, 18, 22, 23], т.е. по заданным «фазам» собственных колебаний φ и ψ нахождение законов движения границ $\ell_i(\tau)$;

– прямая задача [17, 22], т.е. нахождение «фаз» собственных колебаний по заданным законам движения границ $\ell_i(\tau)$.

3. Решение обратной задачи

Для решения системы (7) А. И. Весницким [5] был использован обратный метод, т.е. по заданным $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из получающейся системы уравнений находятся законы движения границ $\ell_1(\tau)$ и $\ell_2(\tau)$. При решении обратной задачи уравнения системы (7) сводятся к исследованию алгебраических или трансцендентных уравнений относительно $\ell_i(\tau)$, которые во многих случаях допускают точные решения. На основе обратной задачи Весницким А. И. и Потаповым А. И. [5, 6] были получены решения для достаточно широкого круга законов движения границ.

Система (7) имеет бесконечно много решений, так как на интервале $[0,1]$ функция $\varphi(z)$ и на интервале $[-1,0]$ функция $\psi(z)$ могут задаваться произвольно и с помощью метода последовательных приближений [24] находятся значения функций в других областях. Нам же достаточно найти одно частное решение, определяющее взаимно-однозначное соответствие точек z и точек $y_1=\varphi(z)$; $y_1=\varphi(z)$. Из всех решений нас интересуют только монотонные, а монотонные решения в случае движения границ со скоростью меньшей скорости распространения волн $\left(\left|\ell_1'(\tau)\right|<1;\left|\ell_2'(\tau)\right|<1\right)$ могут быть только монотонно возрастающими.

Лемма. Если функция $\varphi(z)$ – монотонно возрастающая (убывающая), то функция $\psi(z)$ – также монотонно возрастающая (убывающая).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, из первого уравнения системы (7) при $\tau=\tau_0$

$$\varphi\left(\tau_0+\ell_1\big(\tau_0\big)\right)=\psi\left(\tau_0-\ell_1\big(\tau_0\big)\right).$$

Теперь предположим, что $\tau_1>\tau_0$ и функция $\varphi(z)$ возрастает (убывает), тогда в случае движения границ со скоростью меньшей скорости распространения волн $\left(\left|\ell_1'(\tau)\right|<1;\left|\ell_2'(\tau)\right|<1\right)$ будем иметь:

$$\tau_1+\ell_1\big(\tau_1\big)>\tau_0+\ell_1\big(\tau_0\big);$$
$$\tau_1-\ell_1\big(\tau_1\big)>\tau_0-\ell_1\big(\tau_0\big).$$

Поскольку функция $\varphi(z)$ в данном случае возрастает (убывает), то для выполнения первого равенства системы (7) при $\tau = \tau_1$ необходимо, чтобы возрастала (убывала) функция $\psi(z)$, т.е. функция $\psi(z)$ – также возрастающая (убывающая).

Покажем также, что монотонное решение системы (7) в случае движения границ со скоростью меньшей скорости распространения волн может быть только возрастающим.

Действительно, учитывая неравенство $\ell_1(\tau) < \ell_2(\tau)$ получим:

$$\tau + \ell_1(\tau) < \tau + \ell_2(\tau); \quad \tau - \ell_1(\tau) > \tau - \ell_2(\tau).$$

Предположим, что $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ убывают, тогда можно записать:

$$\varphi\big(\tau + \ell_2(\tau)\big) < \phi\big(\tau + \ell_1(\tau)\big) = \psi\big(\tau - \ell_1(\tau)\big) < \psi\big(\tau - \ell_2(\tau)\big).$$

Однако данное неравенство противоречит второму уравнению системы (7). Следовательно, функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ могут быть только монотонно возрастающими. Лемма 3 доказана.

Заметим, что из системы (7) функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяются с точностью до константы в том смысле, что если $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ решение системы (7), то $\varphi(z) + C$ и $\psi(z) + C$ также являются решением (здесь C – произвольная постоянная). Поэтому для определенности можно выбрать такую функцию $\psi(z)$, что $\psi(-1) = -1$. При этом из второго уравнения системы (7) при $\tau = 0$ следует, что $\varphi(1) = 0$. Из первого уравнения системы (7) при $\tau = 0$ получим

$$\phi(0) = \psi(0).$$

При задании функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в них вводится несколько произвольных постоянных. Зависимость найденных законов движения $\ell_1(\tau)$ и $\ell_2(\tau)$ от величин этих констант позволяет аппроксимировать достаточно разнообразные законы движения границ законами, полученными из решения обратной задачи.

Совокупность обратных решений достаточно широка. Приводимые ниже решения удовлетворяют соотношениям:

$$\ell_1(0) = 0; \quad \ell_2(0) = 1; \quad \psi(-1) = -1.$$

Множество полученных законов движения границ разбито на классы.

1. Решения, приведенные в таблице 1, относятся к классу A, когда левая граница неподвижна и $\phi(z) = \psi(z)$. Решения под номерами 1, 2, 3, 6, получены А. И. Весницким и А. И. Потаповым [5, 6], решения 4, 5, 7 получены впервые.

2. Следующий класс B определяется тем, что границы движутся по одинаковому закону:

$$\ell_1(\tau) = \ell(\tau); \quad \ell_2(\tau) = 1 + \ell(\tau); \quad \ell(0) = 0.$$

Поскольку движение границ взаимосвязано, то между функциями $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ также существует взаимосвязь. Она выражается функциональным уравнением:

$$\varphi\big(\bar{\varphi}(\psi(z)) + 1\big) - \psi(z - 1) = 1. \tag{10}$$

Система (7) в данном случае может удовлетворяться только функциями, которые являются решениями уравнения (10). Приведем два ранее не известных решения класса B:

1) $\ell = v\tau$; $\varphi(z) = (1 - v)z/2 + (1 + v)/2 - 1$; $\psi(z) = (1 + v)z/2 + (1 + v)/2 - 1$;

2) $\ell(\tau) = \dfrac{1}{\alpha}\ln\big[\big(Be^{-\alpha\tau} - Ce^{\alpha\tau}\big)/(B - C)\big]$; $\varphi(z) = B\big(e^{-\alpha z} - 1\big) - C\big(e^{-\alpha} - 1\big) - 1$;
$B = C + 1/\big(e^{-\alpha} - 1\big)$; $\psi(z) = C\big(e^{\alpha z} - 1\big) - C\big(e^{-\alpha} - 1\big) - 1$.

Таблица 1. Решения, относящиеся к классу A.

№	$l_2(\tau)$	$\varphi(z) = \psi(z)$
1	$v\tau + 1$	$\dfrac{\mathrm{Ln}\big[(vz+1)/(1-v)\big]}{\mathrm{Ln}\big[(1+v)/(1-v)\big]} - 1$
2	$\sqrt{B\tau + B^2}/\lvert B\rvert$	$\sqrt{Bz + B + 0,25} - \sqrt{B^2 - B + 0,25} - 1$
3	$1/(4B\tau + 1)$	$Bz^2 + 0,5z - B - 0,5$
4	$\dfrac{1}{\alpha}\mathrm{arcsh}\left[\dfrac{0,5}{B_1 e^{\alpha\tau} - B_2 e^{-\alpha\tau}}\right]$	$B_1\big(e^{\alpha z} - e^{-\alpha}\big) + B_2\big(e^{-\alpha z} - e^{\alpha}\big) - 1,$ $B_1 = B_2 + 1/\big(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\big),\ \alpha > 0$
5	$\sqrt{(\tau+B)^2\big(\alpha^2-1\big) + 1 + 2\alpha B + B^2} - \alpha(\tau + B)$	$\dfrac{\mathrm{Ln}\big[(z+B)^2 + 1 + 2\alpha B + B^2\big]}{\mathrm{Ln}\big[(1+\alpha)/(1-\alpha)\big]} - \dfrac{\mathrm{Ln}\big[(B-1)^2 + 1 + 2\alpha B + B^2\big]}{\mathrm{Ln}\big[(1+\alpha)/(1-\alpha)\big]} - 1$
6	$\dfrac{1}{\alpha}\Big[-d + \sqrt{1 + d^2 + (\alpha\tau + B)^2}\Big],$ $d = \dfrac{1 + B^2 - \alpha^2}{2\alpha}$	$\dfrac{\mathrm{arctg}(\alpha z + B)}{\mathrm{arcctg}\,\big[\big(1 + B^2 - \alpha^2\big)/(2\alpha)\big]} - \dfrac{\mathrm{arctg}(B - \alpha)}{\mathrm{arcctg}\,\big[\big(1 + B^2 - \alpha^2\big)/(2\alpha)\big]} - 1$
7	$\dfrac{1}{\alpha}\Big(\ln\frac{1+\sqrt{1+4A^2e^{2\alpha\tau}}}{2A}\Big) - \tau$	$Ae^{\alpha z} + B,\ \alpha = \ln\dfrac{1 + \sqrt{1 + 4A^2}}{2A}$

3. Для решений класса C границы движутся симметрично в разные стороны, т.е.

$$\ell_1(\tau) = -\ell(\tau); \quad \ell_2(\tau) = \ell(\tau).$$

Уравнение взаимосвязи функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ здесь имеет вид:

$$\varphi(z) = \psi(z) + 0,5.$$

Решения класса C получаются из решений класса A по следующим формулам:

$$\ell(\tau) = \ell_A(\tau); \quad \psi(z) = \frac{1}{2}\psi_A(z); \quad \varphi(z) = \psi(z) + 0,5,$$

где с индексом A обозначены соответствующие функции решений класса A.

4. Решение класса D получено для случая, когда обе границы движутся равномерно:

$$\ell_1(\tau) = \big(B_2 - B_1\big)\tau/\big(B_2 + B_1\big); \quad \ell_2(\tau) = \big(B_2 e^{1/c} - B_1\big)\tau/\big(B_1 + B_2 e^{1/c}\big) + 1;$$
$$\varphi(z) = C\mathrm{Ln}\big(B_1 z + D\big) - C\mathrm{Ln}\big(D - B_2\big) - 1;$$
$$\psi(z) = C\mathrm{Ln}\big(B_1 z + D\big) - C\mathrm{Ln}\big(D - B_2\big) - 1;$$
$$D = \big(B_1 + B_2 e^{1/c}\big)/\big(e^{1/c} - 1\big).$$

Решение под номером один в таблице 1 может быть использовано при изучении колебаний канатов грузоподъемных установок при равномерном подъеме (спуске) [1, 4, 11–15, 21]. Приведенные решения класса B могут быть использованы при изучении колебаний гибких звеньев передач [16, 19, 20]. Остальные решения являются модельными.

Класс обратных решений ограничен, например, не получено решение для равноускоренного движения границы $l(\tau) = 1 + v\tau^2$. Получение указанного решения актуально при описании продольных и поперечных колебаний канатов грузоподъемных установок на стадии разгона [1].

4. Решение прямой задачи

Решение прямой задачи, как правило, сталкивается с большими трудностями, т.к. известные методы решения функциональных уравнений хотя и позволяют иногда находить φ и ψ по известным $\ell_i(\tau)$, но в ограниченном интервале значений аргумента и в виде, мало пригодном для аналитического исследования.

В связи с этим рассмотрим приближенное решение функционального уравнения

$$\varphi\big(\tau + l(\tau)\big) - \varphi\big(\tau - l(\tau)\big) = 1. \tag{11}$$

Для приближенного решения уравнения (11) предлагается использовать асимптотический метод [17].

При неподвижных границах $\ell(\tau) = \ell$ решением (11) является линейная функция

$$\varphi_s(z) = \frac{1}{2\ell} z + \text{const}.$$

В случае медленного движения границы $\ell(\tau)$ «фаза» волны $\varphi(z)$ за время ее пробега через систему изменяется незначительно относительно $\varphi_s(z)$. Предполагается, что $\varphi(z)$ имеет производные любого порядка, и записывая $\varphi\big(\tau+\ell(\tau)\big)$ в виде степенных рядов по $\ell(\tau)$, после их подстановки в (1) получим дифференциальное уравнение для медленно изменяющейся «фазы» $\varphi(\tau)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{l^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{d^{k+1}\varphi}{d\tau^{k+1}} = 1. \tag{12}$$

Так как $\varphi(\tau)$ мало отклоняется от линейного закона φ_s $(z = \tau)$ за время пробега волны, то каждый следующий член в левой части уравнения (12) много меньше предыдущего и его решение нужно искать в виде ряда

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\tau). \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12) и приравнивая члены одинакового порядка малости по отдельности к нулю, получим для нулевого приближения

$$\varphi_0(\tau) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\tau} \frac{\partial t}{\ell(t)}.$$

В случае линейного закона движения границы $\ell(t) = 1 + v\tau$ фаза динамических собственных колебаний равна

$$\varphi(z) = \frac{\ln\big[(vz+1)/(1+v)\big]}{2v}. \tag{14}$$

Значения (14) сравнивались со значениями, полученными с помощью точного решения (таблица 1):

$$\varphi(z) = \frac{\mathrm{Ln}\big[(vz+1)/(1-v)\big]}{\mathrm{Ln}\big[(1+v)/(1-v)\big]} - 1. \tag{15}$$

Значения максимальных абсолютных погрешностей Δ асимптотического метода в зависимости от скорости движения границы v приведены в таблице 2.

В интервале $v \in [0,1; 0,6]$ погрешности приближенного метода малы. Увеличение погрешности при приближении v к единице объясняется тем, что функция (15) при $v \to 1$ становится бесконечно большой.

Незначительные погрешности позволяют применять описанный метод для решения функционального уравнения (11) в случаях, когда его точное решение не известно.

Таблица 2. Погрешность асимптотического метода в зависимости от скорости движения границы.

v	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Δ	0,002	0,006	0,013	0,023	0,036	0,053	0,073	0,100	0,139

5. Заключение

С помощью аналитического метода замены переменных, исходная краевая задача сведена к системе функционально – разностных уравнений. Решение исходной задачи зависит от того, возможно ли решить данную систему (7). Весницкий А. И. предложил решать её обратным методом, т.е. задавать функции φ и ψ и из получившейся системы уравнений находить законы движения границ. В работе приведены пять новых обратных решений системы.

Рассмотрен приближенный асимптотический метод решения функциональных уравнений системы (7). В условиях медленного движения границ незначительные погрешности позволяют применять указанный метод в случаях, когда точное решение системы функциональных уравнений не известно.

Приведенные решения могут быть использованы при изучении колебаний канатов грузоподъемных установок при равномерном подъеме (спуске), гибких звеньев передач (например, ременная передача) и т.д.

Литература

1. Савин Г.Н., Горошко О.А. Динамика нити переменной длины. Киев, Наук. думка, 1962. 332 с.

2. Самарин Ю.П. Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 26. Выпуск 3. С. 77–80.

3. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича-Галеркина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». 2009. № 1(18). С. 149–158.

4. Горошко О.А., Савин Г.Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев, Наук. думка. 1971. 270 с.

5. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М., Физматлит. 2001. 320 с.

6. Весницкий А.И. Обратная задача для одномерного резонатора изменяющего во времени свои размеры // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 10. С. 1538–1542.

7. Барсуков К.А., Григорян Г.А. К теории волновода с подвижными границами // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 2. С. 280–285.

8. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами. Самара, Самар. гос. техн. ун-т. 2017. 149 с.

9. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В. Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с

движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки». 2012. № 3(28). С. 145–151.

10. Лежнева А.А. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 1. С. 159–161.

11. Колосов Л.В., Жигула Т.И. Продольно-поперечные колебания струны каната подъемной установки // Изв. Вузов. Горный журнал. 1981. № 3. С. 83–86.

12. Zhu W.D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control // J. Vibr. Acoust. 2006. No. 1. pp. 66–78.

13. Shi Y., Wu L., Wang Y. Nonlinear analysis of natural frequencies of a cable system // J. Vibr. Eng. 2006. No. 2. pp. 173–178.

14. Wang L. Zhao Multiple internal resonances and non–planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations // J. Sound Vib. 2009. No. 1–2. pp. 1–14.

15. Zhao Y., Wang L. On the symmetric modal interaction of the suspended cable: three–to one internal resonance // J. Sound Vib. 2006. No. 4–5. pp. 1073–1093.

16. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2017. Т. 19. № 4. С. 161–165.

17. Литвинов В.Л. Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода // Журнал Средневолжского математического общества. 2014. Т. 16, № 1. С. 83–88.

18. Литвинов В.Л. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении // Журнал Средневолжского математического общества. 2013. Т. 15. № 3. С. 112–119.

19. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго–инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестник научно–технического развития. 2013. № 6(70). С. 18–29.

20. Литвинов В.Л. Поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды // Вестник научно–технического развития. 2015. № 4(92). С. 29–33.

21. Литвинов В.Л. Продольные колебания каната переменной длины с грузом на конце // Вестник научно–технического развития. 2016. № 1(101). С. 19–24.

22. Литвинов В.Л. Точное и приближенное решения задачи о колебаниях стержня переменной длины // Вестник научно–технического развития. 2017. № 9(121). С. 46–57.

23. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Аналитический метод решения волнового уравнения с широким классом условий на движущихся границах // Вестник научно–технического развития. 2016. № 2(102). С. 28–35

24. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М., Высшая школа. 1970.

25. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Применение метода Канторовича–Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 2. С. 70–77.

MSC2020 35R37, 35G30, 35Q70

About one method for replacing variables for a wavean equation describing vibrations of systems with moving boundaries

V. N. Anisimov, V. L. Litvinov

Syzran' Branch of Samara State Technical University

Abstract: An analytical method for solving the wave equation describing the oscillations of systems with moving boundaries is considered. By replacing variables that set boundaries and leave the equation invariant, the original boundary value problem is reduced to a system of functional – difference equations that can be solved using forward and reverse methods. The inverse method is described, which allows us to apply sufficiently diverse laws of boundary motion to the laws obtained from the solution of the inverse problem. New partial solutions for a fairly wide range of boundary motion laws are obtained. A direct asymptotic method for approximating the solution of a functional equation is considered. The errors of the approximate method are estimated depending on the speed of the border movement.

Keywords: wave equation, boundary value problems, oscillations of systems with moving boundaries, substitution of variables, laws of boundary motion, functional equations.

References

1. Savin G.N., Goroshko O.A. Dynamics of a thread of variable length. Kiev, Dumka, 1962, 332 pp. (in Russian).

2. Samarin Yu.P. On a nonlinear problem for a wave equation in a one–dimensional space. Applied mathematics and mechanics. 1964, vol. 26, No 3. pp. 77–80. (in Russian).

3. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Investigation of resonant properties of mechanical objects with moving boundaries using the Kantorovich–Galerkin method // Bulletin of Samara state technical University. Ser. "Physical and mathematical Sciences 2009, 1(18). pp. 149–158. (in Russian).

4. Goroshko O.A., Savin G.N. Introduction to the mechanics of deformable one–dimensional bodies of variable length. Kiev, Dumka, 1971, 270 pp. (in Russian).

5. Vesnitsky A.I. Waves in systems with moving boundaries and loads. Moscow, Fizmatlit, 2001, 320 pp. (in Russian).

6. Vesnitsky A.I. Inverse problem for a one–dimensional resonator changing its dimensions in time. Izv. vuzov. Radiophysics, 1971, vol. 10, pp. 1538–1542.

7. Barsukov K.A., Grigoryan G.A. On the theory of a waveguide with movable boundaries. Izv. higher educational. Radiophysics, 1976, vol. 2, pp. 280–285. (in Russian).

8. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Mathematical modeling and research of vibrations of one–dimensional mechanical systems with moving boundaries: monograph. Samara, Samar. state tech. university, 2017, 149 pp. (in Russian).

9. Anisimov V.N., Litvinov V.L., Korpen I.V. On a method for obtaining an analytical solution of a wave equation describing vibrations of systems with moving faces. Bulletin of the Samara state technical university. Ser. "Physical and mathematical Sciences 2012, 3(28), pp. 145–151. (in Russian).

10. Lezhneva A.A. Flexural vibrations of beams of variable length. Izv. USSR ACADEMY OF SCIENCES. Solid–body mechanics, 1970, 1, pp. 159–161. (in Russian).

11. Kolosov L.B., Zhigula T.I. Longitudinal and transverse vibrations of the rope string of the lifting installation. Izv. Higher educational. Gorny Zhurnal, 1981, 3, pp. 83–86. (in Russian).

12. Zhu W.D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control. J. Vibr. Acoust, 2006, 1, pp. 66–78.

13. Shi Y., Wu L., Wang Y. Nonlinear analysis of natural frequencies of a cable system. J. Vibr. Eng., 2006, 2, pp. 73–178.

14. Wang L., Zhao Y. Multiple internal resonances and non–planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations. J. Sound Vib., 2009, 1–2, pp. 1–14.

15. Zhao Y., Wang L. On the symmetrical modal interaction of the suspended cable: three–to one in–ternal resonance. J. Sound Vib., 2006, 4–5, pp. 1073–1093.

16. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Transverse vibrations of a rope moving in the longitudinal direction. Proceedings of the Samara scientific center of the Russian Academy of Sciences, 2017, vol. 19, 4, pp. 161–165. (in Russian).

17. Litvinov V.L. Investigation of free vibrations of mechanical objects with moving boundaries using the asymptotic method. Middle Volga mathematical society, 2014, vol. 16, 1, pp. 83–88. (in Russian).

18. Litvinov V.L. Solving boundary value problems with moving boundaries using the method of replacing variables in a functional equation. Journal of the middle Volga mathematical society, 2013, vol. 15, 3, pp. 112–119. (in Russian).

19. Erofeev V.I., Kolesov D.A., Lisenkova E.E. Investigation of wave processes in a one–dimensional system lying on an elastic–inertial base with a moving load. Bulletin of scientific and technical development, 2013, 6(70), pp. 18–29. (in Russian).

20. Litvinov V.L. Transverse vibrations of a viscoelastic rope lying on an elastic base, taking into account the influence of the resistance forces of the medium. Bulletin of scientific and technical development, 2015, 4(92), pp. 29–33. (in Russian).

21. Litvinov V.L. Longitudinal vibrations of a rope of variable length with a load at the end. Bulletin of scientific and technical development, 2016, 1(101), pp. 19–24. (in Russian).

22. Litvinov V.L. Exact and approximate solutions to the problem of vibrations of a rod of variable length. Bulletin of scientific and technical development, 2017, 9(121), pp. 46–57. (in Russian).

23. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Analytical method for solving a wave equation with a wide class of conditions on moving boundaries. Bulletin of scientific and technical development, 2016, 2(102), pp. 28–35. (in Russian).

24. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Equations in partial derivatives of mathematical physics. Moscow, Higher school, 1970. (in Russian).

25. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Application of the Kantorovich–Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries. Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics, 2018, 2, pp. 70–77. (in Russian).

УДК 517.977

Многокритериальный консенсус в сети линейных агентов

Бирюков Р. С., Бубнова Е. С.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Аннотация: Рассматривается многокритериальная задача достижения обобщённого $\mathcal{H}_2$-консенсуса в сети линейных неидентичных агентов с дискретным временем и постоянной топологией связей. Сформулированы достаточные условия существования субоптимального обобщённого $\mathcal{H}_2$-консенсуса в терминах LMI. Полученные результаты проиллюстрированы численным моделированием.

Ключевые слова: многоагентная система, консенсус, обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма.

1. Введение

Исследование условий достижения консенсуса в многоагентных системах привлекает в последние десятилетия все большее число исследователей. Изучение управления многоагентными системами стимулируется многими промышленными приложениями и социальными системами. Среди примеров сетевых систем можно упомянуть многопроцессорные системы передачи и обработки информации, транспортные и логистические сети, системы координированного управления групповым движением летательных и подводных аппаратов и мобильных роботов [1], распределенные системы управления электрическими сетями, нейронные сети, сети генетических и биохимических осцилляторов, большие социальные группы и биологические формации [2].

Целью управления многоагентными системами является достижение коллективного поведения группы агентов через локальное взаимодействие. Фундаментальной задачей управления многоагентными системами является задача достижения консенсуса. Консенсус означает, что состояния или наблюдаемые выходы агентов должны сойтись к общему значению либо к общей заданной траектории. Задачам достижения консенсуса посвящено большое количество работ, некоторые из них перечислены в обзорах [3–5]. Консенсусные алгоритмы широко изучаются в литературе для идентичных многоагентных систем. Однако в практических приложениях гетерогенные многоагентные системы, то есть системы с неидентичной динамикой, имеют более широкое применение, чем однородные системы [6]. Предположение о гетерогенной динамике естественно подходит для таких приложений, как управление надводными или подводными транспортными средствами, а также наземными и воздушными роботами.

Для многоагентных систем помимо достижения консенсуса также существенно, чтобы некоторые величины — так называемые целевые выходы — были ограничены. Вместе с тем представляет интерес рассмотреть задачу достижения консенсуса в сети, когда каждый агент испытывает влияние ограниченного, но неопределённого внешнего воздействия. Такую задачу можно рассматривать как задачу гарантированного достижения консенсуса. Одним из подходов к изучению многоагентных систем, подверженных внешним возмущениям, служит теория $\mathcal{H}_\infty$-управления [7, 8]. $\mathcal{H}_\infty$-норма показывает средние значения невязки целевого выхода с течением времени.

Альтернативным подходом является использование в качестве меры неопределённости обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы [9–13]. Понятие обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы, отвечающее максимальному

уклонению при внешнем возмущении ограниченной энергии, т. е. ограниченной L_2-нормы, и нулевых начальных условиях, было введено Уилсоном для непрерывный систем в [11], а для дискретных — в [13], где также был получен оптимальный регулятор по выходу. В отличии от $\mathcal{H}_\infty$-нормы обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма позволяет говорить о максимальных значениях целевого выхода с течением времени. Также одним из плюсов такого подхода является то, что обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма "проще" с вычислительной точки зрения.

Работа имеет следующую структуру. Во втором разделе приводятся необходимые сведения из теории графов и теории обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы. В третьем разделе рассматривается постановка задачи многокритериального обобщённого $\mathcal{H}_2$-консенсуса в сетях с дискретным временем. В четвёртом разделе сформулированы достаточные условия субоптимального в смысле Парето обобщённого $\mathcal{H}_2$-консенсуса. В пятом разделе приводятся численные эксперименты, иллюстрирующие полученные теоретические результаты.

2. Предварительные сведения

В настоящем разделе кратко напомним основные теоретические результаты об обобщённой $\mathcal{H}_2$-норме для дискретного устойчивого линейного объекта

$$\begin{aligned} &x(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \quad x(0) = 0, \\ &z(k) = Cx(k), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ — состояние, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ — целевой выход, A — шуровская матрица. Пусть выход системы представлен в виде $z = \mathrm{column}(z_1,\, z_2,\, \ldots,\, z_m)$, $z_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\sum_{i=1}^m n_i = n_z$ и соответственно $C = \mathrm{column}(C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_m)$. Обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма для системы (1) определяется следующим образом

$$\gamma_{g2} = \sup_{w \in l_2} \frac{\|z\|_{g\infty}}{\|w\|_2} = \sup_{w \in l_2} \frac{\sup_{k \geqslant 0} |z(k)|_{g\infty}}{\|w\|_2} = \sup_{w \in l_2} \frac{\sup_{k \geqslant 0} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |z_i(k)|_2}{\|w\|_2}. \tag{2}$$

Имеет место следующее утверждение [9, 10].

Теорема 1. *Обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма может быть вычислена как $\inf \gamma^2$ при ограничениях, задаваемых линейными матричными неравенствами*

$$\begin{bmatrix} Y & YA^\top & 0 \\ AY & Y & B \\ 0 & B^\top & I \end{bmatrix} \geqslant 0, \qquad \begin{bmatrix} Y & YC_i^\top \\ C_iY & \gamma^2 I_{n_i} \end{bmatrix} \geqslant 0, \qquad Y = Y^\top \geqslant 0, \qquad i = 1,\, \ldots,\, m. \tag{3}$$

Свойства сети как объекта управления зависят от характера взаимосвязей между агентами. Для описания структуры взаимодействий вводится граф $\mathcal{G} = (\mathcal{V},\, \mathcal{E})$, где $\mathcal{V}$ — множество вершин, а $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ — множество рёбер. Для каждого $i = 1, \ldots, N$ вершину $v_i \in \mathcal{V}$ ассоциируем с агентом i. Будем считать, что ребро $(v_i,\, v_j)$ принадлежит множеству $\mathcal{E}$, если информация поступает от агента j к агенту i. Предполагается, что в графе нет петель, т. е. $(v_i,\, v_i) \notin \mathcal{E}$ для всех $i = 1, \ldots, N$. Построенный граф называется информационным графом или топологией сети. Многие фундаментальные свойства сетевых систем определяются их топологией и естественно описываются на языке теории графов. Одним из способов представления графа в виде матрицы является матрица смежности $\mathcal{A} = [a_{ij}]$. Элемент a_{ij} — вес ребра $(v_i,\, v_j)$ — характеризует интенсивность взаимодействия. Также введём матрицу степеней графа $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_N)$, $d_i = \sum_{i=1}^N a_{ij}$ и матрицу Лапласа $L = D - \mathcal{A}$. В данной работе предполагается, что информационный граф является связным.

3. Постановка задачи

Рассмотрим многоагентную систему, состоящую из N агентов, динамика каждого из которых описывается разностными уравнениями

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= A_i x_i(k) + B_{1,i} u_i(k) + B_{2,i} w_i(k), \\ y_i(k) &= C_{y,i} x_i(k), \\ z_i^j(k) &= C_{z,i}^j x_i(k), \end{aligned} \tag{4}$$

где $i = 1, \ldots, N$ — номер агента, $j = 0, \ldots, M$ — номер целевого выхода, $x_i(k) \in \mathbb{R}^{m_i}$ — состояние i-го агента, $y_i(k) \in \mathbb{R}^p$ — измеряемый выход, $z_i^0(k) \in \mathbb{R}^{q^0}$, $z_i^j(k) \in \mathbb{R}^{q_i^j}$ — целевые выходы, $u_i(k) \in \mathbb{R}^{m_{1,i}}$ — управление, $w_i(k) \in \mathbb{R}^{m_{2,i}}$ — внешнее возмущение, ограниченное по $l_2[0,\infty)$-норме: $\|w_i\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |w_i(k)|^2 < +\infty$. Предположим, что пары $(A_i, B_{1,i})$ стабилизируемы, а матрицы $B_{1,i}$ имеют полный столбцовый ранг. Последнее предположение носит технический характер и потребуется при доказательстве основной теоремы.

Рассмотрим задачу достижения консенсуса по целевым выходам z_i^0, $i = 1, \ldots, N$, в многоагентной системе (4). Консенсус в сети (4) означает, что выходы z_i^0 агентов должны сойтись к общему значению либо к общей заданной траектории

$$\lim_{k\to\infty} |z_i^0(k) - z_l^0(k)| = 0 \qquad \forall i, l = 1, \ldots, N. \tag{5}$$

Условие достижения консенсуса (5) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\lim_{k\to\infty} |\tilde{z}_i^0(k)| = 0, \qquad \tilde{z}_i^0 = z_i^0 - \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} z_l^0, \qquad \forall i = 1, \ldots, N, \tag{6}$$

где вспомогательный выход $\tilde{z}_i^0$ есть отклонение соответствующего целевого выхода от среднего значения.

В данной системе на каждый агент действует некоторое, в общем случае неизвестное, внешнее возмущение, поэтому будем рассматривать задачу гарантированного достижения консенсуса в сети. В качестве критерия достижения консенсуса выберем следующий функционал

$$J_0(u_1, \ldots, u_N) = \sup_{\{w_i\}\neq 0} \frac{\max_i \sup_{k\geqslant 0} |\tilde{z}_i^0(k)|_2}{\sqrt{\|w_1\|_2^2 + \cdots + \|w_N\|_2^2}} = \sup_{w\neq 0} \frac{\sup_{k\geqslant 0} |\zeta_0(k)|_{g\infty}}{\|w\|_2^2}, \tag{7}$$

здесь $\zeta_0 = \mathrm{column}(\tilde{z}_1^0, \tilde{z}_2^0, ..., \tilde{z}_N^0)$, $w = \mathrm{column}(w_1, w_2, ..., w_N)$. Консенсус с минимальным значением критерия (7) будем называть обобщённым $\mathcal{H}_2$-консенсусом, поскольку функционал (7) есть обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма расширенной системы.

Обратимся теперь к синтезу распределённого протокола управления по усреднённым значениям выходов соседних агентов. Введём в рассмотрение динамический регулятор вида

$$\begin{aligned} v_i(k+1) &= A_{r,i} v_i(k) + B_{r,i} \overline{y}_i, \\ u_i(k) &= C_{r,i} v_i(k) + D_{r,i} \overline{y}_i, \end{aligned} \qquad \overline{y}_i = \sum_{l=1}^{N} a_{il}(y_i(k) - y_l(k)), \tag{8}$$

где $v_i(k) \in \mathbb{R}^{m_r}$ — состояние i-го регулятора, a_{il} — элементы матрицы смежности. Матрицы $A_{r,i}$, $B_{r,i}$, $C_{r,i}$, $D_{r,i}$ являются параметрами регулятора, которые подлежат дальнейшему определению. Для каждого агента также введём общую матрицу параметров регулятора по формуле

$$K_i = \begin{bmatrix} A_{r,i} & B_{r,i} \\ C_{r,i} & D_{r,i} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Введём обозначение $\xi = \mathrm{column}(x_1,\, v_1,\, x_2,\, v_2,\, ...,\, x_N,\, v_N)$, подставим протокол (8) в уравнения (4) и запишем замкнутую систему в новых переменных

$$\begin{aligned} &\xi(k+1) = A_c\xi(k) + B_w w(k), \\ &\zeta_j(k) = C_j\xi(k), \quad j = 0, \ldots, M, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\begin{gathered} A_c = A + B_u K \widetilde{L} C_y, \qquad A = \mathrm{diag}(F_{0,1},\, F_{0,2},\, \ldots,\, F_{0,N}), \\ B_u = \mathrm{diag}(E_1,\, E_2,\, \ldots,\, E_N), \qquad B_w = \mathrm{diag}(B_{w,1},\, B_{w,2},\, \ldots,\, B_{w,N}), \\ C_y = \mathrm{diag}(F_{y,1},\, F_{y,1},\, \ldots,\, F_{y,N}), \qquad K = \mathrm{diag}(K_1,\, K_2,\, \ldots,\, K_N), \\ C_0 = \left(\left(I_N - \frac{1}{N}\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^\top\right) \otimes I_{q^0}\right) \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix} C_{z,1} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{z,2} & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} C_{z,N} & 0 \end{bmatrix}\right), \end{gathered} \tag{11}$$

$$F_{0,i} = \begin{bmatrix} A_i & 0_{m_i \times m_{r,i}} \\ 0 & 0_{m_{r,i} \times m_{r,i}} \end{bmatrix}, \qquad E_i = \begin{bmatrix} 0_{m_i \times m_{r,i}} & B_{1,i} \\ I_{m_{r,i}} & 0_{m_{r,i} \times m_{1,i}} \end{bmatrix}, \qquad F_{y,i} = \begin{bmatrix} 0 & I_{m_{r,i}} \\ C_{y,i} & 0_{p \times m_{r,i}} \end{bmatrix},$$

$$B_{w,i} = \begin{bmatrix} B_{2,i} \\ 0_{m_{r,i} \times m_{2,i}} \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{L} = \begin{bmatrix} I_{m_{r,1}} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_{11}I_p & 0 & l_{12}I_p & \cdots & 0 & l_{1N}I_p \\ 0 & 0 & I_{m_{r,2}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_{21}I_p & 0 & l_{22}I_p & \cdots & 0 & l_{2N}I_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_{m_{r,N}} & 0 \\ 0 & l_{N1}I_p & 0 & l_{N2}I_p & \cdots & 0 & l_{NN}I_p \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Целевые выходы $\zeta_j(k)$ представляют собой линейные комбинации j-х целевых выходов $z_i^j(k)$ агентов и/или объединения целевых выходов $z_i^j(k)$ в один столбец, и для каждого j матрицы C_j строятся соответствующим образом из матриц агентов $C_{z,i}^j$.

Отметим, что в частном случае система (10) может описывать консенсус по нескольким различным целевым выходам. В этом случае матрица C_j строится аналогично матрице C_0, а именно

$$C_j = \left(\left(I_N - \frac{1}{N}\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^\top\right) \otimes I_{q^j}\right) \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix} C_{z,1}^j & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{z,2}^j & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} C_{z,N}^j & 0 \end{bmatrix}\right). \tag{13}$$

В этом случае предполагается, что размерности соответствующих целевых выходов равны $q_1^j = \cdots = q_N^j = q^j$.

В качестве другого частного случая можно рассмотреть объединение всех целевых выходов в один столбец $\zeta_j = \mathrm{column}(z_1^j,\, z_2^j,\, ...,\, z_N^j)$, тогда матрица C_j строится следующим образом

$$C_j = \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix} C_{z,1}^j & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{z,2}^j & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} C_{z,N}^j & 0 \end{bmatrix}\right). \tag{14}$$

Таким образом, многоагентная система приведена к уравнениям, с которыми в дальнейшем удобно работать, при этом целевой выход ζ_0 позволяет говорить о достижении консенсуса в сети.

Влияние возмущения на j-й целевой выход характеризуется функционалом

$$J_j(K) = \sup_{w \neq 0} \frac{\|\zeta_j\|_{g\infty}}{\|w\|_2}, \qquad j = 0, \ldots, M. \tag{15}$$

Поставим многокритериальную задачу синтеза закона управления (8), который будет оптимальным по отношению ко всем целевым функционалам (15). Ключевым понятием в многокритериальной оптимизации является множество Парето. В данном случае множество $\mathcal{P} = \{K_P\}$ является оптимальным по Парето, если неравенства $J_j(K) \leqslant J_j(K_P)$, $j = 0, \ldots, M$, в которых, по меньшей мере, одно является строгим, не выполняются для любой матрицы K. Задача состоит в характеризации множества оптимальных по Парето решений

$$K_P = \arg\min_K \{J_j(K),\, j = 0, \ldots, M\}, \tag{16}$$

при которых замкнутая система в отсутствии возмущений асимптотически устойчива.

Для решения многокритериальной задачи, следуя подходу, изложенному в [9], определим вспомогательный функционал

$$J_\alpha(K) = \max_{0 \leqslant j \leqslant M} \{J_j(K)/\alpha_j\}, \qquad \sum_{j=0}^{M} \alpha_j = 1, \quad \alpha_j > 0, \quad j = 0, \ldots, M, \tag{17}$$

представляющий собой свёртку Гермейера функционалов $J_j(K)$, определённых по формуле (15). Тогда оптимальные по Парето решения в пространстве критериев $J_j(K)$, $j = 0, \ldots, M$, следует искать среди оптимальных решений для целевого функционала $J_\alpha(K)$ [9]. Данный подход позволяет свести задачу многкритериальной оптимизации к набору однокритериальных задач.

4. Основной результат

Для формулировки достаточных условий достижения обобщённого $\mathcal{H}_2$-консенсуса в рассматриваемой задаче определим несколько вспомогательных матриц, свойства которых используются в дальнейшем при доказательстве теоремы. Во-первых, построим блочно-диагональную матрицу

$$V = \operatorname{diag}(V_1,\, V_2,\, \ldots, V_N), \tag{18}$$

где $V_i \in \mathbb{R}^{(m_i+m_{r,i})\times(m_i+m_{r,i})}$ — невырожденные матрицы, удовлетворяющие соотношению

$$V_i E_i = \begin{bmatrix} I_{m_{1,i}+m_{r,i}} \\ 0_{(m_i-m_{1,i})\times(m_{1,i}+m_{r,i})} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Отметим, что такое построение возможно, поскольку матрицы $B_{1,i}$ имеют полный столбцовый ранг. Во-вторых, определим матрицы

$$\overline{A} = VAV^{-1}, \qquad \overline{B}_w = VB_w, \qquad \overline{C}_y = C_y V^{-1}, \qquad \overline{C}_{j,s} = C_{j,s} V^{-1}, \tag{20}$$

где $j = 0, \ldots, M$, $s = 1, \ldots, n_j$, $C_j = \operatorname{column}(C_{j,1},\, C_{j,2},\, \ldots,\, C_{j,n_j})$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что матрицы $X = X^\top \succ 0$ и Q, удовлетворяющие условиям*

$$\begin{gathered} X = \operatorname{diag}(X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_N), \\ Q = \operatorname{diag}(Q_1,\, Q_2,\, \ldots,\, Q_N), \end{gathered} \qquad X_i = \begin{bmatrix} X_i^1 & 0 \\ 0 & X_i^2 \end{bmatrix}, \quad Q_i = \begin{bmatrix} Q_i^1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{21}$$
$$X_i^1 \in \mathbb{R}^{(m_{1,i}+m_{r,i})\times(m_{1,i}+m_{r,i})}, \qquad X_i^2 \in \mathbb{R}^{(m_i-m_{1,i})\times(m_i-m_{1,i})},$$
$$Q_i \in \mathbb{R}^{(m_i+m_{r,i})\times(p+m_{r,i})}, \qquad Q_i^1 \in \mathbb{R}^{(m_{1,i}+m_{r,i})\times(p+m_{r,i})},$$

являются решениями задачи полуопределённого программирования

$$\inf \gamma^2$$
$$\begin{bmatrix} X & (X\overline{A}+Q\widetilde{L}\overline{C}_y)^\top & 0 \\ (X\overline{A}+Q\widetilde{L}\overline{C}_y) & X & X\overline{B}_w \\ 0 & \overline{B}_w^\top X & I \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad \begin{bmatrix} X & \overline{C}_{j,s}^\top \\ \overline{C}_{j,s} & \gamma^2\alpha_j^2 I \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad \begin{matrix} j=0,\,\ldots,\,M, \\ s=1,\,\ldots,\,n_j, \end{matrix} \tag{22}$$

где $0<\alpha_j<1$ *и* $\alpha_0+\ldots+\alpha_M=1$. *Тогда существует динамический протокол вида* (8) *с параметрами* (9)

$$K_i=(X_i^1)^{-1}Q_i^1, \qquad i=1,\ldots,N, \tag{23}$$

обеспечивающий в сети (4) *достижение субоптимального в смысле Парето обобщённого* $\mathcal{H}_2$*-консенсуса.*

Доказательство. Отметим, что при доказательстве теоремы используются некоторые идеи и технические моменты, которые почерпнуты из статьи [8]. Подставим матрицы (11), (12) замкнутой системы (10) в неравенства, обеспечивающие оптимальные по Парето управления в многокритериальной задаче

$$\begin{bmatrix} Y & Y(A+B_uK\widetilde{L}C_y)^\top & 0 \\ (A+B_uK\widetilde{L}C_y)Y & Y & B_w \\ 0 & B_w^\top & I \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad \begin{bmatrix} Y & YC_{j,s}^\top \\ C_{j,s}Y & \gamma^2\alpha_j^2 I \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad \begin{matrix} j=0,\,\ldots,\,M, \\ s=1,\,\ldots,\,n_j, \end{matrix} \tag{24}$$

где $Y=Y^\top\geqslant 0$.

Заметим, что получившиеся в результате подстановки матричные неравенства являются нелинейными, так как содержат произведения неизвестных матриц Y и K. Чтобы преобразовать матричные неравенства в линейные, для которых существуют эффективные алгоритмы решения, сделаем ряд упрощающих предположений, в результате чего получим лишь достаточные условия обобщённого $\mathcal{H}_2$-консенсуса в сетях гетерогенных агентов.

Домножим первое неравенство (24) слева и справа на матрицу $\mathrm{diag}(Y^{-1},\,Y^{-1},\,I)$, а второе неравенство домножим слева и справа на $\mathrm{diag}(Y^{-1},\,I)$

$$\begin{bmatrix} Y^{-1} & (A+B_uK\widetilde{L}C_y)^\top Y^{-1} & 0 \\ Y^{-1}(A+B_uK\widetilde{L}C_y) & Y^{-1} & Y^{-1}B_w \\ 0 & B_w^\top Y^{-1} & I \end{bmatrix} \geqslant 0, \qquad \begin{bmatrix} Y^{-1} & C_{j,s}^\top \\ C_{j,s} & \gamma^2\alpha_j^2 I \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{25}$$

где $j=0,\ldots,M$, $s=1,\ldots,n_j$. Первое упрощающее предположение заключается в том, что неизвестную матрицу Y можно выбрать в виде

$$Y^{-1}=V^\top XV, \tag{26}$$

где новая переменная X имеет вид (21), а матрица V определена по формулам (18), (19). Чтобы упростить (25) сделаем следующие преобразования. Во-первых, заметим, что

$$V_iE_iK_i=\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}(X_i^1)^{-1}Q_i^1=\begin{bmatrix} (X_i^1)^{-1}Q_i^1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (X_i^1)^{-1} & 0 \\ 0 & (X_i^2)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_i^1 \\ 0 \end{bmatrix}=X_i^{-1}Q_i, \tag{27}$$

здесь конечный результат получен благодаря второму упрощающему предположению о том, что матрицы X_i и Q_i имеют вид (21). Во-вторых, используя результат преобразования (27), выражение VB_uK можно упростить:

$$VB_uK = \mathrm{diag}(V_1E_1K_1, \ldots, V_NE_NK_N) = \mathrm{diag}(X_1^{-1}Q_1, \ldots, X_N^{-1}Q_N) = X^{-1}Q. \tag{28}$$

Наконец, блок (2, 1) первого неравенства (25) после подстановки (26) и с учётом (28) может быть записан как

$$\begin{aligned} Y^{-1}(A + B_uK\widetilde{L}C_y) = V^\top XV(A + B_uK\widetilde{L}C_y) = \\ = V^\top(XVAV^{-1} + XVB_uK\widetilde{L}C_yV^{-1})V = V^\top(X\overline{A} + Q\widetilde{L}\overline{C_y})V, \end{aligned} \tag{29}$$

а блок (2, 3) первого неравенства (25) примет вид

$$Y^{-1}B_w = V^\top XVB_w = V^\top X\overline{B}_w. \tag{30}$$

С учётом преобразований (27) – (30) неравенства (25) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} V^\top XV & V^\top(X\overline{A} + Q\widetilde{L}\overline{C_y})^\top V & 0 \\ V^\top(X\overline{A} + Q\widetilde{L}\overline{C_y})V & V^\top XV & V^\top X\overline{B}_w \\ 0 & \overline{B}_w^\top XV & I \end{bmatrix} \geqslant 0, \qquad \begin{bmatrix} V^\top XV & V^\top\overline{C}_{j,s}^\top \\ \overline{C}_{j,s}V & \gamma^2\alpha_j^2 I \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{31}$$

где $j = 0, \ldots, M$, $s = 1, \ldots, n_j$. После домножения первого неравенства (31) слева на $\mathrm{diag}(V^{-\top}, V^{-\top}, I)$ и справа на $\mathrm{diag}(V^{-1}, V^{-1}, I)$, а второго неравенства слева и справа на $\mathrm{diag}(V^{-\top}, I)$ и $\mathrm{diag}(V^{-1}, I)$ соответственно приходим к неравенствам (22).

Доказательство завершено.

5. Численное моделирование

С целью иллюстрации полученных выше теоретических результатов рассмотрим сеть из четырёх агентов. Топология сети описывается ориентированным связным графом, который изображён на рисунке 1.

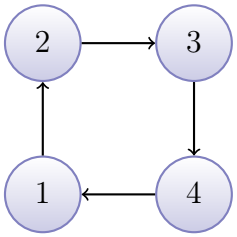


Рис. 1. Граф взаимодействия агентов.

Приведём соответствующие данному графу матрицу смежности и матрицу Лапласа

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Матрицы динамики агентов имеют вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.0 \\ 0.0 & 0.9 \end{bmatrix}, \qquad B_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad B_{2,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C^0_{z,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^\top, C_{y,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^\top,$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.0 & 0.9 \end{bmatrix}, \qquad B_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad B_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C^0_{z,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^\top, C_{y,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^\top,$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.1 & 0.1 \\ -0.2 & 1.0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 1.4 \end{bmatrix}, \qquad B_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C^0_{z,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^\top, C_{y,3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^\top,$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.1 & 0.1 & 0.0 \\ -0.2 & 1.0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.0 & 0.1 & 1.2 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}, B_{1,4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_{2,4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C^0_{z,4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^\top, C_{y,4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\top,$$

$$C^1_{z,i} = C_{y,i}, \qquad i = 1, \ldots, 4. \tag{33}$$

В результате решения неравенств (22) с помощью математического пакета Matlab были получены оценки значений обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы для $\alpha_0 \in (0, 1)$, $\alpha_1 = 1 - \alpha_0$, на основании которых построено субоптимальное множество Парето, что приведено на рисунке 2.

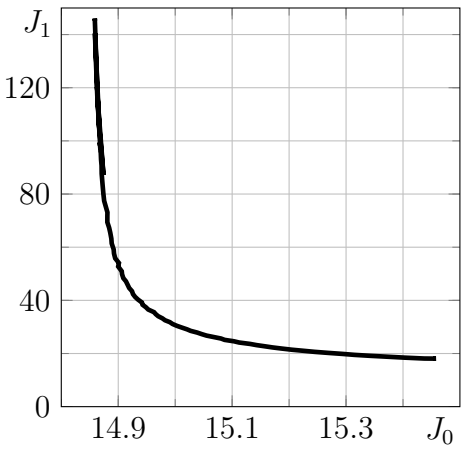


Рис. 2. Кривая Парето.

В результате решения неравенств (22) с параметрами свёртки $\alpha_0 = 0.75$, $\alpha_1 = 0.25$ были получены оценки значений целевых функционалов

$$J_0 = 15.4554, \qquad J_1 = 18.0827, \tag{34}$$

а также матрицы обратной связи

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.0969 & -0.1319 \end{bmatrix}, \qquad K_2 = \begin{bmatrix} 0.0003 & -0.0004 \end{bmatrix},$$
$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.4158 & -0.0194 \\ 0.1665 & 0.0077 \\ -0.3850 & -0.0179 \end{bmatrix}, \qquad K_4 = \begin{bmatrix} -1.2566 & 0.0475 \\ 1.0444 & -0.1528 \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Для численного моделирования системы, замкнутой построенным регулятором, в качестве внешних возмущений выберем функции

$$w_i(k) = (-1)^k(\sin(0.2\pi ik) + 0.2i)e^{-0.1k}. \tag{36}$$

На рисунке 3 представлены графики переходных процессов в системе (33), замкнутой регулятором (35), под действием внешнего возмущения (36) и с нулевыми начальными условиями. Как видно, с течением времени отклонения целевых выходов агентов от среднего значения стремятся к нулю, что говорит о достижении консенсуса в сети.

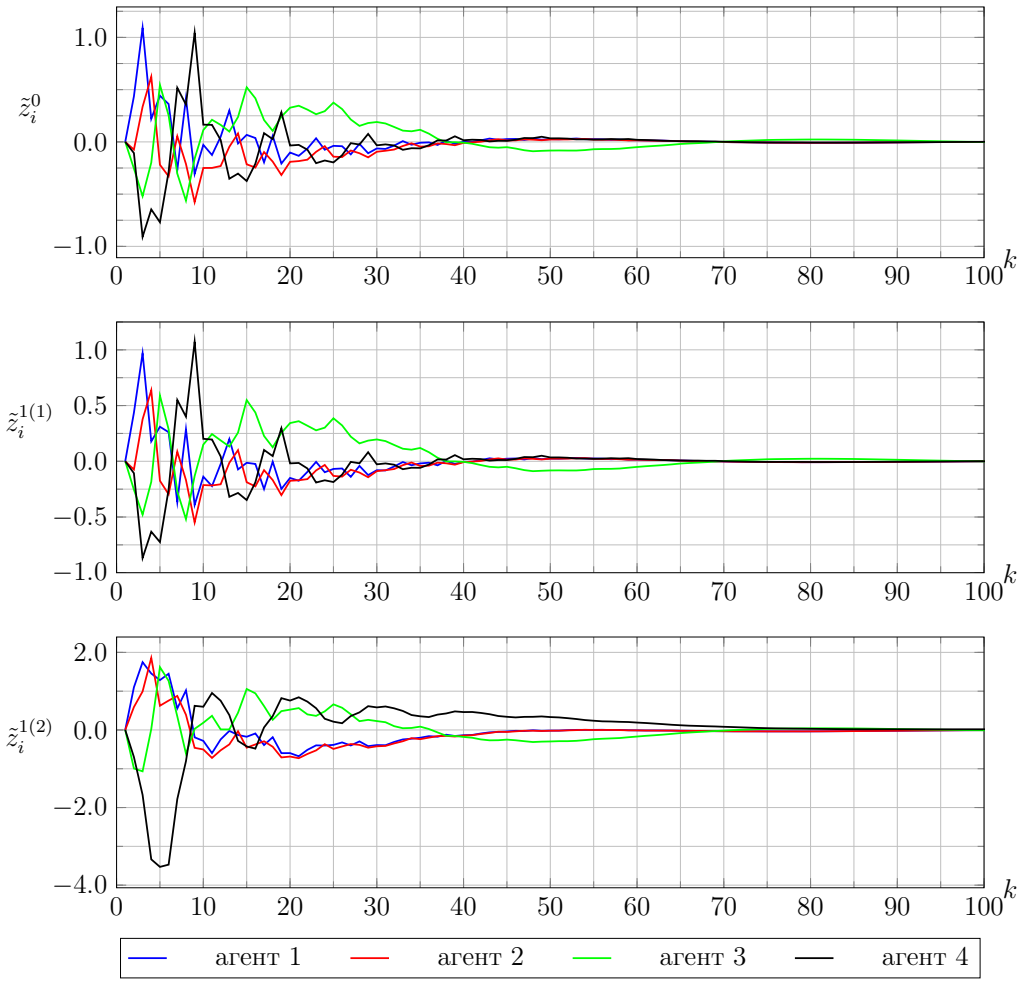


Рис. 3. Графики отклонения целевых выходов агентов от среднего значения в системе (33), замкнутой субоптимальным регулятором (35), с нулевыми начальными условиями и внешними возмущениями (36).

6. Заключение

В работе сформулированы достаточные условия решения многокритериальной задачи достижения обобщённого $\mathcal{H}_2$-консенсуса в сети неидентичных дискретных линейных агентов с постоянной топологией связей. Возможность применения полученных теоретических результатов показана с помощью численного моделирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект №0729-2020-0055) и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

Литература

1. Michael N., Fink J., Kumar V. Cooperative manipulation and transportation with aerial robots. Autonomous Robots. 2011. vol. 30. No. 1. pp. 73–86.

2. Okubo A. Dynamical aspects of animal grouping: Swarms, schools, flocks, and herds. Advances in Biophysics. 1986. vol. 22. pp. 1–94.

3. Olfati-Saber R., Fax J.A., Murray R.M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. Proceedings of the IEEE. 2007. vol. 95. No. 1. pp. 215–233.

4. Antonelli G. Interconnected dynamic systems: An overview on distributed control. IEEE Control Systems Magazine. 2013. vol. 33, No. 1. pp. 76–88.

5. Kia S. S., Scoy B. Van, Cortes J., Freeman R. A., Lynch K. M., Martınez S. "Tutorial on dynamic average consensus: The problem, its applications, and the algorithms," IEEE Control Systems Magazine, vol. 39, No. 3. pp. 40–72, Jun. 2019.

6. Rezaei M.H., Menhaj M.B., Stationary average consensus protocol for a class of heterogeneous high-order multi-agent systems with application for aircraft, Int. J. Syst. Sci. 2018. vol. 49. No. 10. pp. 1–15.

7. Lin P., Jia Y.M. Distributed robust H_∞ consensus control in directed networks of agents with time-delay. Systems and Control Letters. 2008. vol. 57, No. 8. pp. 643–653.

8. Gao L., Tong C., Wang L. H_∞ Dynamic Output Feedback Consensus Control for Discrete-Time Multi-Agent Systems with Switching Topology, 2013.

9. Баландин Д. В., Коган М. М. Оптимальное по Парето обобщённое H_2-управление и задачи виброзащиты // Автоматика и телемеханика, 2017, № 8, С. 76–90.

10. Balandin D.V., Kogan M.M. Multi-objective generalized H_2 control // Automatica. 2019. vol. 99, No. 1, pp. 317-322.

11. Wilson D.A. Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems //IEEE Trans. Autom. Control. 1989. vol. 34. pp. 94–97.

12. Wilson D.A. Extended Optimality Properties of the Linear Quadratic Regulator and Stationary Kalman Filter // IEEE Trans. Autom. Control. 1990. vol. 35. pp. 583-585.

13. Wilson D.A., Nekoui M.A., Halikias G.D. An LQR weight selection approach to the discrete generalized H_2 control problem // Int. J. Control. 1998. vol. 71. No. pp. 93–101.

MSC2020 93A16

Multi-objective consensus for linear multi-agent systems

R. S. Biryukov , E. S. Bubnova

Lobachevsky State University of Nizhniy Novgorod

Abstract: We consider the multi-objective generalized $\mathcal{H}_2$-consensus problem for discrete-time linear heterogeneous multi-agent systems subjected to external disturbances. The interaction topology among the agents is assumed to be constant and undirected. A sufficient condition in terms of linear matrix inequalities is proposed to solve the considered consensus problem. Finally, a simulation example is given to illustrate the obtained theoretical result.

Keywords: multi-agent systems, consensus, generalized $\mathcal{H}_2$-norm.

References

1. Michael N., Fink J., Kumar V. Cooperative manipulation and transportation with aerial robots. Autonomous Robots. 2011. vol. 30. No. 1. pp. 73–86.

2. Okubo A. Dynamical aspects of animal grouping: Swarms, schools, flocks, and herds. Advances in Biophysics. 1986. vol. 22. pp. 1–94.

3. Olfati-Saber R., Fax J.A., Murray R.M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. Proceedings of the IEEE. 2007. vol. 95. No. 1. pp. 215–233.

4. Antonelli G. Interconnected dynamic systems: An overview on distributed control. IEEE Control Systems Magazine. 2013. vol. 33, No. 1. pp. 76–88.

5. Kia S. S., Scoy B. Van, Cortes J., Freeman R. A., Lynch K. M., Martınez S. "Tutorial on dynamic average consensus: The problem, its applications, and the algorithms," IEEE Control Systems Magazine, vol. 39, No. 3. pp. 40–72, Jun. 2019.

6. Rezaei M.H., Menhaj M.B., Stationary average consensus protocol for a class of heterogeneous high-order multi-agent systems with application for aircraft, Int. J. Syst. Sci. 2018. vol. 49. No. 10. pp. 1–15.

7. Lin P., Jia Y.M. Distributed robust H_∞ consensus control in directed networks of agents with time-delay. Systems and Control Letters. 2008. vol. 57, No. 8. pp. 643–653.

8. Gao L., Tong C., Wang L. H_∞ Dynamic Output Feedback Consensus Control for Discrete-Time Multi-Agent Systems with Switching Topology, 2013.

9. Balandin D. V., Kogan M. M. Pareto optimal generalized H_2-control and vibroprotection problems. Autom. Remote Control, 78:8 (2017), 1417–1429.

10. Balandin D.V., Kogan M.M. Multi-objective generalized H_2 control. Automatica. 2019. vol. 99, No. 1, pp. 317-322.

11. Wilson D.A. Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems. IEEE Trans. Autom. Control. 1989. vol. 34. pp. 94–97.

12. Wilson D.A. Extended Optimality Properties of the Linear Quadratic Regulator and Stationary Kalman Filter. IEEE Trans. Autom. Control. 1990. vol. 35. pp. 583-585.

13. Wilson D.A., Nekoui M.A., Halikias G.D. An LQR weight selection approach to the discrete generalized H_2 control problem. Int. J. Control. 1998. vol. 71. No. 1. pp. 93–101.

УДК 519.63

Проекционно-итерационные методы решения одного класса гиперсингулярных интегральных уравнений *

Бойков И. В., Айкашев П. В., Бойкова А. И.

Пензенский государственный университет

Аннотация: В работе исследуются итерационно-проекционные методы решения линейных и нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений типа Прандтля. Рассматриваются уравнения Прандтля, определенные на сегменте $[-1,1]$ и на числовой оси $R_1 = (-\infty,\infty)$. Для построения вычислительных схем используются сплайн-коллокационные методы со сплайнами первого порядка. Обоснования сходимости предложенных вычислительных схем основаны на непрерывном методе решения операторных уравнений, позволяющем упростить условия, налагаемые на исходное уравнение. Дополнителной особенностью непрерывного операторного метода является его устойчивость к возмущению коэффициентов и правых частей уравнений.

Ключевые слова: гиперсингулярные интегральные уравнения, уравнение Прандтля, проекционные методы, итерационные методы, непрерывный операторный метод.

1. Введение

Сингулярное интегро-дифференциальное уравнение Прандтля в связи с его многочисленными применениями является предметом исследований многих ученых в прошлом и настоящем столетиях. Рассматриваются два вида уравнений Прандтля – уравнение короткого крыла

$$x(t) - \frac{a(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x'(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = f(t) \tag{1}$$

и уравнение на числовой оси $R_1 = (-\infty,\infty)$

$$x(t) - \frac{a(t)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x'(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = f(t)\,. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2), в предположении, что $x(\pm 1) = 0$ и $x(\pm\infty) = 0$, могут быть представлены в виде гиперсингулярных интегральных уравнений

$$x(t) - \frac{a(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^2} = f(t)\,, \tag{3}$$

$$x(t) - \frac{a(t)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^2} = f(t) \tag{4}$$

В течении нескольких последних декад исследуются уравнения типа Прандтля [1]

$$\frac{a(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)}{(\tau - t)^2}d\tau + g(t, x(t)) = f(t)\,,\ \ |t| < 1,\ \ x(\pm 1) = 0 \tag{5}$$

*Статья подготовлена при финансовой поддержке конкурса "Ректорские гранты договор № 1/РГ от 08.04.2020

К уравнениям вида (1) сводятся контактные задачи теории пластин и оболочек, задачи теории упругости для тел с тонкими прослойками [2], [3], задачи гидромеханики [4].

Для решения уравнения (2) с постоянными коэффициентами используются различные методы: точное аналитическое решение однородного уравнения на луче было получено с помощью интегральных преобразований Меллина и Лапласа, для получения точного аналитического решения неоднородного уравнения на луче было использовано преобразование Фурье.

Для приведения уравнения (1) к интегральному уравнению Фредгольма использовались методы аналитического продолжения, метод регуляризации Карлемана-Векуа, методы сведения к бесконечным системам алгебраических уравнений. Проекционным методам решения уравнения (1) посвящены многочисленные работы. Результаты, полученные в 20-40 гг. прошлого столетия, подытожены в монографии [4], в которой имеется обширная библиография. Результаты, полученные во второй половине прошлого столетия, представлены в монографиях [2], [3] и в статьях [5], [6]. Обзор современного состояния проблемы дан в статье [7].

Уравнение вида (5) с граничными условиями (2) находят широкое применение при решении ряда задач механики композитных материалов [8], [9], [10], [11]. Их приближенному решению посвящены работы [12], [1], [13], [14].

2. Проекционные методы решения линейных гиперсингулярных интегральных уравнений на сегменте $[-1, 1]$

2.1. Граничные условия $x(\pm 1) = 0$.

В этом разделе рассмотрим достаточно общее гиперсингулярное интегральное уравнение, частным случаем которого является уравнение (3).

Рассмотрим линейное гиперсингулярное интегральное уравнение вида

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} + \int_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \ \ -1 < t < 1. \tag{6}$$

Разделим сегмент $[-1, 1]$ на $2N$ интервалов точками $t_k = -1 + k/N$, $k = 0, 1, \ldots, 2N$. Будем искать приближенное решение уравнения (6) в виде кусочно-непрерывной функции

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{2N} \alpha_k \varphi_k(t), \tag{7}$$

где $\varphi_k(t), k = 0, 1, \ldots, 2N, -$ семейство базисных функций, определямых выражениями

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 0, & t_{k-1} \le t \le t_{k-1} + \frac{1}{N^2}, \\ \frac{N^2}{N-2}(t - t_{k-1}) - \frac{1}{N-2}, & t_{k-1} + \frac{1}{N^2} \le t \le t_k - \frac{1}{N^2}, \\ 1, & t_k - \frac{1}{N^2} \le t \le t_k + \frac{1}{N^2}, \\ -\frac{N^2}{N-2}(t - t_{k+1}) - \frac{1}{N-2}, & t_k + \frac{1}{N^2} \le t \le t_{k+1} - \frac{1}{N^2}, \\ 0, & t_{k+1} - \frac{1}{N^2} \le t \le t_{k+1}, \\ 0, & t \in [-1, 1] \backslash [t_{k-1}, t_{k+1}], \end{cases} \tag{8}$$

$k = 1, 2, \ldots, 2N - 1$. Для граничных узлов t_k, $k = 0$ и $k = 2N$ соответствующие базисные

функции имеют вид

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1, & -1 \le t \le -1 + \frac{1}{N^2}, \\ -\frac{N^2}{N-2}(t - t_1) - \frac{1}{N-2}, & -1 + \frac{1}{N^2} \le t \le t_1 - \frac{1}{N^2}, \\ 0, & t_1 - \frac{1}{N^2} \le t \le t_1, \\ 0, & [-1, 1] \backslash [t_0, t_1]; \end{cases} \tag{9}$$

и

$$\varphi_{2N}(t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t \le t_{N-1} + \frac{1}{N^2}, \\ \frac{N^2}{N-2}(t - t_{N-1}) - \frac{1}{N-2}, & t_{N-1} + \frac{1}{N^2} \le t \le 1 - \frac{1}{N^2}, \\ 1, & 1 - \frac{1}{N^2} \le t \le 1. \end{cases} \tag{10}$$

Коэффициенты α_k в (7) определяются из следующей системы алгебраических уравнений

$$a(t_k)x_N(t_k) + b(t_k)\sum_{l=0}^{2N}\alpha_l \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau - t_k)^2}d\tau + \sum_{l=0}^{2N} h(t_k, t_l)\alpha_l \int_{-1}^{1} \varphi_l(\tau)d\tau = f(t_k), \tag{11}$$

$k = 0, 1, \ldots, 2N$.

Обоснование вычислительной схемы (11) проводится в пространстве R_{2N+1} векторов $u = (u_1, \cdots, u_{2N+1})$ с нормой $\|u\|_1 = \max_{1 \le k \le 2N+1} |u_k|$. Обоснование базируется на непрерывном методе решения операторных уравнений [15].

2.2. Граничные условия $x(\pm 1) = \infty$.

Рассмотрим линейное гиперсингулярное интегральное уравнение вида

$$\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} + \int_{-1}^{1} h(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \ \ -1 < t < 1. \tag{12}$$

Разделим сегмент $[-1, 1]$ на $2N$ интервала точками $t_k = -1 + k/N$, $k = 0, 1, \ldots, 2N$. Будем искать приближенное решение уравнения (12) в виде кусочно-непрерывной функции (7) с базисными функциями (8), (9), (10).

Коэффициенты α_k в (7) определяются из следующей системы алгебраических уравнений

$$a(\bar{t}_k)x_N(\bar{t}_k) + b(\bar{t}_k)\sum_{l=0}^{2N}\alpha_l \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau - \bar{t}_k)^2}d\tau + \sum_{l=0}^{2N} h(\bar{t}_k, \bar{t}_l)\alpha_l \int_{-1}^{1} \varphi_l(\tau)d\tau = f(\bar{t}_k), \tag{13}$$

$k = 0, 1, \ldots, 2N$. Здесь $\bar{t}_0 = t_0 + 1/2N, \bar{t}_{2N} = t_{2N} - 1/2N$, $\bar{t}_k = t_k, k = 1, 2, \ldots, 2N - 1$.

Обоснование вычислительной схемы (13) проводится в пространстве R_{2N+1} векторов $u = (u_1, \cdots, u_{2N+1})$ с нормой $\|u\|_1 = \max_{1 \le k \le 2N+1} |u_k|$. Обоснование базируется на непрерывном методе решения операторных уравнений [15].

2.3. Приближенное решение уравнения (4)

Рассмотрим уравнение

$$a(t)x(t) + b(t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} + \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \ \ -\infty \le t \le \infty. \tag{14}$$

Обозначим через A достаточно большое положительное число и аппроксимируем уравнение (14) следующим гиперсингулярным интегральным уравнением

$$a(t)x(t) + b(t)\int_{-A}^{A}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} + \int_{-A}^{A}h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad -A \le t \le A. \tag{15}$$

Введем узлы $t_k = -A + \frac{A}{N}k,\ \ k = 0, 1, ..., 2N$, и обозначим через Δ_k интервалы $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})\,,\ \ k = 0, 1, ..., 2N-2$, $\Delta_{2N-1} = [t_{2N-1}, t_{2N}]\,.$

Приближенное решение уравнения (15) будем искать в виде сплайна $x_N(t) = \sum\limits_{k=0}^{2N}\alpha_k\varphi_k(t)$, где $\varphi_k(t), k = 0, 1, \ldots, 2N$, – множество базисных функций.

Для узлов t_k, $k = 1, \ldots, 2N-1$, соответствующие базисные функции определяются формулой

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 0, & t_{k-1} \le t \le t_{k-1} + \frac{A}{N^2}, \\ \frac{N^2}{A(N-2)}(t - t_{k-1}) - \frac{1}{N-2}, & t_{k-1} + \frac{A}{N^2} \le t \le t_k - \frac{A}{N^2}, \\ 1, & t_k - \frac{A}{N^2} \le t \le t_k + \frac{A}{N^2}, \\ -\frac{N^2}{A(N-2)}(t - t_{k+1}) - \frac{1}{N-2}, & t_k + \frac{A}{N^2} \le t \le t_{k+1} - \frac{A}{N^2}, \\ 0, & t_{k+1} - \frac{A}{N^2} \le t \le t_{k+1}, \\ 0, & t \in [-A, A]\backslash[t_{k-1}, t_{k+1}]. \end{cases}$$

Для граничных узлов t_k, $k = 0$ и $k = 2N$ соответствующие базисные функции определяются формулами

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1, & -A \le t \le -A + \frac{A}{N^2}, \\ -\frac{N^2}{A(N-2)}(t - t_1) - \frac{1}{N-2}, & -A + \frac{A}{N^2} \le t \le t_1 - \frac{A}{N^2}, \\ 0, & t_1 - \frac{A}{N^2} \le t \le t_1, \\ 0, & [-A, A]\backslash[t_0, t_1]; \end{cases}$$

и

$$\varphi_{2N}(t) = \begin{cases} 0, & -A \le t \le t_{N-1} + \frac{A}{N^2}, \\ \frac{N^2}{A(N-2)}(t - t_{N-1}) - \frac{1}{N-2}, & t_{N-1} + \frac{A}{N^2} \le t \le A - \frac{A}{N^2}, \\ 1, & A - \frac{A}{N^2} \le t \le A. \end{cases}$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из системы алгебраических уравнений

$$a(t_k)\alpha_k + b(t_k)\sum_{l=0}^{2N}\alpha_l\int\limits_{-A}^{A}\frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau-t_k)^2}d\tau + \sum_{l=0}^{2N}\alpha_l h(t_k, t_l)\int\limits_{-A}^{A}\varphi_l(\tau)d\tau = f(t_k), \tag{16}$$

$k = 0, 1, \ldots, 2N$.

Применив к (16) непрерывный метод решения операторных уравнений, получим систему

$$\frac{d\alpha_i(u)}{du} = \lambda_i \left(a(t_i)\,\alpha_i(u) + b(t_i) \sum_{l=0}^{2N} \alpha_l(u) \int_{-A}^{A} \frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau - t_i)^2} d\tau + \right. \tag{17}$$

$$\left. + \sum_{l=0}^{2N} h(t_i, t_l) \int_{-A}^{A} \alpha_l(u)\,\varphi_l(\tau) d\tau - f(t_i) \right), i = 0, ..., 2N.$$

Коэффициенты $\lambda_i = \pm 1, i = 0, \ldots, 2N$, выбираются из условия отрицательности логарифмической нормы в правой части системы (17).

3. Приближенное решение нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений типа Прандтля.

Приближенное решение уравнения

$$\frac{a(t)}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau + g(t, x(t)) = f(t), \;\; |t| < 1, \;\; x(\pm 1) = 0, \tag{18}$$

будем искать в виде непрерывной функции (7) с базисными функциями (8) (9), (10), коэффициенты которой находятся из системы нелинейных уравнений

$$\frac{a(t_k)}{\pi} \sum_{l=0}^{2N} \alpha_l \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau - t_k)^2} d\tau + g(t_k, \alpha_k) = f(t_k), \;\; k = 0, 1, \ldots, 2N. \tag{19}$$

Системе уравнений (19) ставится в соответствие система ОДУ

$$\frac{d\alpha_k(u)}{du} = \gamma_k \left(\frac{a(t_k)}{\pi} \sum_{l=0}^{2N} \alpha_l(u) \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau - t_k)^2} d\tau + g(t_k, \alpha_k(u)) - f(t_k) \right), \tag{20}$$

$k = 0, 1, \ldots, 2N$.

Коэффициенты $\gamma_k = \pm 1$, $k = 0, 1, \ldots, 2N$, выбираются таким образом, чтобы логарифмическая норма производной Фреше правой части системы (20) была бы отрицательной в некотором банаховом пространстве.

Для решения системы (20) может быть использован любой численный метод.

Сходимость решения системы (20) к решению уравнения (18) следует из непрерывного метода решения операторных уравнений [15]. Эффективность применения этого метода к решению нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений продемонстрирована в [16].

Литература

1. Capobianco M., Criscuolo G., Junghanns P. On the Numerical Solution of a Nonlinear Integral Equation of Prandtl's Type. // Operator Theory and its Applications. 2005. V. 160.

2. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука. 1983. 487 с.

3. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука. 1986. 334 с.

4. Голубев В.В. Лекции по теории крыла. М.: Л.: Гостехиздат. 1949. 480 с.

5. Каландия А. И. "Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применении в теории упругости", / Мат. сб. 1957. Т. 42, вып. 2. С. 249–272.

6. Шешко М. А., Расолько Г. А., Мастяница В. С. К приближенному решению интегро-дифференциального уравнения Прандтля // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 9. С. 1550–1560.

7. Сильвестров В. В., Смирнов А. В. Интегро-дифференциальное уравнение Прандтля и контактная задача для кусочно-однородной пластины // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. № 6. С. 951–968.

8. loakimidis N.I. Application of finite-part integrals to the singular integral equations of crack problems in plane and three-dimensional elasticity // Acta Mech. 1982. V. 45. P. 31–47.

9. Kaya A.C. Erdogan F. On the solution of integral equations with strong singularities // Quart. Appl. Math. 1945. V. 45. P. 105–122.

10. Nemat-Nasser S., Hori M. Toughening by partial or full bridging of cracks in ceramics and fiber reinforced composites // Mech. Mat. 1987. V. 6. P. 245–269.

11. Nemat-Nasser S., Hori M., Asymptotic solution of a class of strongly singular integral equations // SIAM J. Appl. Math. 1990. V. 50, N. 3. P. 716–725.

12. Berthold D., Hoppe W., Silbermann A. A fast algorithm for solving the generalize airfoil equation // J. Comp. Appl. Math. 1992. V. 43. P. 185–219.

13. Capobianco M.R. , Criscuolo G., Junghanns P. A fast algorithm for Prandtl's integro-differential equation // J. Comp. Appl. Math. 1997. V. 77. P. 103–128.

14. Capobianco M.R. , Criscuolo G., Junghanns P., Luther U. Uniform convergence of the collocation method for Prandtl's integro-differential equation // ANZIAM J. 2000. V. 42. P. 151–168.

15. Бойков И.В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 9. С. 1308–1314.

16. Boykov I.V., Roudnev V.A., Boykova A.I., Baulina O.A. New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations // Applied Numerical Mathematics. 2018. V. 127. P. 280–305.

MSC2020 65R30

Projection-iterative methods for solving one class of hypersingular integral equations

I. V. Boykov, P. V. Aykashev, A. I. Boykova

Penza State University

Abstract: Investigated iterative-projection methods for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations of Prandtl's type. We consider the Prandtl equations defined on the segment $[-1, 1]$ and on the numerical axis $R_1 = (-\infty, \infty)$. To construct computational schemes, spline-collocation methods with first order splines are used. Justification of the convergence of the proposed computational schemes is based on the continuous method for solving operator equations, which makes it possible to simplify the conditions imposed on the original equation. An additional feature of the continuous operator method is its stability against perturbation of the coefficients and the right-hand sides of the equations.

Keywords: hypersingular integral equations, Prandtl equation, projection methods, iterative methods, continuous operator method.

References

1. Capobianco M., Criscuolo G., Junghanns pp. On the numerical solution of a nonlinear Prandtl-type integral equation, *Operator theory and its applications*, 2005, vol. 160.

2. Aleksandrov V. M., Mkhitaryan S. M. Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers. Moscow: Nauka, 1983, 487 pp. (in Russian)

3. Aleksandrov V. M., Kovalenko, E. V. Problems of continuum mechanics with mixed boundary conditions, Moscow: Nauka, 1986, 334 pp. (in Russian)

4. Golubev V. V. Lectures on the theory of the wing. Moscow: L.: Gostekhizdat, 1949, 480 pp. (in Russian)

5. Kalandiya A. I. On a direct method for solving the equation of the wing theory and its application in the theory of elasticity, *Sb. Math.*, 1957, vol. 42, iss. 2, pp. 249–272. (in Russian)

6. Sheshko M. A., Rasolko G. A., Mastianica V. S. To the approximate solution of integro-differential equations of Prandtl, *Differ. equations*, 1993, vol. 29, iss. 9, pp. 1550–1560. (in Russian)

7. Silvestrov V. V., Smirnov A. V. Prandtl's integro-differential equation and contact problem for a piecewise homogeneous plate, *Applied mathematics and mechanics*, 2010, vol. 74, iss. 6, pp. 951–968.(in Russian)

8. Ioakimidis N. I. Application of finite-part integrals to singular integral equations of crack resistance problems in plane and three-dimensional elasticity, *Acta Mech*, 1982, vol. 45, pp. 31–47.

9. Kaya A. C., Erdogan F. On solving integral equations with strong singularities, *Quarts. Applied. Math.*, 1987, vol. 45, pp. 105–122.

10. Nemat-Naser S., Hori M. Strengthening by partial or complete overlap of cracks in ceramics and fiber reinforced composites, *Mekh. Mat.*, 1987, vol. 6, pp. 245–269.

11. Nemat-Nasser S., Hori M. Asymptotic solution of a class of strongly singular integral equations, *SIAM J. Appl. Math.*, 1990, vol. 50, iss. 3, pp. 716–725.

12. Berthold D., Hoppe V., Zilberman A. A fast algorithm for solving the generalized aerodynamic profile equation, *J. Compp. Applied. Math.*, 1992, vol. 43, pp. 185–219.

13. Capobianco M. R. , Criscuolo G., Junghanns P. A fast algorithm for the integro – differential equation of Prandtl, *J. Compp. Applied. Math.*, 1997, vol. 77, pp. 103–128.

14. Capobianco M. R., Criscuolo G., Junghanns P., Luther U. Uniform convergence of the method of collocation for integro-differential equation of Prandtl, *ANZIAM J.*, 2000, vol. 42, pp. 151–168.

15. Boykov I. V. One continuous method of solving nonlinear operator equations, *Differential equations*, 2012, vol. 48. iss. 9, pp. 1308–1314. (in Russian)

16. Boykov I. V., Rudnev V. A., Boykova A. I., Baulina O. A. A new iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations, *Applied numerical mathematics*, 2018, vol. 127, pp. 280–305.

УДК 519.63

Методы сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений в моделировании антенн*

Бойков И. В., Айкашев П. В.

Пензенский государственный университет

Аннотация: Работа посвящена обзору современных математических методов исследования электрических вибраторов и антенн. Отмечено, что основным математическим аппаратом при моделировании антенн являются интегральные уравнения - интегродифференциальное уравнение Поклингтона, интегральное уравнение Галлена, сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения. Показано, что физически и математически корректным аппаратом при моделировании электромагнитных процессов в вибраторе и исследовании электромагнитных полей антенн являются сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения. Представлена литература, в которой описаны методы сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений, используемых при моделировании электромагнитных процессов в антеннах различной топологии. Дан краткий обзор фрактальных антенн и отмечена связь между классическими фракталами и антеннами, построенными по топологии этих фракталов.

Ключевые слова: сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения, проволочные антенны, зеркальные антенны, фрактальные антенны

В настоящее время одним из основных технических средств получения и передачи информации являются антенны, выполненные из различных материалов, имеющие различную топологию и использующие при функционировании различные физические эффекты.

Поэтому исследование антенн является одним из наиболее быстро развивающихся направлений радиотехники. При этом наблюдается возрастающий интерес к построению и исследованию антенн, использующих композитные материалы и метаматериалы, фрактальных, лазерных и генетических антенн. Это связано с необходимостью миниатюризации электронных устройств, в том числе и антенн, как промышленного, так и бытового назначения. При этом антенны должны не только сохранять, но и улучшать свои электромагнитные характеристики. Экспериментальные исследования занимают много времени и обходятся очень дорого. В связи с этим возникает необходимость в разработке аналитических и численных методов анализа и синтеза антенн. При всем разнообразии антенн общим является математический аппарат, используемый при моделировании функционирования антенн - интегродифференциальные уравнения Поклингтона и Харрингтона [1], [2], интегральное уравнение Галлена [3], сингулярные интегральные уравнения [4], [5], [6] и гиперсингулярные интегральные уравнения [6], [7], [8]. В последнее время активно развиваются методы построения фрактальных [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], плазменных [18], [19] и генетических [20] антенн. Для интегродифференциальных уравнений Поклингтона и Харрингтона, интегрального уравнения Галлена, сингулярных интегральных уравнений и гиперсингулярный интегральных уравнений в общем случае не известны аналитические решения. Поэтому основным математическим аппаратом при исследовании антенн являются численные методы.

*Статья подготовлена при финансовой поддержке конкурса "Ректорские гранты договор № 1/РГ от 08.04.2020

Представляет интерес рассмотрение классов интегральных уравнений, используемых при моделировании различных типов антенн, и численных методов их решения.

Этим вопросам посвящена данная работа.

Впервые метод интегральных уравнений для исследования излучения вибратора был использован Поклингтоном [1]. Рассматривается прямолинейный симметричный проволочный вибратор длиной $2l$ с небольшим зазором посередине. Классическое уравнение Поклингтона прямолинейного вибратора имеет вид [21], стр. 222:

$$(k^2 + \frac{d^2}{dz^2}) \int\limits_{-l}^{l} I_z(z')G(a, z - z')dz' = A_z(a, z), \tag{1}$$

где $A_z(a, z)-$ продольная составляющая векторного электродинамического потенциала для электрического тока $I_z(z), 2l-$ длина вибратора, $a-$ радиус вибратора,

$$G(a, z - z') = \frac{1}{4\pi R_a(z - z')} \exp\{-ikR_a(z - z')\}$$

- функция Грина, $R_a(z - z') = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$, $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}/c, \varepsilon$ и $\mu-$ диэлектрическая и магнитная проницаемость среды, окружающая вибратор, $\omega-$ угловая частота, $c-$ скорость света.

Это уравнение соответствует модели тонкого вибратора, работающего на малых частотах. В этом случае ток распределяется по всему поперечному сечению провода и моделируется бесконечно тонкой линией, проходящей через центр цилиндра (провода) и точку разрыва.

Известна [22] следующая модификация уравнения Поклингтона:

$$E_s^r(s) = -\frac{i}{\omega\varepsilon} \int\limits_{s'} I_s(s')[k^2(s \cdot s') + \frac{\partial^2}{\partial s \partial s'}]\frac{e^{-ik|r-r'|}}{4\pi|r - r'|}ds', \tag{2}$$

где E_s^t - тангенциальное наложенное электрическое поле. Учитывая скин-эффект в тонкой проволоке, в уравнении (2) электрическое поле выражается в виде криволитейного интеграла по длине дуги s'.

Уравнение (2) можно использовать при любой топологии тонкой проволочной антенны.

Наряду с уравнением Поклингтона при исследовании вибраторов часто используется уравнение Галлена [3], [23]

$$\int\limits_{-l}^{l} I_z(z')G(a, z - z')dz' = A\cos\beta z + B\sin\beta z - \frac{i2\pi v}{w}\sin\beta|z|, \tag{3}$$

где A и B - произвольные константы, определяемые из граничных условий обращения тока в нуль на концах вибратора; $w = \beta/(\omega\varepsilon)$.

Так как решения уравнений (1)-(3) в аналитическом виде неизвестны, то для их решения широко применяются численные методы. Современные системы автоматического проектирования для решения этих уравнений используют следующие численные методы: метод моментов, конечно-разностные методы, метод конечных элементов. Наиболее широко применяются методы моментов и Галеркина [2], [22], [23], [24].

Уравнения (1)-(3) являются уравнениями Фредгольма первого рода, т.е. их решения некорректны по Адамару. При применении уравнений (1)-(3) к моделированию электромагнитных процессов в вибраторах приходится сталкиваться с проблемой построения методов регуляризации. В качестве алгоритмов регуляризации в работах авторов используется метод локальных невязок [14] и непрерывный метод решения операторных уравнений [17].

В работах [25] и [26] показано, что физически корректным является описание задач радиотехники и связи сингулярными интегральными уравнениями, и представлен алгоритм трансформации уравнения Поклингтона к сингулярным интегральным уравнениям. Сингулярные интегральные уравнения, как первого, так и второго рода (кроме исключительных случаев), являются корректными по Адамару задачами и для их численного решения используется широкий арсенал методов [27]. Такими же свойствами обладают гиперсингулярные интегральные уравнения. Обзор аналитических и численных методов решения последних представлен в [28], [29]. Таким образом, применение сингулярных интегральных уравнений к моделированию антенн является корректным, как с физической, так и с математической точки зрения.

Наряду с вычислительными, при моделировании электрических вибраторов уравнениями Поклингтона, Харрингтона и Галлена возникают следующие проблемы.

В работе [26] показано что определение неизвестного тока по уравнению

$$\int\limits_{-l}^{l} I_z(z')G(a, z-z')dz' = A_z^a(z),$$

где $A_z(z)-$ z-составляющая векторного электродинамического потенциала для электрического тока, определяемая через z-составляющую тока $I_z(z)$ на вибраторе, приводит к несогласованной постановке задачи, т.к. отсутствует предельный переход от поля в ближней зоне к полю (току) на поверхности вибратора. Это связано с использованием при расчете поля функции Грина $G(a, z-z') = \frac{1}{4\pi R_a(z-z')}\exp\{-ikR_a(z-z')\}, R_a(z-z') = \sqrt{(z-z')^2+a^2}$. В статье [26] функция Грина определяется другим выражением, приводящим к моделированию вибратора сингулярным интегральным уравнением.

В работе [8] в уравнениях Поклингтона и Галлена в функции Грина положено $a = 0$. Для решения полученных гиперсингулярных интегральных уравнений предложено несколько приближенных методов.

Сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения широко применяются при моделировании проволочных антенн.

В работах [31], [32] исследованы составные особые уравнения теории проволочных антенн

$$Kx \equiv \frac{a}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} + \frac{b}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{\tau-t} + \frac{c}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\ln|\tau-t|x(\tau)d\tau +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}h(t,\tau)d\tau = f(t), t\in(-1,1).$$

Здесь a, b, c - константы.

В нескольких частных случаях получено аналитическое решение приведенного выше уравнения. В общем случае предложен и обоснован приближенный метод.

В работе [33] предложен численно-аналитический метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений и дано приложение этого метода к анализу вибраторных антенн.

В монографии [6] представлены сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения, моделирующие различные антенны (зеркальные с рефлектором произвольной формы, зеркальные с плоским рефлектором, зеркальные с параболическим цилиндрическим рефлектором, полосковые, рамочные) и описаны численные методы их решения.

В последние годы сложилось новое направление в теории антенн - антенны с киральными элементами [34]. Основным математическим аппаратом при исследовании антенн с киральными включениями являются сингулярные интегральные уравнения [35], [36].

Начиная с конца прошлого века активно развиваются методы проектирования и конструирования фрактальных антенн. Это произошло благодаря уникальным характеристикам антенн с фрактальной геометрией. Фрактальные антенны обладают существенными преимуществами по сравнению с другими видами антенн.

Интересно проследить связь между построением фракталов, как математических объектов, и конструированием фрактальных антенн. Большинство фракталов, построенных в первой половине 20 века, получили воплощение в фрактальных антеннах: снежинка Коха - [37], [38]; ("ковер") Серпинского - [39], [40]; кривые Пеано, Гильберта - [41]; совершенное множество Кантора ("пыль"Кантора) - [42].

Подробному изложению методов построения антенн на классических фракталах посвящена глава в книге А.А Потапова [10].

Построение первых фракталов было связано с решением ряда фундаментальных проблем математического анализа, в частности проблемы связи непрерывности и дифференцируемости функций действительной переменной. Как отмечено в [10], первый пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции был построен Б. Больцано в 1830 г., но его рукопись «учение о функции» почти через 100 лет была найдена в Венской государственной библиотеке и опубликована только в 1920 г. В [10] отмечено, что непрерывные нигде не дифференцируемые функции относят к фрактальным функциям (или фракталам).

В 1861 г. К. Вейерштрасс построил функцию

$$f(x) = W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

которая в интервале $(0, 2\pi)$ нигде не дифференцируема. Здесь $0 < a < 1, b > 1-$ нечетное целое число, $ab > 1 + 3\pi/2$. Этот результат был опубликован только в 1875 г.

Позднее усилиями многих математиков было показано, что множество непрерывных функций, дифференцируемых хотя бы в одной точке пренебрежительно мало по сравнению с множеством нигде не дифференцируемых функций. В течение столетия, начиная с функции Римана (1961 г.)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2},$$

которая дифференцируема только в точках вида $\xi\pi$, где ξ – рациональное число с нечетным числителем и знаменателем, до публикации книги Б. Мандельброта [43], был построен ряд непрерывных нигде не дифференцируемых функций. Построение практически каждой такой функции было связано с решением внутренних проблем математики и требовало огромных усилий и изобретательности. После публикации книги Б. Мандельброта [43] идеи и методы фрактальной геометрии стали проникать в различные сферы физики и технологий. В отличии от математиков, многие из которых относились с предубеждением к исследованиям фрактальных функций, физики восприняли новое направление с энтузиазмом. В письме к Ф. Клейну Л. Больцман пишет (цитируется по книге [10]) «в природе существуют такие физические проблемы (статистическая механика), для решения которых не дифференцируемые функции совершенно необходимы, и если бы К. Вейерштрасс не придумал такие функции, то физикам просто не осталось бы ничего другого, как самим их изобрести». Востребованность фракталов в физике и технике стимулировала развитие общих методов их построения. В настоящее время существует несколько методов построения фракталов. Один из них - метод итеративных функций основан на методе сжимающих отображений в банаховых пространствах [44]. Этот метод подробно изложен в [45] стр. 96-126. В частности, представлены алгоритмы построения многих классических фракталов.

Термин "фрактальная антенна"появился впервые в статье [46]. Первые работы по применению фрактальной геометрии при конструировании антенн принадлежат Кохену [47],

[48]. В этих работах элементы фрактальной геометрии вводятся в конструкции стандартных дипольных и рамочных антенн. Это было сделано путем систематического придания проволоке антенны геометрии соответствующего фрактала таким образом, чтобы длина проволки не уменьшалась, а размеры антенны уменьшались с введением каждой следующей итерации. Этот подход позволяет проводить миниатюризации антенн. Были исследованы характеристики антенн, построенных в соответствии с геометрией фракталов Минковского и Коха [37], [47], [48]. Было показано, что характеристики фрактальных антенн Коха превосходят характеристики обычных антенн с прямыми проводами. Это явилось стимулом для разработки технологии быстрой оценки электрических характеристик фрактального диполя [37]. Различные варианты дипольных антенн Коха были представлены в работе [49]. Многодиапазонные фрактальные монопольные антенны, построенные на основе треугольника (салфетки, прокладки) Серпинского, исследовались в работах [39], [50]. В работе [39] представлена антенна, являющаяся пятым предфракталом прокладки Серпинского, построенная на равностороннем треугольнике с вершиной вниз, установленном на металлической подложке. Высота антенны 8.89 см. Переходные характеристики многодиапазонного монополя Серпинского исследованы в [50]. Многосторонние свойства предфракталов пятого порядка салфетки Сперанского исследованы в [40]. Наряду с моноблоками для построения антенн используются фрактальные деревья, причем исследованы двумерные и трехмерные деревья [51]. В конце прошлого столетия началось исследование и производство печатных фрактальных антенн [52], включая монополи Серпинского и Коха.

Моделированию фрактальных антенн с помощью аппарата гиперсингулярных интегральных работ посвящены работы [14], [15]. В них были рассмотрены антенны с геометрией предфракталов «пыли» Кантора, «салфетки» и «ковра» Серпинского второй и третьей итерации.

В настоящее время активно исследуются краевая задача Римана и сингулярные интегральные уравнения на фракталах [53]. На очереди теория гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах и приближенные методы решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах. Развитие этих направлений необходимо для создания математического аппарата исследования задач электродинамики на фракталах.

Литература

1. Pocklington H.C. Electrical Oscillations in Wires // Cambridge Phil. Soc. 1897. pp. 324-332.

2. Harrington R.F. Field Computation by Moment Methods. Macmillan. NY. 1956.

3. Hallen E. Nova Acta Regual Sci. Upsaliensis. 1938. Ser. 4. V. 11.

4. Неганов В. А., Матвеев И. В. Применение сингулярного интегрального уравнения для расчета тонкого электрического вибратора. // Докл. РАН. 2000. 373.1. С. 36-38.

5. Неганов В.А., Корнев М.Г. Применение метода сингулярного интегрального уравнения к анализу рамочной антенны // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2003. Т. 6. № 1. С.41-45.

6. Дементьев А. Н., Клюев Д. С., Неганов В. А., Соколова Ю. В. Сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения в теории зеркальных и полосковых антенн. Монография под ред. Д.С. Клюева. М.: Радиотехника. 2015. 216 с.

7. Клюев Д.С., Соколова Ю.В. Расчет характеристик зеркальных антенн методом гиперсингулярных интегральных уравнений. // Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60, № 1. С. 38-44.

8. Бойков И. В., Тарасов Д. В. Применение гиперсингулярных интегральных уравнений к численному моделированию электрического вибратора // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2008. № 4. С. 94-106.

9. Werner D.H., Gangul S. An Overview of Fractal Antenna. Engineering Research // IEEE Anlennas and Propagation Magazine. 2003. V. 45, N. 1. P. 38-57.

10. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки.–М.: Университетская книга. 2005. 848 с.

11. Потапов А.А. Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Пахомов А.А., Герман В.А. Новейшие методы обработки изображений/ Под редакцией А.А. Потапова. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2008. 496 с.

12. Потапов А. А. Фракталы, скейлинг и дробные операторы в физике и радиотехнике // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2009 № 1. С. 64-108.

13. Ахмед А. Проектирование антенн на основе геометрии фракталов. // Антенны. 2017. № 2. С. 33-39.

14. Бойков И.В., Айкашев П.В. Об одном численном методе синтеза фрактальных антенн // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. №1. С. 51-67.

15. Бойков И.В., Айкашев П.В. К вопросу об анализе и синтезе фрактальных антенн // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2018. №1. С. 92-100.

16. Boykov I.V., Aikashev P.V. To the numerical method for synthesis of fractal antennas // 2019 International Seminar on Electron Devices Desing and Production (SED). Prague, Czech Republic. 23-24 April 2019. P. 119-125.

17. Бойков И. В., Айкашев П.В. Применение непрерывного операторного метода к решению уравнений Поклингтона и Галлена для тонких проволочных антенн // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 3 (55). С. 131 - 150.

18. Пахотин В.А. Излучение электрически короткой антенны из ограниченного объема газоразрядной плазмы // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33, №8. С. 22-29.

19. Гусейн-заде Н.Г., Минаев И.М., Рухадзе К.З. Принципы работы плазменных антенн // Радиотехника и электроника. 2011. Т. 56, № 10. С. 1216-1220.

20. Altsuler E. Electrically Small Self–Resonant wire Antennas Optimized Using a Genetic Algorithm // IEEE Trans Ant Prop. 2003. V. 50, № 3. P. 297-300.

21. Сазонов Д. М. Антенны и устройства СВЧ. М.: Высшая школа. 1988. 434 с.

22. Barrera–Figueroa V., Sosa–Pedroza J., Lopez–Bonilla J. Simplification of Poklington's integral equation for arbitrary bent thin wires // WIT Transactions on Modelling and Simulation. 2005. V. 39. P. 563-574.

23. Вычислительные методы в электродинамике // Под редакцией Р. Митры. М.: Мир. 1977. 488 с.

24. Rawle W.D. The Method of Moments: A Numerical Technique for Wire Antenna Design // Higt Fraquency Electronics. 2006. V. 2. P. 43-47.

25. Неганов, В. А., Матвеев И.В., Медведев С.В. Метод сведения уравнения Поклингтона для электрического вибратора к сингулярному интегральному уравнению // Письма в ЖТФ. 2000. № 12. С.86-94.

26. Неганов, В. А. Сингулярные интегральные уравнения как метод физической регуляризации некорректных электродинамических задач радиотехники и связи // Успехи современной радиотехники. 2005. № 12. С. 16-24.

27. Бойков И.В. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений. Издательство ПГУ. 2004. 316 с.

28. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения М: Янус-К. 2001. 508 с.

29. Бойков И. В. Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений // Динамические системы. 2019. Т. 9(37), №3. С. 244-272.

30. Неганов В. А., Клюев В.С., Ефремова А.А. Сингулярные интегральные представления электромагнитного поля в ближней зоне // Антенны. 2005. № 4 (95). С. 22-26.

31. Лифанов И.К. Ненашев А.С. Исследование некоторых вычислительных схем для гиперсингулярного интегрального уравнения на отрезке // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 9. С. 1270-1275.

32. Лифанов И.К. К решению составных интегральных уравнений // Успехи современной радиоэлектроники. 2006. № 8. С. 62-67.

33. Эминов С.И. Аналитическое обращение гиперсингулярного оператора и его приложение в теории антенн// Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30, №.22. С. 8-16.

34. Неганов В. А., Осипов О.В. Отражающие, волноведущие и излучающие структуры с киральными элементами.- Радио и связь. 2006. 280 с.

35. Нещерет А.М. Применение сингулярных интегральных уравнений для анализа микрополосковых антенн, расположенных на киральной структуре из левовинтовых спиралей//Радиотехника. 2016. №4. С. 118-126.

36. Клюев Д.С., Нещерет А.М. Сингулярные интегральные уравнения для расчета микрополоскового вибратора, расположенного на киральной подложке// Евразийский союз ученых. 2015. № 14. С. 63-66.

37. Tang P. Scaling Property of the Koch Fractal Dipole // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest. 2000. V. 3. pp. 150-153.

38. Puente C., Romeu J., Pous R., Ramis J., Hijazo A. Small but Long Koch Fractal Monopole // IEE Electronics Letters. 1998. pp. 9-10.

39. Puente C., Romeu J., Pous R., Cardama A. On the Behavior of the Sierpinski Multiband Fractal Antenna // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1998. pp. 517-524.

40. Castany J. S., Robert J. R., C. Puente C. Mod-P Sierpinski Fractal Multiband Antenna // Proceedings of the Millennium Conference on Antennas and Propagation. 2000. Davos, Switzerland, April.

41. Anguera J., Puente C., and Soler J., "Miniature Monopole Antenna Based on the Fractal Hilbert Curve," // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest. 2002. V. 4. pp. 546-549.

42. Jaggard D. L. and Jaggard A. D., "Polyadic Cantor Superlattices with Variable Lacunarity" // Opt. Lett. 1997. pp. 145-147.

43. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований. 2002. 656 с.

44. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука. 1965. 520 с.

45. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Техносфера. 2006. 488 с.

46. Ким И., Джаггард Д. Л. Фрактальные случайные решетки // Труды Института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. 1986. Т. 74. № 9. С. 124–126.

47. Cohen N. Fractal Antennas: Part I// Communications Quarterly. 1995. pp. 7-22.

48. Cohen N. Fractal Antennas: Part 2// Communications Quartrrly. 1996. pp. 53-66.

49. Cohen N. Are Fractals Naturally Frequency Invariant Independent // 15 Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnatics (ACES). 1999. V. I. pp. 101-106.

50. Callejon J., Bretones A. R., Gomez M. R. On the Application of Parametric Models to the Transient Analysis of Resonant and Multiband Antennas // IEEE Transactions on Antennas and propagotion. 1998. pp. 312-317.

51. Gianvittorio J. P., Rahmat-Samii Y. Fractal Element Antennas: A Compilation of Configurations with Novel Characteristics // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digesl. 2000. V. 3. pp. 1688-1691.

52. Breden R., Langley R. J. Printed Fractal Antennas // Proceeding of the IEE National Conference on Antennas and Propagation. 1999. pp. 1-4.

53. Кац Б.А., Кац Д.Б. Интегрирование по неспрямляемым дугам и его приложения// Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60, № 1. С. 95-108.

MSC2020 78-03

Methods of singular and hypersingular integral equations in antenna modeling

I.V. Boykov [1], P.V. Aykashev [1]

Penza State University [1]

Abstract: The work is devoted to a review of modern mathematical methods for studying electric vibrators and antennas. It is noted that the main mathematical apparatus for modeling antennas are integral equations - Pocklington's integro-differential equation, Gallen's integral equation, singular and hypersingular integral equations. It is shown that singular and hypersingular integral equations are physically and mathematically correct apparatus for modeling electromagnetic processes in a vibrator and studying electromagnetic fields of antennas. The literature is presented, which describes the methods of singular and hypersingular integral equations used in modeling electromagnetic processes in antennas of various topologies. A brief review of fractal antennas is given and the connection between classical fractals and antennas constructed according to the topology of these fractals is noted.

Keywords: singular and hypersingular integral equations, wire antennas, mirror antennas, fractal antennas

References

1. Pocklington H.C. Electrical Oscillations in Wires *Cambridge Phil. Soc.*, 1897, pp. 324-332.
2. Harrington R.F. Field Computation by Moment Methods. Macmillan. NY. 1956.
3. Hallen E. Nova ActaRegual Sci. Upsaliensis. 1938. S. 4. vol. 11.
4. Neganov vol. A., Matveev I. vol. Application of the singular integral equation for calculating a Thin electric vibrator. *Dokl. RAS.*, 2000, 373, 1, pp. 36-38. (in Russian)
5. Neganov vol. A., Kornev M. G. Application of the singular integral equation method to the analysis of the frame antenna *Physics of wave processes and radio engineering systems*, 2003, Vol. 6, No. 1, pp. 41-45. (in Russian)
6. Dementiev A. N., Klyuev D. S., Neganov vol. A., Sokolova Yu. vol. Singular and hypersingular integral equations in the theory of mirror and strip antennas. Monograph under the editorship of D. S. Klyuyevol. M.: Radio Engineering. 2015. 216 p. (in Russian)
7. Kluev D. S., Sokolova Yu. vol. Calculation of the characteristics of mirror antennas by the method of hypersingular integral equations. *Radio engineering and electronics*, 2015, Vol. 60, No. 1, pp. 38-44.(in Russian)
8. Boikov I. vol., Tarasov D. vol. Application of hypersingular integral equations to numerical modeling of an electric vibrator *News of higher educational institutions. Volga region. Technical science*, 2008, N. 4, pp. 94-106. (in Russian)
9. Werner D.H., Gangul S. An Overview of Fractal Antenna. Engineering Research *IEEE Anlennas and Propagation Magazine*, 2003, vol. 45. N. 1. pp. 38-57.

10. Potapov A. A. Fractals in Radiophysics and radar: The topology of the sample. Moscow: Universitetskaya kniga. 2005. 848 p. (in Russian)

11. Potapov A. A., Gulyaev Yu. vol., Nikitov S. A., Pakhomov A. A., Herman vol. A. Latest image processing methods/ Edited by A. A. Potapovol. - M.: FIZMATLIT. 2008. 496 p. (in Russian)

12. Potapov A. A. Fractals, scaling and fractional operators in physics and radio engineering *Radionics. Nanosystems. Information technology*, 2009, N. 1, pp. 64-108. (in Russian)

13. Ahmed A. Antenna design based on fractal geometry. *Antennae*, 2017, N. 2, pp. 33-39. (in Russian)

14. Boikov I. vol., Aikashev P. vol. On a numerical method for the synthesis of fractal antennas *News of higher educational institutions. Volga region. Physical and mathematical Sciences*, 2017, N. 1, pp. 51-67. (in Russian)

15. Boykov I. vol., Akashev P. vol. To the question about the analysis and synthesis of fractal antennas *University proceedings, Volga region, Technical science*, 2018, N. 1, pp. 92-100. (in Russian)

16. Boykov I. vol., Aikashev P. vol. To the numerical method for synthesis of fractal antennas *2019 International Seminar on Electron Devices Desing and Production (SED)*, Prague, Czech Republic, 23-24 April 2019, pp. 119 -125.

17. Boykov I. vol., P. vol. Akashev the continuous Application of operational method to the solution of the equations of Pocklington and Gallen for thin wire antennas *University proceedings, Volga region, Physical and mathematical sciences, Mathematics*, 2020, N. 3 (55), pp. 131-150. (in Russian)

18. Pakhotin vol. A. Radiation of an electrically short antenna from a limited volume of gas-discharge plasma. 2007. vol. 33. N. 8. pp. 22-29. (in Russian)

19. Huseyn-zade N. G., Minaev I. M., Rukhadze K. Z. Principles of operation of plasma antennas *Radio engineering and electronics*, 2011, vol. 56, N. 10, pp. 1216-1220 (in Russian) .

20. Altsuler E. Electrically Small Self-Resonant Wire Antennas Optimized Using a Genetic Algorithm *IEEE Trans Ant Prop*, 2003, vol. 50, N. 3, pp. 297-300.

21. Sazonov, D. M. Antennas and microwave devices. Moscow: Higher school. 1988. 434 p. (in Russian)

22. Barrera-Figueroa vol., Sosa-Pedroza J., Lopez-Bonilla J. Simplification of Poklington's integral equation for arbitrary bent thin wires *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, 2005, vol. 39, pp. 563-574.

23. Computational methods in electrodynamics Edited by R. Mitra. M.: Mir. 1977. 488 p. (in Russian)

24. Rawle W.D. The Method of Moments: A Numerical Technique for Wire Antenna Design *Higt Fraquency Electronics* 2006, vol. 2, pp. 43-47.

25. Neganov vol. A., Matveev I. vol., Medvedev S. vol. Method for reducing the Pocklington equation for an electric vibrator to a singular integral equation *Technical physics letters*, 2000, N. 12, pp. 86-94. (in Russian)

26. Neganov, vol. A. Singular integral equations as a method of physical regularization of ill-posed electrodynamic problems in radio engineering and communications *Successes of modern radio engineering*, 2005, N. 12, pp. 16-24. (in Russian)

27. Boykov I. vol., An approximate solution of singular integral equations. Publishing house of the University. 2004. 316 p. (in Russian)

28. Vainikko G. M., Lifanov I. K., Poltavsky L. N. Numerical methods in hypersingular integral equations and their applications M: Janus-K. 2001. 508 p. (in Russian)

29. Boykov I. vol. Analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations *Dynamical systems 2019*, vol. 9(37), N. 3, 244-272. (in Russian)

30. Neganov vol. A., Klyuev vol. S., Efremova A. A. Singular integral representations of the electromagnetic field in the near zone *Antennas*, 2005, № 4 (95), pp. 22-26. (in Russian)

31. Lifanov I. K. Nenashev A. S. Investigation of some computational schemes for a hypersingular integral equation on a segment *Differential equations*, 2005, vol. 41, N. 9, pp. 1270-1275. (in Russian)

32. Lifanov I. K. On solving composite integral equations *Advances in modern radio electronics*, 2006, N. 8, pp. 62-67. (in Russian)

33. Eminov S. I. Analytical inversion of the hypersingular operator and its application in antenna theory *Technical physics letters*, 2004, vol. 30, N.22, pp. 8-16. (in Russian)

34. Neganov vol. A., Osipov O. vol. Reflecting, wave-conducting and radiating structures with chiral elements. Radio and communications. 2006. 280 p. (in Russian)

35. Neshcheret A.M. Application of singular integral equations for the analysis of microstrip antennas located on a chiral structure of levovint spirals *Radio Engineering*, 2016, N. 4, pp. 118–126. (in Russian)

36. Klyuev D. S., Neshcheret A.M. Singular integral equations for calculating a microstrip vibrator located on a chiral substrate *Eurasian Union of scientists*, 2015, N. 14, pp. 63-66. (in Russian)

37. Tang P. Scaling Property of the Koch Fractal Dipole *IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest*, 2000, vol. 3, pp. 150-153.

38. Puente C., Romeu J., Pous R., Ramis J., Hijazo A. Small but Long Koch Fractal Monopole *IEE Electronics Letters*, 1998, pp. 9-10,

39. Puente C., Romeu J., Pous R., Cardama A. On the Behavior of the Sierpinski Multiband Fractal Antenna *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1998, pp. 517-524.

40. Castany J. S., Robert J. R., C. Puente C. Mod-P Sierpinski Fractal Multiband Antenna *Proceedings of the Millennium Conference on Antennas and Propagation*, 2000, Davos, Switzerland, April.

41. Anguera J., Puente C., and Soler J., "Miniature Monopole Antenna Based on the Fractal Hilbert Curve," *IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest*, 2002, vol. 4, pp. 546-549.

42. Jaggard D. L. and Jaggard A. D., "Polyadic Cantor Superlattices with Variable Lacunarity" *Opt. Lett.*, 1997, pp. 145-147.

43. Mandelbrot B. Fractal geometry of nature. Moscow: Institute of computer research. 2002. 656 p. (in Russian)

44. Lyusternik L. A., Sobolev vol. I. Elements of functional analysis. Moscow: Nauka. 1965. 520 p. (in Russian)

45. Kronover R. M. Fractals and chaos in dynamic systems. M.: Technosphere. 2006. 488 p. (in Russian)

46. Kim I. Jaggard D. L. Fractal random lattices *Proceedings institute of electrical and radio electronics engineers*, 1986, vol. 74, N. 9, pp. 124-126. (in Russian)

47. Cohen N. Fractal Antennas: Part I *Communications Quarterly*, 1995, pp. 7-22.

48. Cohen N. Fractal Antennas: Part 2 *Communications Quartrrly*, 1996, pp. 53-66.

49. Cohen N. Are Fractals Naturally Frequency Invariant Independent *15 Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnatics (ACES)*, 1999, vol. 1, pp. 101-106.

50. Callejon J., Bretones A. R., Gomez Martin R. On the Application of Parametric Models to the Transient Analysis of Resonant and Multiband Antennas *IEEE Transactions on Antennas and Propagotion*, 1998, pp. 312-317.

51. Gianvittorio J. P., Rahmat-Samii Y. Fractal Element Antennas: A Compilation of Configurations with Novel Characteristics *IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digesl*, 2000, vol. 3, pp. 1688-1691.

52. Breden R., Langley R. J. Printed Fractal Antennas *Proceeding of the IEE National Conference on Antennas and Propagation*, 1999, pp. 1-4.

53. Katz B. A., Katz D. B. integration over non-straight arcs and its applications *Siberian mathematical journal*, 2019, vol. 60, N. 1, pp. 95-108. (in Russian)

УДК 004.42:004.771

Разработка комплекса программ мониторинга и управления рабочим столом удаленного компьютера

Буткина А. А., Кривова С. В., Шамаев А. В.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В статье описан процесс разработки комплекса программ мониторинга и управления рабочим столом удаленного компьютера, который может применяться при проведении научных мероприятий в дистанционной форме. В работе представлены результаты анализа сетевых протоколов, диаграммы вариантов использования, стек средств и технологий разработки, результаты тестирования работоспособности комплекса программ.

Ключевые слова: программное обеспечение, мониторинг, удаленное управление, клиент, сервер, сетевое взаимодействие.

В настоящее время в связи с возрастающей ролью дистанционных форм взаимодействия между участниками научного сообщества все большее значение приобретает организация возможности удаленного доступа организаторов научных мероприятий (международных конференций, школ-семинаров, форумов, защит диссертаций и т. п.) к компьютерам их участников. Поэтому разработка комплекса программ, позволяющего централизованно выполнять мониторинг и управление приложениями, установленными на компьютерах удаленных пользователей, является актуальной задачей. Целью данной работы является разработка подобного комплекса программ. Для достижения этой цели были поставлены и решены следующие задачи:

- изучение существующих технологий и протоколов удаленного доступа;
- анализ существующих аналогов разработанного комплекса программ;
- определение функциональных требований к разрабатываемому комплексу программ;
- выбор средств и технологий разработки;
- разработка архитектуры комплекса программ мониторинга и управления;
- реализация и тестирование разработанного комплекса программ.

Для организации удаленного управления используются различные варианты сетевых протоколов, среди которых наиболее широко распространены следующие:

- **Telnet** (telecommunications network) – сетевой протокол передачи данных телекоммуникационной сети;
- **SSH** (Secure Shell) – протокол прикладного уровня, обеспечивающий защищенное соединение;
- **RFB** (Remote Frame Buffer) – клиент-серверный сетевой протокол для удалённого доступа к графическому рабочему столу компьютера;
- **RDP** (Remote Desktop Protocol) – протокол, созданный компанией Microsoft для обеспечения удаленного доступа к серверам и рабочим станциям Windows.

В результате проведенного в работе анализа перечисленных сетевых протоколов для организации удаленного доступа в разработанном комплексе программ был использован протокол RDP. Рассмотрим принцип его работы более подробно. После установления соединения на транспортном уровне инициализируется удаленная сессия, в рамках которой согласуются различные параметры передачи данных [1]. После успешного завершения фазы инициализации сервер терминалов (удаленный пользователь) начинает передавать клиенту (наблюдателю) графический вывод и ожидает получение входных данных от устройств

ввода (клавиатуры и мыши). В качестве графического вывода может выступать как точная копия экрана, передаваемая как изображение, так и команды на отрисовку графических примитивов (прямоугольник, линия, эллипс, текст и другие). Передача вывода с помощью примитивов является приоритетной для протокола RDP, так как это позволяет значительно экономить трафик; а полное изображение передается лишь в том случае, если иное невозможно по каким-либо причинам. Удаленный клиент обрабатывает полученные команды и выводит изображения с помощью своей графической подсистемы. Сигналы нажатия и отпускания клавиши передаются отдельно с помощью специального флага. Введенные пользователем символы передаются путем отправки скан-кодов клавиатуры.

В настоящее время существует множество программных продуктов, реализующих функционал удаленного доступа. Все они отличаются используемыми протоколами, доступными функциями, системными требованиями и интерфейсами.

В работе был выполнен анализ следующего программного обеспечения, решающего задачу удаленного доступа:

- TeamViewer;
- Chrome Remote Desktop;
- Microsoft Remote Desktop;
- AnyDesk;
- AeroAdmin;
- Ammyy Admin;
- а также целый класс программ для удаленного мониторинга, которые не предоставляют возможности управления, а лишь позволяют просматривать удаленный рабочий стол (например, приложения для отслеживания деятельности офисных сотрудников).

Среди приведенных аналогов разрабатываемого комплекса программ наиболее широким функционалом обладает программный продукт TeamViewer [2], основными функциями которого являются:

- возможность осуществлять удаленное управление;
- возможность организовать совместную работу на одном устройстве;
- наличие файлового менеджера для организации обмена файлами;
- возможность обмена текстовыми сообщениями (функция «Чат»);
- возможность проведения онлайн-конференций в аудио- и видеоформате, а также в режиме демонстрации экрана (функция «Конференция»);
- возможность выполнения видеозаписи изображения экрана удаленного устройства.

Однако рассмотренные выше аналоги, во-первых, требуют приобретения дорогостоящих лицензий, во-вторых, имеют ограничения на количество одновременно подключенных устройств, в-третьих, содержат либо неполный, либо избыточный функционал, в связи с чем возникает потребность в создании нового программного продукта.

При проектировании комплекса программ был использован унифицированный язык моделирования UML, а для реализации программных модулей – платформа .NET и язык программирования C#, интерфейс прикладного программирования (API) Windows Desktop Sharing, средства создания интерфейса Windows Forms и объекты управления платформы ActiveX.

Модульная структура разрабатываемой системы с описанием ее интерфейса и всех ключевых функциональных элементов были ранее описаны авторами в [3].

Приведем описание функциональных требований к разработанной системе в виде диаграмм вариантов использования. Комплекс программ должен представлять собой два приложения для персонального компьютера, работающих под управлением операционной системы Microsoft Windows, программу-клиент и программу-наблюдатель. Программа-клиент должна предоставлять доступ к экрану компьютера, на котором она установлена. Она должна быть установлена на рабочие станции участников научных мероприятий и поз-

волять выполнить подключение к приложению-наблюдателю. Пользователь данной программы должен иметь возможность задавать настройки подключения, выбирать область демонстрации; выполнять подключение к программе-наблюдателю; производить обмен текстовыми сообщениями и файлами с организаторами научного мероприятия; регулировать доступ к управлению своим экраном, а также приостанавливать и возобновлять его демонстрацию. Программа-наблюдатель должна обнаруживать и обрабатывать имеющиеся клиентские подключения, выводить информацию о них и осуществлять доступ к удаленному компьютеру. Пользователями данной программы являются организаторы научных мероприятий, которые должны иметь возможность выполнять мониторинг или управление программным обеспечением компьютеров участников, а также обмениваться с ними файлами и текстовыми сообщениями.

Варианты использования для программы-клиента (Рис. 1) и для программы-наблюдателя (Рис. 2) выделены разными цветами в зависимости от типа реализуемого функционала:

- работа с подключением (синий цвет);
- мониторинг (желтый цвет);
- управление (зеленый цвет);
- общение (красный цвет).

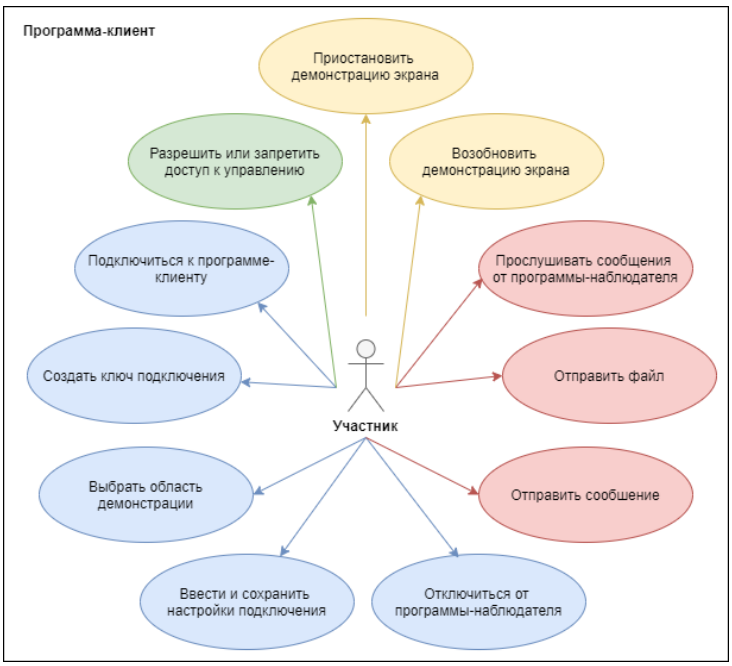


Рис. 1. Диаграмма вариантов использования для программы-клиента

На основе сформулированных функциональных требований к комплексу программ была разработана его логическая модель, представленная в виде совокупности диаграмм классов. Помимо диаграмм классов для программы-клиента и программы-наблюдателя, также потребовалось создание дополнительного решения **Utils**, содержащего классы, являющиеся общими для указанных программ.

Программа-клиент, диаграмма классов которой изображена на рис. 3, строится на основе трех классов: **FormClient**, **Client**, **Settings**, и ссылается на классы из общей библиотеки классов **Utils**.

Класс **FormClient** используется для создания экземпляра формы, которая отвечает за функционирование пользовательского интерфейса. Данный класс содержит поля ти-

Рис. 2. Диаграмма вариантов использования для программы-наблюдателя

пов Button (кнопка), TextBox (текстовое поле), RichTextBox (расширенное текстовое поле), CheckBox (флажок), CheckBoxList (список флажков). Объекты кнопок используются для выполнения команд пользователя, флажки – для выбора каких-либо опций, в текстовые поля вводится информация об участниках, их IP-адресах и номере порта сервера. Текстовые поля также используются для вывода информации: статуса операций, сгенерированной строки подключения, сообщений чата. Практически все методы в классе FormClient – обработчики событий манипулирования элементами управления формы. Кроме того, класс FormClient содержит поле client, которое отвечает за основную логику установления соединения с программой-наблюдателем и обработку данных.

Класс **Client** реализует интерфейс IDisposable, предназначенный для уничтожения неуправляемых ресурсов. В классе содержатся такие поля, как client (абстракция клиентского подключения по протоколу TCP), messageBrocker (отвечает за отправку и получение сообщений через сетевой поток NetworkStream), rdpSession (реализует сессию удаленного доступа), connectionString (хранит уникальную строку подключения), messageListener (поток, прослушивающий сообщения, поступающие от программы–наблюдателя), settings (задает настройки подключения), user (поле, описывающее пользователя), authorizationData (генерирует уникальную строку подключения), connect (флаг состояния подключения), listenOn (флаг статуса прослушивания сообщений). Также класс реализует следующие методы: ConnectTcp (подключение к серверу по протоколу TCP), CreateRdpSession (создает сессию удаленного доступа по протоколу RDP), CreateConnectionString (создает уникальную строку подключения на основании данных авторизации), Listening (прослушивает сообщения, поступающие от программы-наблюдателя, и выполняет различные действия в зависимости от типа сообщения), SendConnectionCommad (отправляет программе-наблюдателю команду о подключении клиента), Disconnect (отключение от программы-наблюдателя), ChangeControl (изменяет уровень доступа программы-наблюдателя к своему компьютеру), Incoming (добавляет в соответствующий список нового участника удаленной сессии), SetAppForSharing (перебирает список работающих приложений и устанавливает статус каждого из них), GetApplicationName (извлекает наименование окна программы).

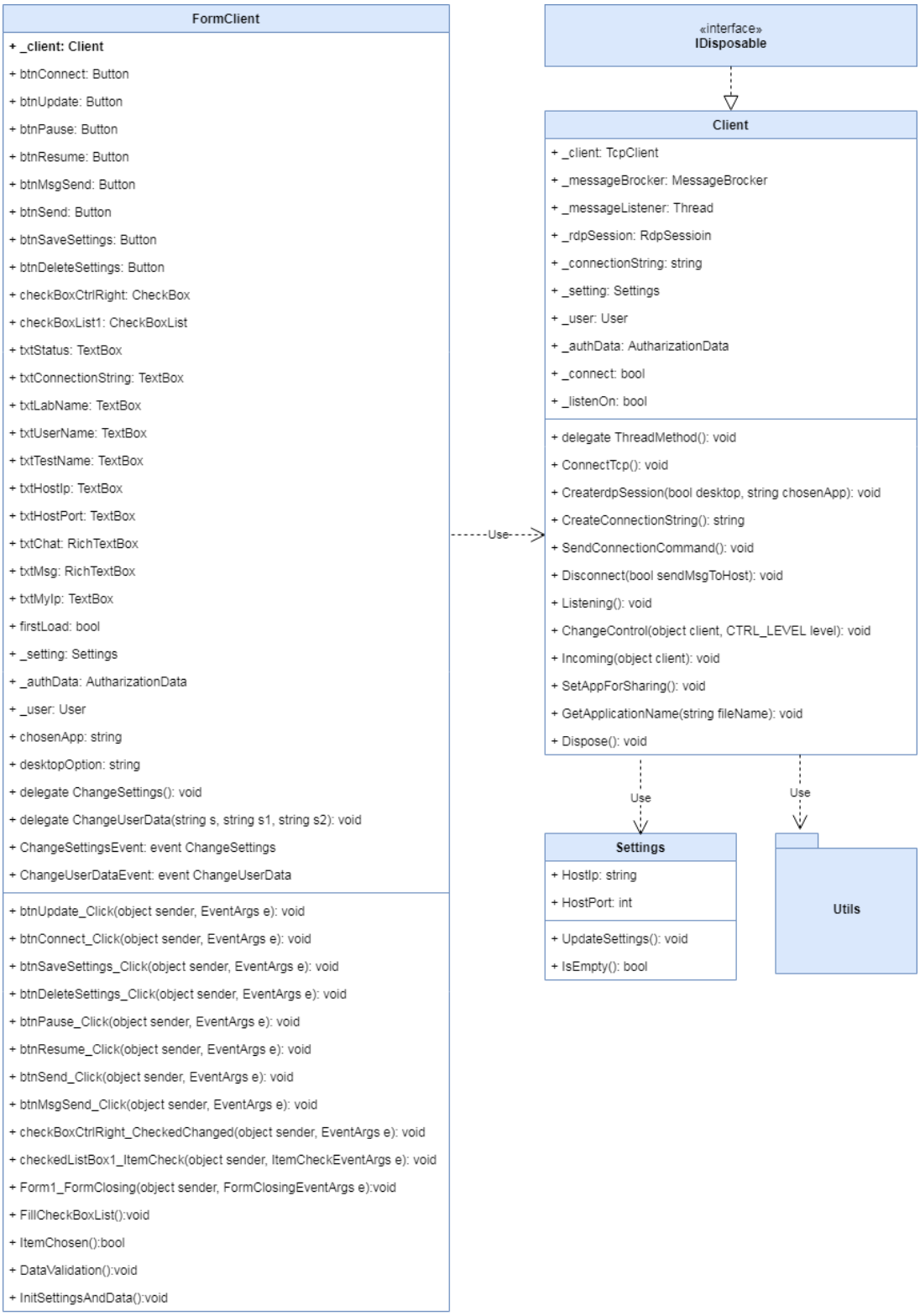


Рис. 3. Диаграмма классов для программы-клиента

Класс **Settings** содержит поля, обозначающие IP-адрес и номер порта сервера, а также методы для их проверки на пустоту и обновления.

На рис. 4 приведена диаграмма классов для пакета **Utils**, который содержит пакет моделей, пакет команд, класс **MessageBrocker**, реализующего функции обмена сообщениями, а также дополнительные классы **UpdateGUI** для обновления элементов управления форм и **CurrentIP** для вычисления собственного IP-адреса.

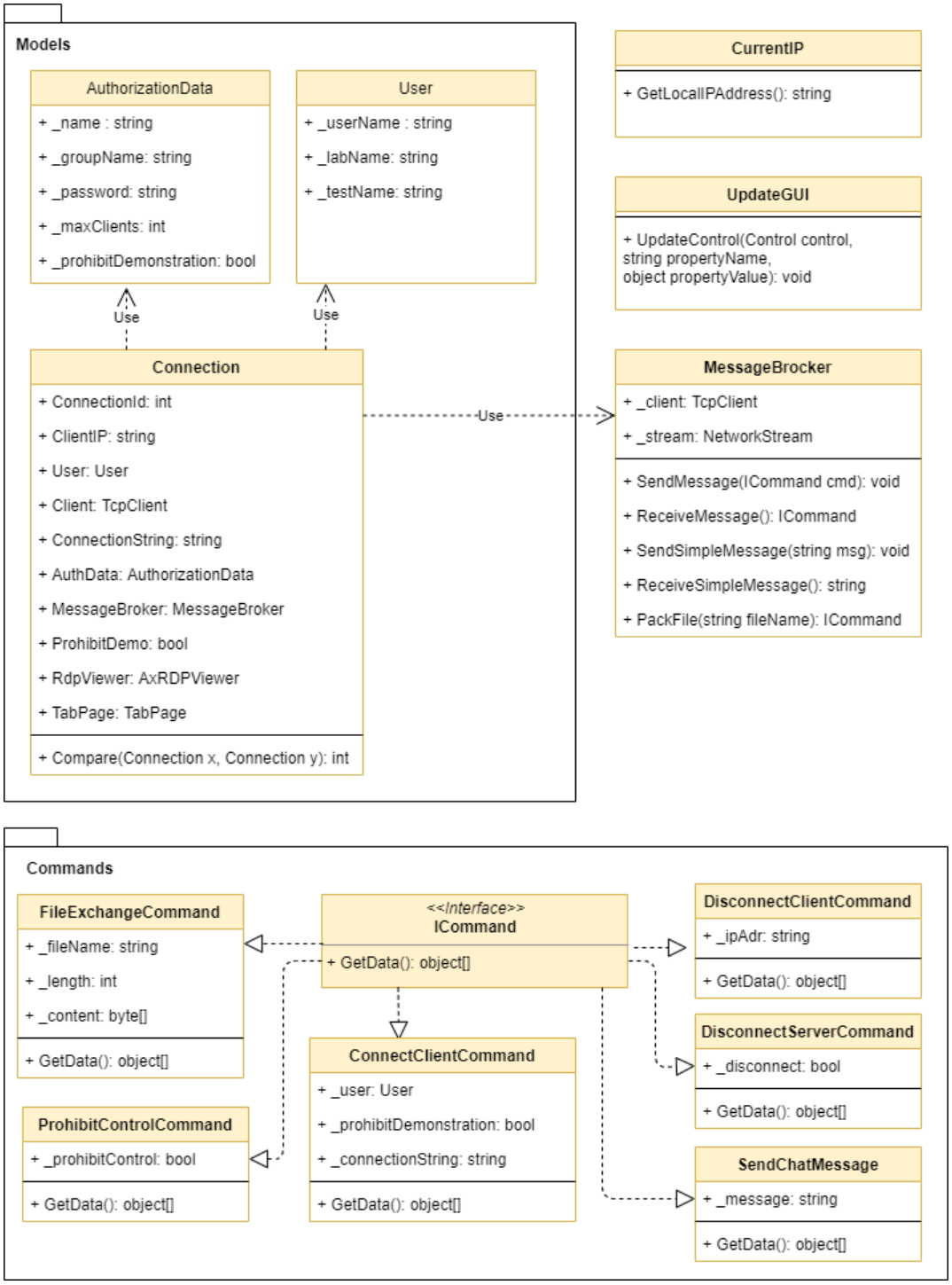


Рис. 4. Диаграмма классов для общей библиотеки классов Utils

Пакет моделей в **Utils** содержит класс **User**, который является абстракцией участника конференции (пользователя программы-клиента), класс **AuthorizationData**, который

содержит данные авторизации пользователя, необходимые для генерации уникальной строки подключения, и класс **Connection**, который является абстракцией клиентского подключения к серверу. Поля RdpViewer является экземпляром объекта управления платформы ActiveX, отвечающим за отображения экрана удаленного компьютера. Поле Tab – создаваемая для каждого нового клиентского подключения вкладка на форме программы-наблюдателя. Назначение остальных полей данного класса в пояснении не нуждается.

Пакет команд в библиотеке **Utils** содержит набор классов команд, пересылаемых между программой-клиентом и программой-наблюдателем, среди которых следует выделить интерфейс **ICommand**, который реализуют все остальные команды в пакете.

Диаграмма классов программы-наблюдателя (рис. 5) содержит класс **ViewerForm**, отвечающий за представление формы прослушивания подключений и логику обработки новых подключений, функций управления и демонстрации удаленного рабочего стола.

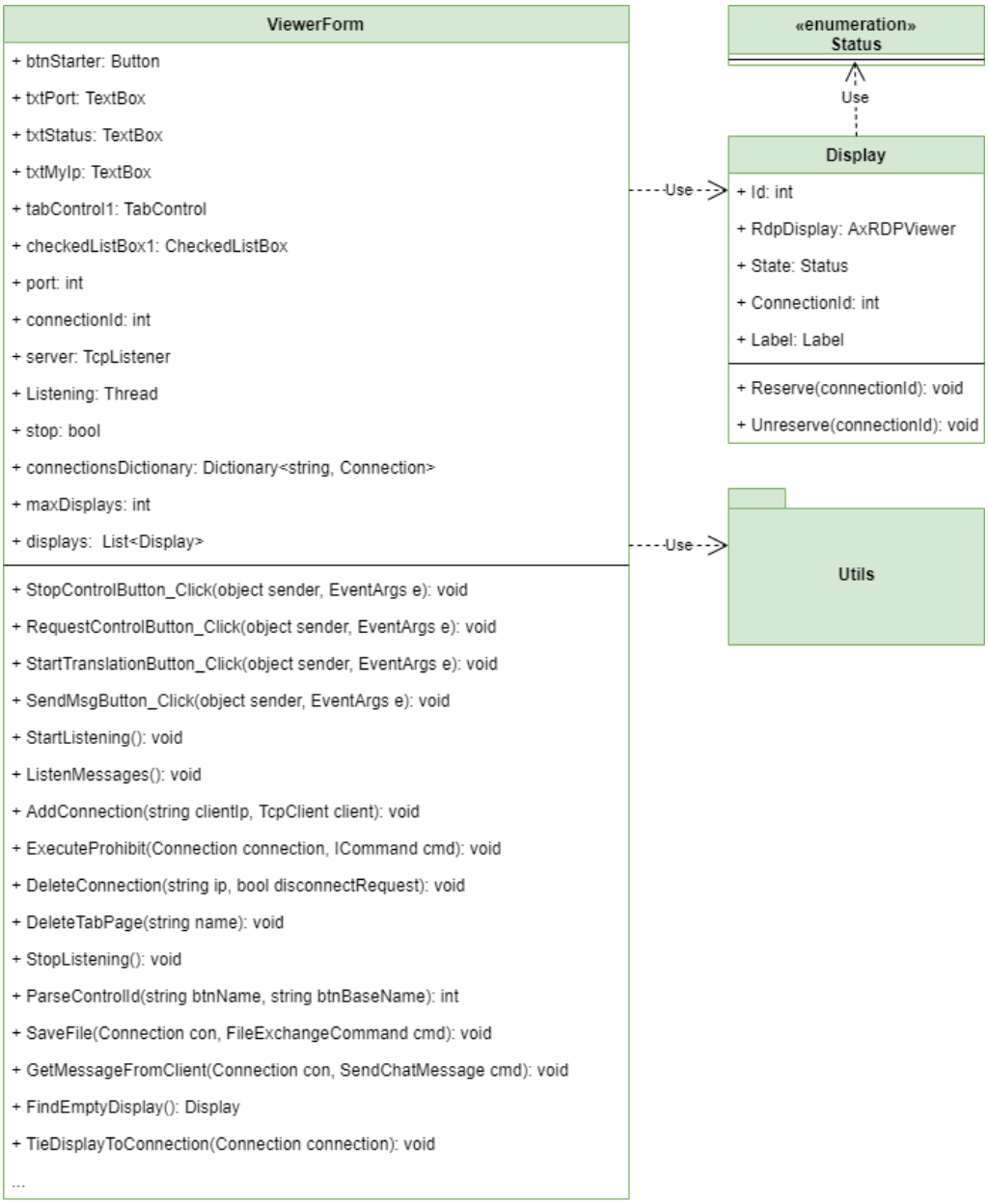


Рис. 5. Диаграмма классов для программы-наблюдателя

Класс ViewerForm использует класс **Display** – абстракцию экрана на вкладке программы-наблюдателя, который предназначен для отображения экрана рабочего стола удаленного клиента. Данный класс содержит метод Reserve для связывания экземпляра экрана с каким-либо из существующих подключений и метод Unreserve для удаления связи между экземпляром экрана и подключением. Класс **Display** в свою очередь использует перечисление Status, которое используется для отображения статуса экрана на вкладке программы-наблюдателя – занят (в данный момент транслирует экран удаленного пользователя) или свободен. Кроме того, класс **ViewerForm** также, как и класс **FormClient** ссылается на классы из общей библиотеки классов **Utils**.

В целях проверки работоспособности разработанного комплекса программ было выполнено тестирование всех вариантов его использования, представленных на рис. 1, 2, с применением соответствующих тестовых сценариев. Успешность выполнения всех рассмотренных авторами сценариев позволяет сделать вывод о корректности функционирования разработанного комплекса программ мониторинга и управления рабочим столом удаленного компьютера. Таким образом, данный комплекс программ может быть успешно применен для организации возможности удаленного доступа организаторов научных мероприятий к компьютерам их участников, что подтверждает практическую значимость работы.

Литература

1. Рублев С. Протокол Remote Desktop. Архитектура и возможности [Электронный ресурс]: SecurityLab.ru. – Режим доступа: https://www.securitylab.ru/analytics/367591.php.

2. Как работает TeamViewer: Полное руководство [Электронный ресурс]: TeamViewer. – Режим доступа: https://www.teamviewer.com/ru/документы/.

3. Кривова С. И., Шамаев А. В. Разработка программного обеспечения автоматизированной системы поддержки испытательного процесса // Материалы XXIII научно-практической конференции молодых ученых, аспирантов и студентов Национального исследовательского Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва. сб. статей. – Саранск, 2019. – С. 235-238. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_41178342_40846536.pdf.

MSC2020 68N19, 68M99

Development of a complex of programs for monitoring and managing a desktop of a remote computer

A. A. Butkina[1], S. I. Krivova[1], A.V. Shamaev[1]

National Research Ogarev Mordovia State University [1]

Abstract: The article describes the process of development complex of programs for monitoring and managing a desktop of a remote computer, which can be used when conducting scientific events in a remote form. The article presents the results of the analysis of network protocols, use case diagrams, a set of development tools and technologies, results of testing of the complex of programs.

Keywords: software, monitoring, remote control, client, server, networking.

References

1. Rublev S. Remote Desktop Protocol. Architecture and capabilities. SecurityLab.ru (in Russian). URL: https://www.securitylab.ru/analytics/367591.php (In Russian).

2. How TeamViewer Works: A Complete Guide. TeamViewer. URL: https://www.teamviewer.com/en/documents/ (In Russian).

3. Krivova S.I., Shamaev A.V. Development of the virtual simulator for test engineer of the laboratory of mechanical tests. Proceedings of the XXIII scientific and practical conference of young scientists, postgraduates and students of the National Research Ogarev Mordovia State University. Collection of articles. Saransk, 2019. pp. 235 238. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_41178342_40846536.pdf (in Russian).

УДК 519.63

Численное исследование спектральных свойств деформированного листа графена*

Гришанов Е. Н., Грязева О. С.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В статье представлены результаты численного моделирования деформированного листа графена с различными типами периодических деформаций. Моделирование проводилось с использованием разработанной программы для численного исследования спектральных свойств периодических наноструктур в магнитных полях. Проведено сравнение спектральных свойств оператора модели для различных типов деформаций.

Ключевые слова: деформированный графен, явнорешаемые модели, теория самосопряженных расширений.

1. Построение математической модели

С момента первых экспериментальных работ [1] интерес к исследованию двумерного монослоя углерода, называемого графеном, неизменно возрастал. Особый интерес представляет изучение влияния различного рода дефектов на свойства графена. Помимо дефектов самой кристаллической структуры, таких как дефект Стоуна – Уэйлса, лист графена может быть деформирован различным образом как в результате взаимодействия с материалом подложки так и в следствии чисто механического воздействия [2]. При этом на листе графена могут появляться волны, "кочки"и другие подобные структуры [3, 4]. Как показано в работе [5], такие деформации могут оказывать существенное влияние на транспортные свойства графена. В этой связи представляет интерес построение математической модели листа графена с различного рода периодическими деформациями и исследование влияния этих деформаций на спектральные свойства модели.

Построение математической модели заряженной частицы (электрона) в графене с периодическими деформациями, помещенном в однородное магнитное поле, будем проводить при помощи метода, предложенного в работе [6]. Рассмотрим оператор Ландау – гамильтониан заряженной частицы с зарядом e и массой m, помещенной в однородное магнитное поле $\mathbf{B}$

$$H_L = \frac{\hbar}{2m}\left(i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2, \tag{1}$$

где c – скорость света, $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{r}$ – векторный потенциал магнитного поля. Считаем, что оператор (1) задан на пространстве $L^2(\mathbf{R}^3)$. Будем моделировать взаимодействие рассматриваемой частицы с атомами углерода в графене при помощи возмущения оператора (1) потенциалами нулевого радиуса, расположенными в узлах $2d$-периодической решетки $\Gamma = \Lambda + K$, где Λ – решетка Браве рассматриваемой системы, а K – множество узлов (атомов) в элементарной ячейке. Выбирем элементарную ячейку таким образом, чтобы ее размеры оказались равными для всех трех рассматриваемых в настоящей работе структур: графена без деформаций (Рис. 1), волнообразно деформированного графена (Рис. 2) и

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Мордовия в рамках научного проекта №18-41-130004.

графена с периодическими деформациями типа "кочка"(Рис. 3). Обозначим через $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ образующие решетки Λ. Возмущенный оператор формально запишем в виде

$$\hat{H} = H_L + \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{\alpha}\delta_\gamma, \tag{2}$$

где $\hat{\alpha}$ – коэффициент, описывающий взаимодействие с единичным атомом, а $\delta_\gamma\psi = \psi(\gamma)$.

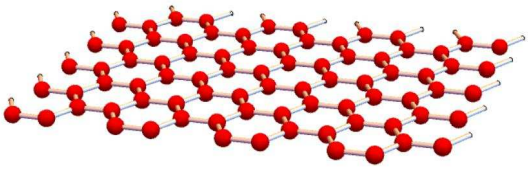


Рис. 1. Лист графена без деформаций.

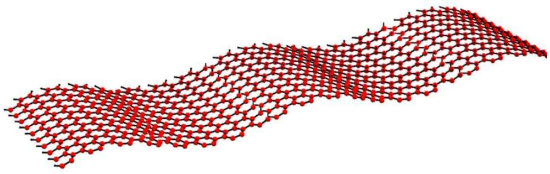


Рис. 2. Волнообразно деформированный графен.

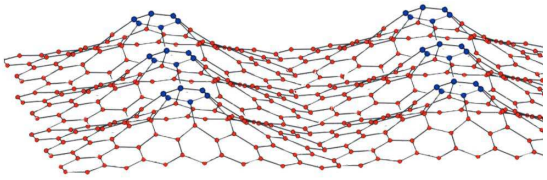


Рис. 3. Графен с периодическими деформациями типа "кочка".

Для построения гамильтониана модели воспользуемся процедурой сужения – расширения [7]. Рассмотрим оператор

$$H^0 = \sum_{\gamma\in\Gamma}^{\oplus} H_\gamma, \tag{3}$$

где $H_\gamma = H_L$. Обозначим через S сужение H^0 на пространство

$$\mathcal{D} = \{\psi \in D(H^0) : \psi(\gamma) = 0\}. \tag{4}$$

Для пары операторов H^0, S все самосопряженные расширения S, дизъюнктные с H^0, получим при помощи формулы М.Г. Крейна для резольвент

$$R_A(z) = R^0(z) - G(z)[Q(z) - A]^{-1}G^*(\bar{z}), \tag{5}$$

где R_A – резольвента расширения, R^0 – резольвента H^0, G и Q – Γ-функция и Q-функция Крейна соответственно. Каждому оператору A, заданному в т.н. пространстве граничных значений, размерность которого совпадает с индексом дефекта S, соответствует определенное самосопряженное расширение H_A оператора S. Среди всех всех таких расширений условиям задачи будут соответствовать лишь те, которые будут инвариантны относительно магнитных трансляций на векторы решетки Браве Γ. Согласно [6], в рассматриваемом случае оператор A можно выбрать в виде $A = \alpha I$, где параметр $\alpha = 0.0934219$ выбирается из физических соображений. Здесь и далее в расчетах использована т.н. атомная система единиц, в которой $\hbar = e = c, m = \frac{1}{2}$.

Из (5) получим следующее выражение для функции Грина G_A оператора H_A.

$$G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; z) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; z) - \sum_{\gamma,\gamma'\in\Gamma} [Q(z) - A]^{-1}_{\gamma,\gamma'} G_0(\mathbf{r}, \gamma; z) G_0(\gamma', \mathbf{r}'; z), \tag{6}$$

где G_0 – функция Грина для невозмущенного оператора, явное выражения которой известно из [8]

$$G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}';z) =$$

$$= \frac{m\sqrt{\xi}}{2\pi\hbar^2}\exp\left[-\pi i\xi(\mathbf{r}\times\mathbf{r}') - \pi\xi\frac{(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)^2}{2}\right]\int\limits_0^\infty \frac{\exp\left[-\pi\xi\left(\frac{\mathbf{r}_\perp^2}{e^t-1}+\frac{\mathbf{r}_\parallel^2}{t}\right)\right]}{(1-e^{-t})\sqrt{t}\exp\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{4\pi\xi}\right)t\right]}dt. \qquad (7)$$

Здесь $\mathbf{r}_\perp$ – проекция вектора $\mathbf{r}$ на плоскость решетки Браве Λ,а $\mathbf{r}_\parallel = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\perp$, ξ – плотность потока магнитного поля через элементарную ячейку решетки, выраженная в квантах. Выражение для Q-функции также известно и элементы ее матрицы имеют вид

$$Q(\gamma,\gamma';z) = \begin{cases} G_0(\gamma,\gamma';z), \text{при } \gamma \neq \gamma'; \\ \frac{m\sqrt{\xi}\mathcal{Z}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{z}{4\pi\xi}\right)}{2\hbar^2\sqrt{\pi}}, \text{при } \gamma = \gamma', \end{cases} \qquad (8)$$

где $\mathcal{Z}$ – это ζ-функция Гурвица. Как показано в [6], в случае рациональных значений потока магнитного поля $\eta = N/M$ ($N \in \mathbf{Z},\ M \in \mathbf{N}$) через элементарную ячейку решетки Λ при помощи разложения представления группы магнитных трасляций по спектру неприводимых задача исследования спектра гамильтониана модели H_A может быть сведена к решению т.н. дисперсионного уравнения

$$\det[\tilde{Q}(\mathbf{p};z) - \tilde{A}(\mathbf{p})] = 0, \qquad (9)$$

где $\mathbf{p} \in \mathbf{T}^2_\eta = [0;1/M)\times[0;1)$. Матрицы $\tilde{A}$ и $\tilde{Q}$ имеют блочную структуру с размерами блоков $|K|\times|K|$. Причем матрица $\tilde{A}$ – диагональна, а матрица $\tilde{Q}$ состоит из блоков вида

$$\tilde{Q}(\mathbf{p};m,\mathbf{k};m,'\mathbf{k}';z) =$$

$$= \exp[\pi i(m-m')\xi(\mathbf{k}\times\mathbf{a_2})]\sum_{\lambda\in\Lambda} Q(\lambda_1\mathbf{a_1} + (\lambda_2 M + m - m')\mathbf{a_2} + \mathbf{k},\mathbf{k}';z)\cdot$$

$$\cdot\exp\left[\pi i\xi(\mathbf{k}\times(\lambda_1\mathbf{a_1}+\lambda_2 M\mathbf{a_2})) - 2\pi i(\lambda\mathbf{p} + \eta\lambda_1(\lambda_2 M + m + m')/2)\right], \qquad (10)$$

где $\mathbf{k},\mathbf{k}' \in K,\ m,m' = 0,\ldots,M-1,\ \lambda = (\lambda_1,\lambda_2)$. Таким образом, расчетные формулы получены в явном виде.

2. Численный анализ и обсуждение результатов

Из (5) ясно, что спектр гамильтониана модели H_A будет состоять из двух множеств – спектра невозмущенного оператора H_0 и решений дисперсионного уравнения (9). Известно, что

$$\sigma(H_L) = \{\hbar\omega(l+1/2) : l \in \mathbf{Z}_+\},\ \omega = \frac{|e\mathbf{B}|}{2c}.$$

Следовательно, спектр H_0 состоит из бесконечное число раз вырожденных спектральных чисел из $\sigma(H_L)$. Решениями (9) будут $|K|M$ непрерывно зависящих от $\mathbf{p} \in \mathbf{T}^2_\eta$ функций $z_l(\mathbf{p})$, определяющих зоны в спектре H_A.

Уравнение (9) было решено численно при помощи специально разработанной программы для вычислительного кластера. Расчеты выполнялись на вычислительном кластере факультета математики и информационных технологий Национального исследовательского Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва. По результатам проведенного численного моделирования построены диаграммы зависимости энергии заряженной частицы (в электрон-вольтах) от потока магнитного поля (в квантах) через элементарную ячейку решетки периодов Λ. Полученные диаграммы приведены на Рис. 4, Рис. 5 и Рис. 6.

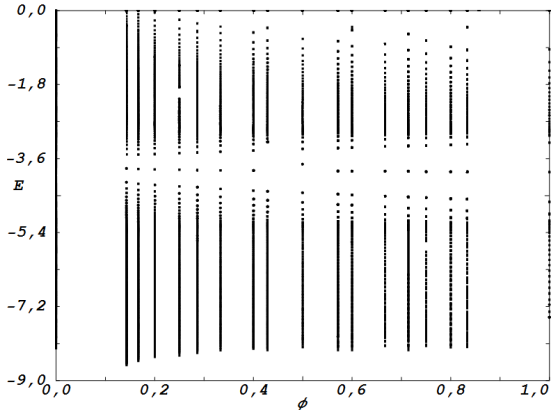


Рис. 4. Диаграмма "поток-энергия"для листа графена без деформаций.

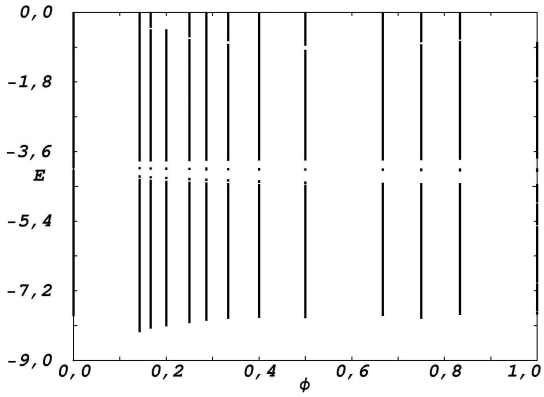


Рис. 5. Диаграмма "поток-энергия"для волнообразно деформированного графена.

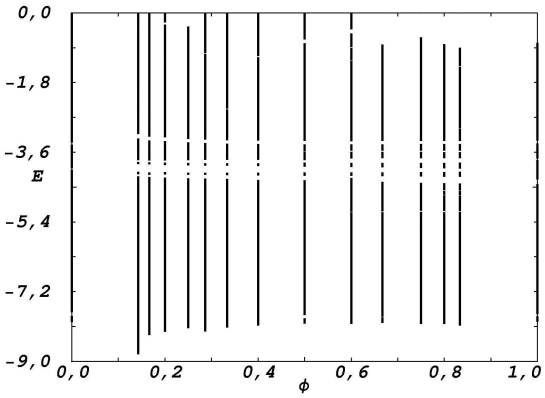


Рис. 6. Диаграмма "поток-энергия"для графена с деформациями типа "кочка".

Анализ построенных диаграмм показывает, что деформации рассмотренных типов приводят к существенному изменению спектра графена, а значит и его транспортных свойств. В частности, необходимо отметить появление небольших лакун в спектре деформированного графена в случае отсутствия внешного магнитного поля. В то же время, при наличии магнитного поля ширина зон в спектре деформированного графена возрастает и лакуны уменьшаются.

Литература

1. Novoselov K. S., Geim A. K., Morozov S. V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S. V., Grigorieva I. V., Firsov A. A. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films. Science. 2004. vol. 306. pp. 666—669.

2. Deng S., Berry V. Wrinkled, rippled and crumpled graphene: an overview of formation mechanism, electronic properties, and applications. Materials Today. 2016. pp. 197-212.

3. Partovi-Azar P., Nafari N., Reza Rahimi Tabar M. Interplay between geometrical structure and electronic properties in rippled free-standing graphene. Physical Review B 83. 2011. pp. 165434.

4. Lee J.-K., et al. Modification of electrical properties of graphene by substrate-induced nanomodulation. Nano Letters 13. 2013. pp. 3494.

5. Teague M.L., et al. Evidence for strain-induced local conductance modulations in single-layer graphene on SiO_2. Nano Letters 9. 2009. pp. 2542-2546.

6. Geyler V.A., Pavlov B.S., Popov I.Yu. One-Particle Spectral Problem for Superlattice with a Constant Magnetic Field. Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 46. 1998. pp. 79-124.

7. Павлов Б.С. Теория расширений и явнорешаемые модели // УМН, 1987. Т. 42, вып. 6(258). С. 99–131.

8. Гейлер В.А., Демидов В.В. Спектр трехмерного оператора Ландау, возмущенного периодическим точечным потенциалом// ТМФ, 1995. Т. 103, № 2. С. 283–294.

MSC2020 34G10, 58D25

Numerical Investigation on the Spectral Properties of Deformed Graphene Sheet

E. N. Grishanov, O. S. Gryazeva

National Research Mordovia State University

Abstract: The article presents the numerical modeling results of deformed graphene sheet with different types of periodic deformations. Simulation was carried out using a developed program for numerical investigation on the spectral properties of periodic nanostructures in magnetic fields. The spectral properties of the model operator for different types of deformations were compared.

Keywords: deformed graphene, explicit solveble models, the theory of self-adjoint extensions.

References

1. Novoselov K. S., Geim A. K., Morozov S. V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S. V., Grigorieva I. V., Firsov A. A. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films. Science. 2004. Vol. 306. pp. 666—669.

2. Deng S., Berry V. Wrinkled, rippled and crumpled graphene: an overview of formation mechanism, electronic properties, and applications. Materials Today. 2016. pp. 197-212.

3. Partovi-Azar P., Nafari N., Reza Rahimi Tabar M. Interplay between geometrical structure and electronic properties in rippled free-standing graphene. Physical Review B 83. 2011. pp. 165434.

4. Lee J.-K., et al. Modification of electrical properties of graphene by substrate-induced nanomodulation. Nano Letters 13. 2013. pp. 3494.

5. Teague M.L., et al. Evidence for strain-induced local conductance modulations in single-layer graphene on SiO_2. Nano Letters 9. 2009. pp. 2542-2546.

6. Geyler V.A., Pavlov B.S., Popov I.Yu. One-Particle Spectral Problem for Superlattice with a Constant Magnetic Field. Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 46. 1998. pp. 79-124.

7. Pavlov B.S. The theory of extensions and explicity-solvable models. Russ. Math. Surv. 1987. vol. 42, No. 6. pp. 127–168. (in Russian).

8. Geyler V.A., Demidov V.V. Spectrum of three-dimensional Landau operator perturbed by a periodic point potential. TMF. 1995. vol. 103, No. 2. pp. 283-294. (in Russian).

УДК 001.891.573

Математическое моделирование эффективности введения противоэпидемических карантинных мер на примере распространения COVID-19

Еремеева Н. И., Марасова И. А., Савельева А. М.

Димитровградский инженерно-технологический институт – филиал НИЯУ МИФИ

Аннотация: В статье представлены результаты численного моделирования распространения эпидемии на основе SIR- и SEIRD-моделей. В работе рассматривается вопрос об изменении параметров течения эпидемии при введении карантинных мер. В частности, для модели SEIRD численно подобран оптимальный коэффициент, отражающий степень жесткости карантинных мер.

Ключевые слова: SIR-модель, SEIRD-модель, эпидемия, карантинные меры, COVID-19.

1. SIR-модель

Математическое моделирование охватывает все большее количество сфер жизни человечества. Широко развито математическое моделирование и в эпидемиологии. В марте 2020 года Всемирная организация здравоохранения объявила о пандемии COVID-19. Во многих странах были введены карантинные меры. Целью данной работы является:

1. Проведение численного эксперимента для сравнения распространения эпидемии в двух случаях: при отсутствии мер, предпринимаемых для сдерживания распространения вируса и при наличии карантинных мер;
2. Подбор на основе численного эксперимента таких объемов карантин-ных мер, которые одновременно минимальны и эффективны.

Для численного эксперимента выбраны две математические модели распространения эпидемий - SIR и SEIRD. В качестве исходных данных ис-пользуются статистические данные распространения COVID-19 в Китае. Рассмотрим классическую модель распространения вирусного заболевания - SIR-модель. Будем считать популяцию фиксированной (то есть не учитывается смертность от других факторов и рождаемость). Количество особей складывается из неинфицированных S(t), инфицированных I(t) и выздоровевших или умерших (невосприимчивых) R(t) людей. Так как популяция фиксирована:

$$S\,(t) + I\,(t) + R\,(t) = const = N$$

Перечислим основные факторы, влияющие на изменение количеств описанных категорий. Очевидно, что скорость роста количества невосприимчивых людей (выздоровевших или умерших) $\frac{dR(t)}{dt}$ растет пропорционально количеству инфицированных $I(t)$, то есть

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t)$$

Заметим, что заражение происходит в результате контакта неинфицированных и инфицированных людей, и относительная частота (вероятность) контакта уменьшается при

увеличении N. Значит, $\frac{dI(t)}{dt}$ пропорциональна $\frac{S(t)I(t)}{N}$, а $\frac{dS(t)}{dt}$ пропорциональна $-\frac{S(t)I(t)}{N}$. Кроме того, в ходе эпидемии часть заболевших становится невосприимчивой (излечивается или умирает), что отрицательно сказывается на росте вновь заболевших, то есть то $\frac{dI(t)}{dt}$ содержит слагаемое, пропорциональное $-I(t)$. Следовательно

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t)$$
$$\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\beta S(t)I(t)}{N}$$

Таким образом, получаем, что данная модель описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\beta S(t)I(t)}{N}, \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t). \end{cases}$$

где β — скорость распространения вируса, учитывает вероятность получения заболевания при контакте с больным; γ^{-1} — скорость выздоровления или смерти.

Проведем численное моделирование на основе данной модели, используя данные распространения COVID-19 в Китае за март 2020. Согласно исследованиям китайских ученых [1] $\gamma^{-1} = 18$. $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ — репродуктивное число – число заражений от одного инфицированного человека. Модель реализовывалась при $R_0 = 3,5$ $\beta = 0,194$. Население Китая на 2019 год составляло 1,410 млрд. Время моделирования – 300 дней.

Реализуем модель с помощью пакета прикладных программ для решения задач технических вычислений MATLAB:

```
global N beta gamma;  %Параметры модели:
N=1410000000; % население Китая
beta=0.194; % скорость распространения
gamma=1/18; % скорость выхдоровления/смерти
t1 = [0 300];  %Время начала и окончания симуляции
x0=[N-1 1 0]; %Начальные данные x0=[S0, I0, R0]
[t, x]=ode45(@sir, t1, x0); % Решение системы дифф. уравнений
plot(t,x(:,1))
hold on
plot(t,x(:,2))
plot(t,x(:,3))
legend('Восприимчивые','Невосприимчивые','Инфицированные')
xlabel('Время (в днях)')
ylabel('Популяция')
title('Китай')
function y=sir(t,x)
global N beta gamma
xsir(1)=-beta*(1/N)*x(1)*x(2);
xsir(2)=beta*(1/N)*x(1)*x(2)-gamma*x(2);
xsir(3)=gamma*x(2);
y=[xsir(1);xsir(2);xsir(3)];
end
```

Рис. 1. Реализация SIR-модели в пакете MATLAB.

Для заданных коэффициентов и при различных начальных условиях получим графики, отображающие изменения количества неинфицированных, инфицированных и невоспри-

имчивых людей. На рис. 2 представлен график распространения инфекции при начальных условиях $S(0) = N-1, I(0) = 1, R(0) = 0$, на рис. 3 при $S(0) = 0.99N, I(0) = 0.01N, R(0) = 0$.

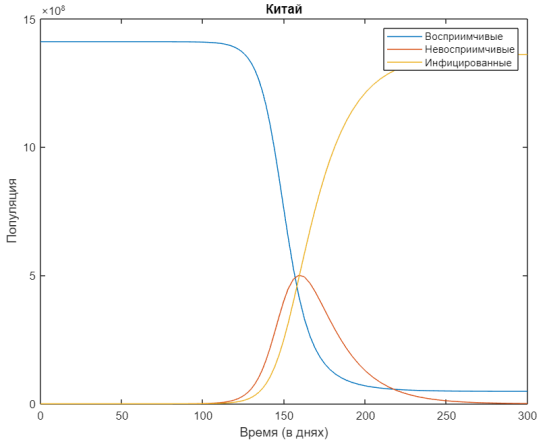


Рис. 2. График распространения COVID-19. 1 человек инфицирован.

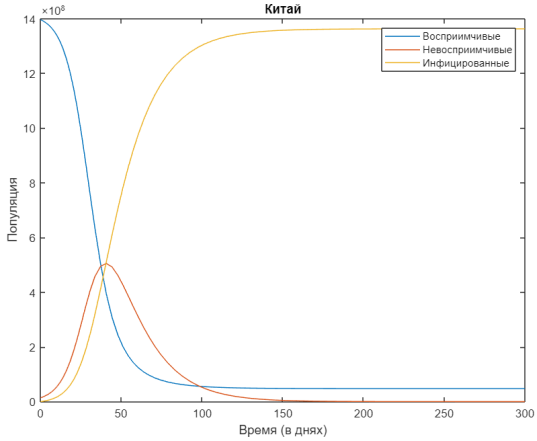


Рис. 3. График распространения COVID-19. 1% населения инфицирован.

Как показывает численный эксперимент, согласно данной модели при отсутствии мер по изоляции населения инфицированными оказывается более 30% населения Китая.

2. SEIRD-модель

Для сравнения результатов рассмотрим уточненную математическую модель распространения эпидемии - SEIRD-модель [2], которая, в отличие от SIR-модели учитывает людей, находящихся в латентном периоде заболевания.

Введем следующие обозначения: $S(t)$ — восприимчивые, $E(t)$ — латентные, $I(t)$ — инфицированные, $R(t)$ — невосприимчивые, $D(t)$ — умершие. Аналогично SIR-модели будем полагать, что популяция фиксирована и представляет собой сумму компонент:

$$S\,(t) + E\,(t) + I\,(t) + R\,(t) + D(t) = const = N$$

Для данной модели факторы, влияющие на изменение количеств описанных категорий, будет частично совпадать с SIR-моделью. В частности, скорость роста количества невосприимчивых остается пропорциональна количеству инфицированных. Рассуждения для $\frac{dS(t)}{dt}$ остаются прежними.

Аналогично SIR-модели заражение происходит при контакте неинфицированных людей с инфицированными, однако в SEIRD-модели зараженные переходят не в класс инфицированных, а в класс латентных больных. Значит $\frac{dE(t)}{dt}$ пропорциональна $\frac{\beta S(t)I(t)}{N}$. Через время, равное инкубационному периоду, больные покидают класс латентных, следовательно $\frac{dE(t)}{dt}$ содержит слагаемое $-\delta E(t)$:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \delta E(t)$$

$\frac{dD(t)}{dt}$ будет пропорционально количеству инфицированных и коэффициенту смертности, то есть

$$\frac{dD\,(t)}{dt} = \mu I(t)$$

Рассмотрим класс инфицированных людей. В класс инфицированных попадают больные после латентного периода и выбывают в случае выздоровления или смерти, значит $\frac{dI(t)}{dt}$ содержит слагаемые $\delta E\,(t)$, $-\gamma I\,(t)$, $-\mu I\,(t)$:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \delta E\,(t) - \gamma I\,(t) - \mu I(t)$$

Таким образом получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dS\,(t)}{dt} = -\dfrac{\beta S\,(t)\,I\,(t)}{N}, \\ \frac{dE(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \delta E(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \delta E\,(t) - \gamma I\,(t) - \mu I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I\,(t)\,, \\ \frac{dD(t)}{dt} = \mu I(t). \end{cases}$$

где β и γ аналогичны SIR-модели, δ – (среднее время инкубационного периода)$^{-1}$, μ – коэффициент смертности.

Количество населения, β и γ возьмем из SIR-модели; время моделирования – 500 дней, среднее время инкубационного периода примем 5,2; коэффициент смертности – 0.034. Аналогично реализуем модель с помощью кода в MATLAB:

```
global N beta gamma delta mu;
N=1410000000; % Населения Китая
beta=0.194; % скорость растространения
gamma=1/18; % скорость выздоровления/смерти
delta=1/5.2; % время инкубационного периода
mu=0.034; % коэффициент смертности
t1 = [0 500]  % Время начала и окончания симуляции
x0=[N-1 0 1 0 0];  % Начальные данные x0=[S0, E0, I0, R0, D0]
[t, x]=ode45(@xseird, t1, x0); % Решение системы дифф. уравнений
plot(t,x(:,1))
hold on
plot(t,x(:,2))
plot(t,x(:,3))
plot(t,x(:,4))
plot(t,x(:,5))
legend('Восприимчивые','Латентные','Инфицированные', 'Выздоровевшие','Умершие')
xlabel('Время (в днях)')
ylabel('Популяция')
title('Китай')
function y=xseird(t,x)
global N beta gamma delta mu
xsierd(1)=-beta*(1/N)*x(1)*x(3);
xsierd(2)=beta*(1/N)*x(1)*x(3)-delta*x(2);
xsierd(3)=delta*x(2)-gamma*x(3)-mu*x(3);
xsierd(4)=gamma*x(3);
xsierd(5)=mu*x(3);
y=[xsierd(1);xsierd(2);xsierd(3);xsierd(4);xsierd(5)];
end
```

Рис. 4. Реализация SEIRD-модели в пакете MATLAB.

Для заданных параметров получим графики количеств восприимчивых, латентных, инфицированных, невосприимчивых и умерших людей при двух наборах начальных данных.

На рис. 5 изображены графики, соответствующие начальным условиям $S(0) = N - 1$, $E(t) = 0$, $I(0) = 1$, $R(0) = 0$, $D\,(0) = 0$, рис. 6 – графики, соответствующие начальным условиям $S(0) = 0.99N$, $E(t) = 0$, $I(0) = 0.01N$, $R(0) = 0$, $D\,(0) = 0$.

Как видно из представленных графиков, вирус развивается менее интенсивно, пик заболевания происходит позже. Причина этого – добавление класса латентных $E(t)$, то есть

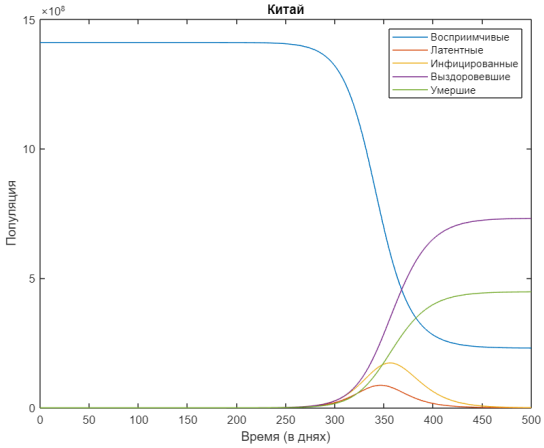


Рис. 5. График распространения COVID-19. 1 человек инфицирован.

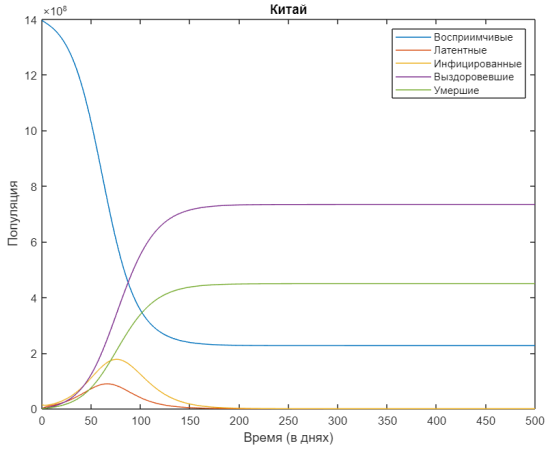


Рис. 6. График распространения COVID-19. 1% населения инфицирован.

рассматривается период, когда инфицированный человек еще не может распространить вирус. Данная модель точнее описывает распространение эпидемии.

Приведенные выше модели описывают распространение эпидемии без вмешательства, то есть не учитывают меры, предпринимаемые для сдерживания распространения вируса; в том числе, не учитывают изоляцию людей. Эффект от введения изоляции можно проиллюстрировать, изменяя коэффициент β, отражающий количество контактов инфицированных людей. Введем коэффициент $\beta_1 = \rho\beta$, где ρ можно считать показателем степени изоляции населения. Так, $\rho = 0$ будет означать, что никто не контактирует и все помещены в карантин, тогда как $\rho = 1$ будет соответствовать рассмотренным выше случаям.

Так как изоляция напрямую влияет на количество инфицированных, рассмотрим данный класс при начальных условиях $S(0) = 0.99N$, $I(0) = 0.01N$, $R(0) = 0$. На рис. 7 приведен график изменения количества инфицированных людей при $\rho = 1$, рис. 8 при $\rho = 0,7$ (изолированы 30%), рис. 9 при $\rho = 0,4$ (изолировано 60%) и рис. 10 $\rho = 0,1$ (изолировано 90%).

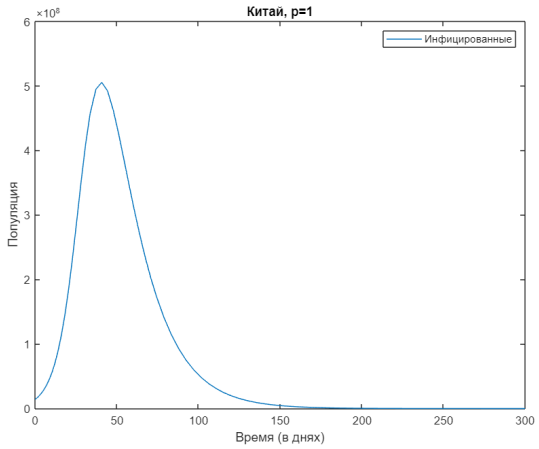


Рис. 7. График распространения COVID-19 при p=1.

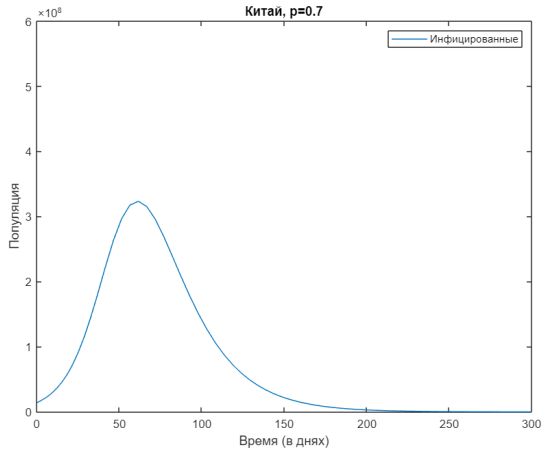


Рис. 8. График распространения COVID-19 при p=0,7.

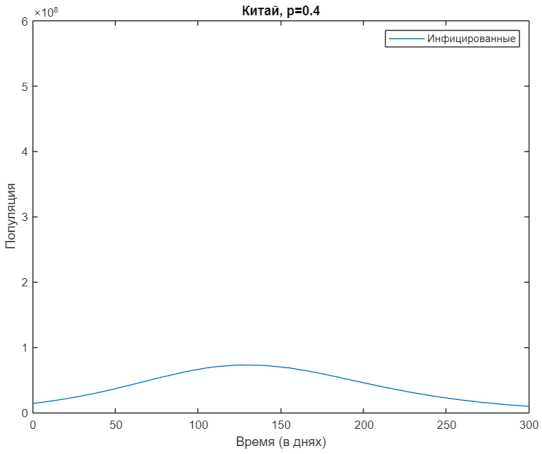


Рис. 9. График распространения COVID-19 при p=0,4.

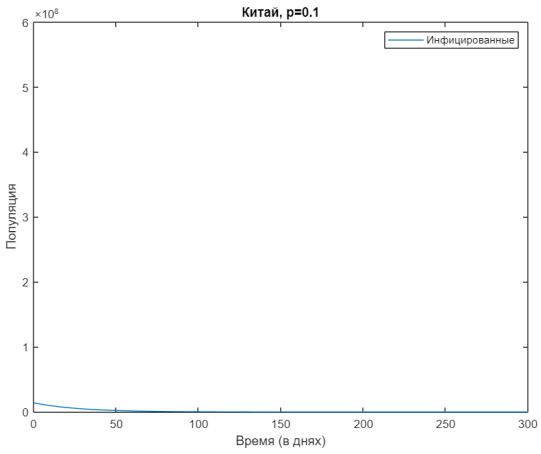


Рис. 10. График распространения COVID-19 при p=0,1.

В SEIRD-модели рассмотрим, какие изменения будут происходить в классах $E(t)$ и $I(t)$ в зависимости от степени изоляции при начальных условиях $S(0) = 0.99N, E(t) = 0, I(0) = 0.01N, R(0) = 0, D(0) = 0$. Рис. 11 соответствует случаю при $\rho = 1$, рис. 12 при $\rho = 0,7$, рис. 13 при $\rho = 0,4$ и рис. 14 $\rho = 0,1$.

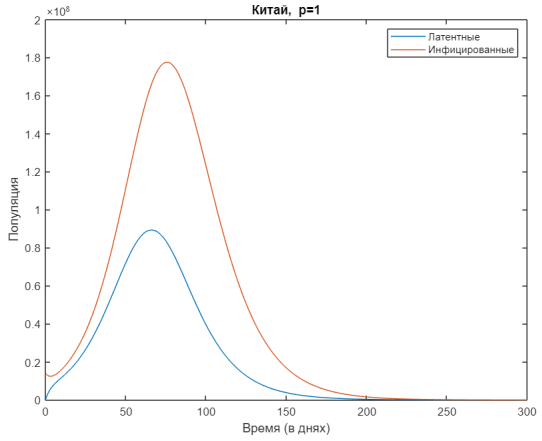


Рис. 11. График распространения COVID-19 при p=1.

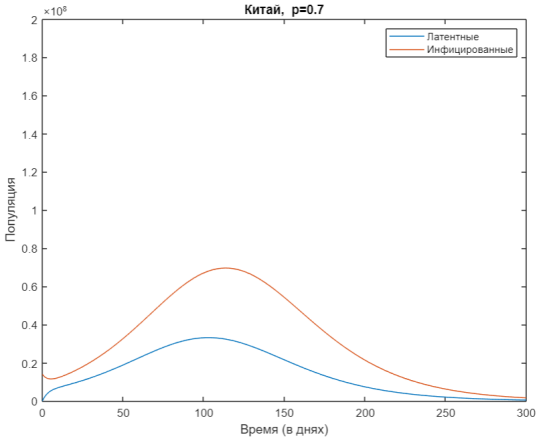


Рис. 12. График распространения COVID-19 при p=0,7.

Численный эксперимент демонстрирует, что при увеличении количества изолированных людей наблюдается значимое уменьшение числа инфицированных, что качественно влияет на распространении эпидемии.

Кроме того, математическое моделирование не только дает возможность прогнозировать течение эпидемии, но и на основе численного эксперимента подбирать такие объемы предпринимаемых мер, которые одновременно минимальны и эффективны.

Например, с помощью численного моделирования может быть реализован поиск оптимального коэффициента ρ, при котором количество инфицированных не превышает заданного порога.

Проведем исследование на основе SEIRD-модели. Смоделируем распространение вируса, при котором количество инфицированных не должно превышать 5% населения, при

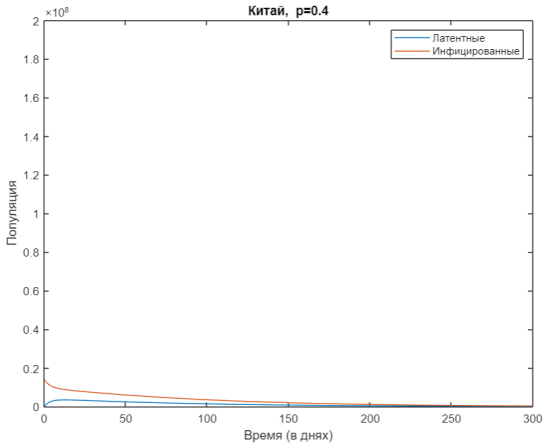


Рис. 13. График распространения COVID-19 при p=0,4.

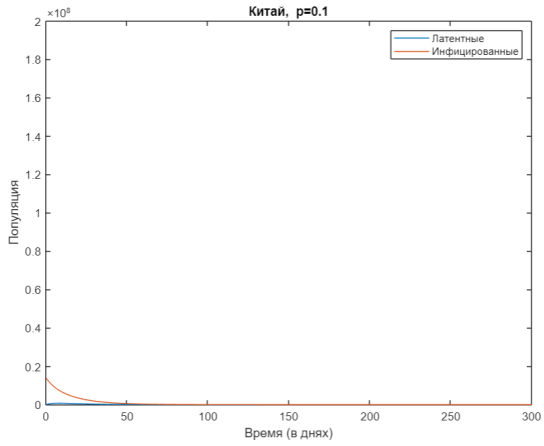


Рис. 14. График распространения COVID-19 при p=0,1.

условии, что изначально заражен 1% населения. Из рис. 15 видно, что такому максимальному количеству инфицированных людей соответствует значение $\rho = 0,702$. То есть при значении $\beta_1 = \rho\beta = 0,136$ максимальное число заразившихся людей будет равно 70410000 ($<5\%$)

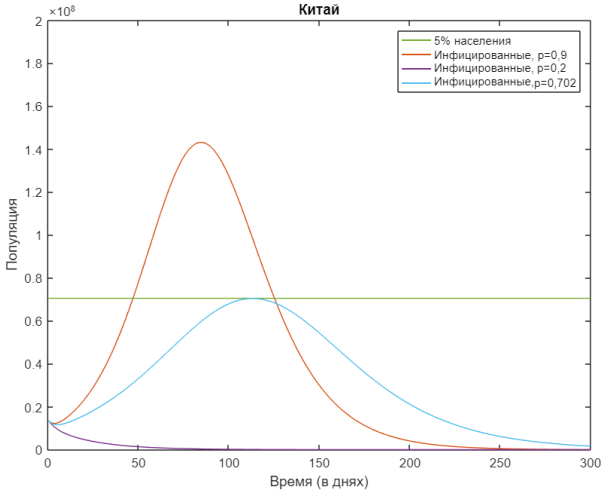


Рис. 15. Распространение COVID-19 при $\rho = 0,9$, $\rho = 0,2$, $\rho = 0,702$.

На основе проделанной работы можно сделать следующие выводы:

- SEIRD-модель по сравнению SIR-моделью точнее описывает распространение инфекции;
- введение карантинных мер качественно меняет распространение эпидемии;
- на основе рассмотренных математических моделей можно проводить не только прогнозирование распространения COVID-19, но и рассчитывать оптимальный показатель изоляции населения по заданным критериям.

Численный эксперимент на основе рассмотренных в статье математических моделей подтверждает пользу карантинных мер и режима самоизоляции. При достаточном ограни-

чении контактов между людьми можно не только сгладить пик эпидемии, но и обеспечить её быстрый спад, что говорит об эффективности подобных мер. Во многом благодаря мерам по изоляции населения к концу марта 2020 года Китаю удалось остановить распространение вируса внутри страны.

Литература

1. Huwen Wang, Zezhou Wang, Yinqiao Dong и др. Phase-adjusted estimation of the number of Coronavirus Disease 2019 cases in Wuhan. China. 2020.
2. Edelstein-Keshet L. Mathematical Models in Biology. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2005.

MSC2020 92C60 37N25

Mathematical modeling of the effectiveness of the initiation of anti-epidemic quarantine measures by the example of the spread of COVID-19

N. I. Eremeeva, I. A. Marasova, A. M. Saveleva

Dimitrovgrad Engineering and Technological Institute of the National Research Nuclear University MEPhI

Abstract: The article presents the results of numerical modeling of the spread of the epidemic based on SIR and SEIRD models. The study examines the matter of changing the parameters of the course of the epidemic when quarantine measures are initiated. In particular, for the SEIRD model, the optimal coefficient reflecting the severity of the quarantine measures was selected numerically.

Keywords: SIR model, SEIRD model, epidemic, quarantine, isolation, COVID-19.

References

1. Huwen Wang, Zezhou Wang, Yinqiao Dong и др. Phase-adjusted estimation of the number of Coronavirus Disease 2019 cases in Wuhan. China. 2020.
2. Edelstein-Keshet L. Mathematical Models in Biology. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2005.

УДК 519.6

Применение разрывного метода Галеркина для решения задач газовой динамики на динамических локально-адаптируемых сетках *

Жалнин Р. В.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В статье описан численный алгоритм для решения системы уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной смеси газов методом Галеркина с разрывными базисными функциями на адаптивных локально измельчающихся сетках. Реализация построенной схемы базируется на структуре данных и алгоритмах библиотеки p4est. Представлены результаты решения таких задач, как обтекание профиля NACA 0012, задача о распаде тройного разрыва, задача о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова.

Ключевые слова: метод Галеркина с разрывными базисными функциями, уравнения газовой динамики, многокомпонентная смесь газов, параллельные вычисления, задача о тройном распаде разрыва, неустойчивость Рихтмайера-Мешкова, адаптивные локально измельчающиеся сетки, p4est.

1. Математическая модель и разностная схема

Рассматривается система уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной смеси:

$$\frac{\partial(\rho C_i)}{\partial t} + \nabla(\rho C_i \mathbf{v}) = Q_i + \nabla \cdot \mathbf{J}_i, i = \overline{1, N_{comp}} \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau, \tag{2}$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla((\rho E + p)\mathbf{v}) = \nabla \cdot (\mathbf{v}\tau + \mathbf{q}). \tag{3}$$

с соответствующими граничными и начальными условиями и уравнением состояния:

$$p = \rho R T \sum_i \left(\frac{C_i}{M_{wi}} \right). \tag{4}$$

Запишем систему (1)–(3) в компактном виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{H}(U, \nabla U) + Q \tag{5}$$

Введем новые переменные $\mathbf{V} = \nabla U$ и применим разрывный метод Галёркина (РМГ) [1, 2] к следующей системе:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(U) = \nabla \cdot \mathbf{H}(U, \mathbf{V}) + Q, \\ \mathbf{V} - \nabla U = 0. \end{cases} \tag{6}$$

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-41-130001

Покроем расчетную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ сеткой $\Omega_h = \{C_j | j = 1, \ldots, N_h\}$, где C_j – шестигранники.

Введем пространство

$$V_h^K = \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_{C_j} \in P_K(C_j), j = 1, \ldots, N_h \right\},$$

здесь $P_K(C_j)$ – пространство полиномов степени не выше чем K, на элементе C_j.

Зададим в V_h^K базис

$$\hat{\varphi}_k(x, y, z) = \sum_{j=1}^{N_h} \varphi_{jk}(x, y, z), \tag{7}$$

где

$$\varphi_{jk}(x, y, z) = \begin{cases} \left(\dfrac{x - x_{cj}}{\Delta x_j}\right)^{\alpha_k} \left(\dfrac{y - y_{cj}}{\Delta y_j}\right)^{\beta_k} \left(\dfrac{z - z_{cj}}{\Delta z_j}\right)^{\gamma_k}, & \text{если } (x, y, z) \in C_j; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{8}$$

здесь $\alpha_k + \beta_k + \gamma_k \leq K$, $k = 1, \ldots, N_\varphi$, $N_\varphi = (K+1)(K+2)(K+3)/6$, (x_{cj}, y_{cj}, z_{cj}) – центр масс ячейки C_j.

Приближенное решение будем искать в виде:

$$U_h(t, x, y) = \sum_{k=1}^{N_\varphi} \sum_{j=1}^{N_h} U_{jk}(t) \varphi_{jk}(x, y). \tag{9}$$

Подставив его в систему (6) и потребовав ортогональность полученной невязки всем базисным функциям получим:

$$\sum_{k=1}^{N_\varphi} \frac{dU_{jk}}{dt} \int\limits_{C_j} \varphi_{jk} \varphi_{jm} dV + \int\limits_{C_j} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \varphi_{jm} dV = \int\limits_{C_j} (\nabla \cdot \mathbf{H}) \varphi_{jm} dV + \int\limits_{C_j} Q \varphi_{jm} dV, \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{N_\varphi} \mathbf{V}_{jk} \int\limits_{C_j} \varphi_{jk} \varphi_{jm} dV + \int\limits_{C_j} (\nabla U) \varphi_{jm} dV = 0, \tag{11}$$

$$m = 1, \ldots, N_\varphi, \ j = 1, \ldots, N_h.$$

Далее выполнив интегрирование по частям получим:

$$\sum_{k=1}^{N_\varphi} \frac{d}{dt} U_{jk}(t) \int\limits_{C_j} \varphi_{jk} \varphi_{jm} dV = \int\limits_{C_j} \mathbf{F} \cdot (\nabla \varphi_{jm}) dV - \oint\limits_{\partial C_j} (\hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n}) \varphi_{jm} dS, \tag{12}$$

$$- \int\limits_{C_j} \mathbf{H} \cdot (\nabla \varphi_{jm}) dV + \oint\limits_{\partial C_j} (\hat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{n}) \varphi_{jm} dS + \int\limits_{C_j} Q \varphi_{jm} dV,$$

$$\sum_{k=1}^{N_\varphi} \mathbf{V}_{jk} \int\limits_{C_j} \varphi_{jk} \varphi_{jm} dV = \int\limits_{C_j} U \nabla \varphi_{jm} dV - \oint\limits_{\partial C_j} (\hat{U} \mathbf{n}) \varphi_{jm} dS, \tag{13}$$

$$m = 1, \ldots, N_\varphi, \ j = 1, \ldots, N_h.$$

В полученном выражении необходимо определить способ вычисления численных потоков. Значение конвективного численного потока $\hat{\mathbf{F}}$ берется как приближенное решение

задачи Римана о распаде разрыва. Используются потоки Лакса-Фридрихса-Русанова [3, 4] и HLLC [5]. Потоки $\hat{\mathbf{H}}, \hat{U}$ вычисляются как полусуммы значений «слева» и «справа» от соответствующей грани.

Обозначим A_j – матрицу составленную из элементов $a^j_{mk} = \int\limits_j \varphi_{jk}\varphi_{jm} dS$,

$$A = diag(A_1, \ldots, A_{N_h})$$

$$\tilde{U}_h = colon(U_{11}, U_{12}, \ldots, U_{1N_\varphi}, \ldots, U_{N_h 1}, U_{N_h 2}, \ldots, U_{N_h N_\varphi}),$$

Получим:

$$A\frac{d\tilde{U}_h}{dt} = R(\tilde{U}_h),$$

Для интегрирования по времени уравнения

$$\frac{d\tilde{U}_h}{dt} = L(\tilde{U}_h), \tag{14}$$

где $L(\tilde{U}_h) = A^{-1}R(\tilde{U}_h)$, используется TVD-схема Рунге-Кутты 3-го порядка:

$$\begin{aligned}
\tilde{U}^*_h &= \Lambda\Pi_h\left(\tilde{U}^n_h + \Delta t \cdot L(\tilde{U}^n_h)\right),\\
\tilde{U}^{**}_h &= \Lambda\Pi_h\left(\frac{3}{4}\tilde{U}^n_h + \frac{1}{4}\left(\tilde{U}^*_h + \Delta t \cdot L(\tilde{U}^*_h)\right)\right),\\
\tilde{U}^{n+1}_h &= \Lambda\Pi_h\left(\frac{1}{3}\tilde{U}^n_h + \frac{2}{3}\left(\tilde{U}^{**}_h + \Delta t \cdot L(\tilde{U}^{**}_h)\right)\right).
\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $\Lambda\Pi_h$ – оператор лимитирования [6], обеспечивающий невозрастание нефизических осцилляций вблизи разрывов решения и удовлетворяющий условию консервативности:

$$\int\limits_{Q_j} \Lambda\Pi_h(U_h)dS = \int\limits_{Q_j} U_h dS,\ \forall Q_j \in \Omega_h.$$

Для выполнения операции лимитирования осуществляется проекция решения на пространство с линейным базисом (в случае если $K > 1$):

$$U^\Lambda_h = \Pi_\Lambda U_h,$$

где Π_Λ - оператор проекции:

$$\Pi_\Lambda : V^K_h \to V^1_h.$$

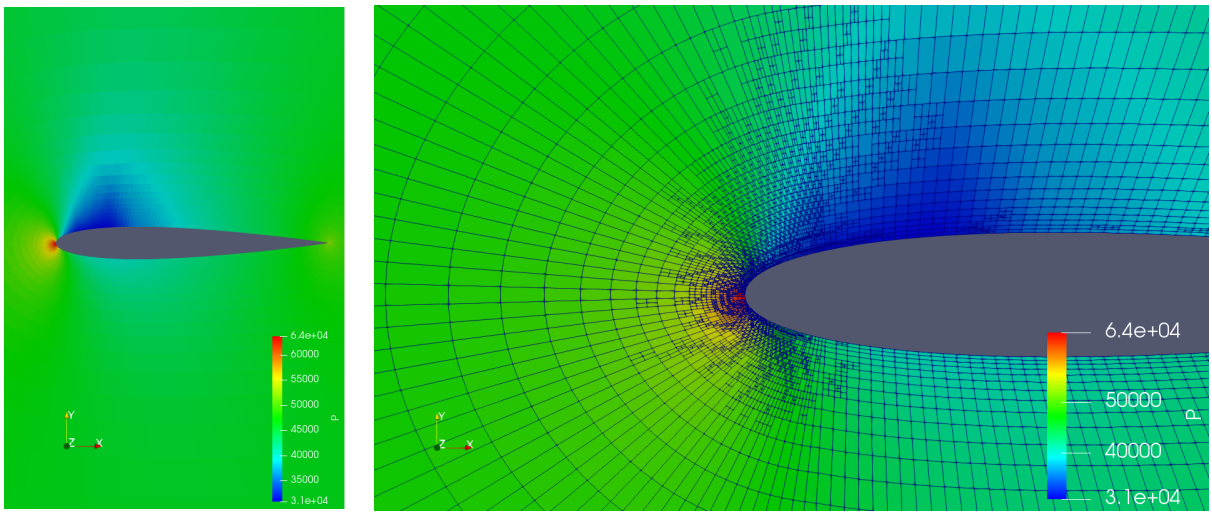
Далее в данном исследовании к U^Λ_h применяется лимитер Барта-Йесперсена [7].

Программная реализация описанной методики выполнена на динамических локально-адаптивных сетках [8] с использованием библиотеки p4est [9] в программном комплексе CHARM_3D.

2. Моделирование обтекания профиля NACA 0012

Был выполнен расчет течение вязкого сжимаемого газа в окрестности аэродинамического профиля NACA 0012 с числом Маха M = 0.7 под углом атаки 1.49° со следующими параметрами набегающего потока:

$$\begin{aligned}
p_\infty &= 46066.16 \text{ Па};\\
T_\infty &= 248.019 \text{ K};\\
\rho_\infty &= 0.647 \text{ кг/м}^3.
\end{aligned}$$



а) б)

Рис. 1. Обтекание профиля NACA0012: а) поле давления вблизи профиля б) структура сетки вблизи профиля.

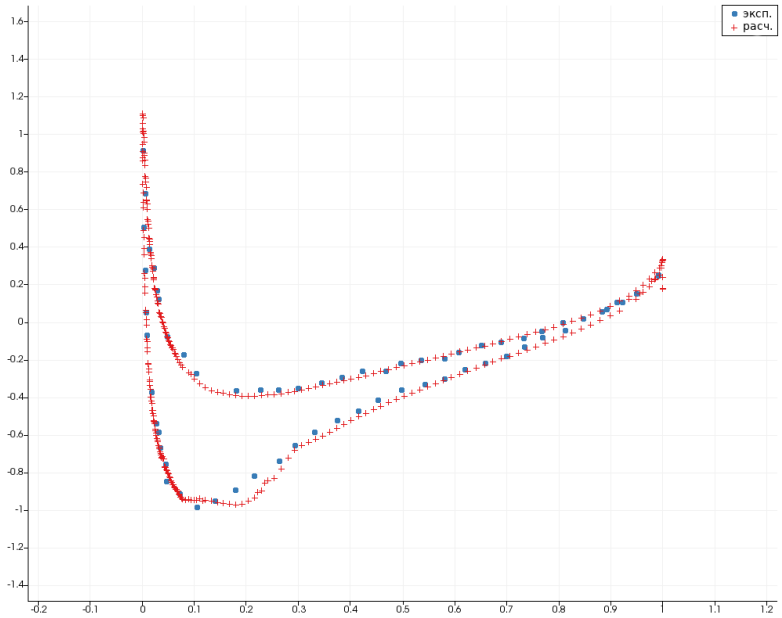


Рис. 2. Обтекание профиля NACA0012: а) поле давления вблизи профиля б) структура сетки вблизи профиля.

На рисунке 1 представлены результаты численного моделирования поставленной задачи: поле давления вблизи профиля и структура расчетной сетки около передней части профиля. На рисунке 2 представлено сравнение рассчитанного коэффициента давления на поверхности профиля с экспериментальными значениями [10]. Наблюдается достаточно хорошее совпадение расчетных и экспериментальных результатов.

3. Тройной распад разрыва

Был выполнен расчет для задачи о распаде тройного разрыва (triple point problem) [11, 12]. Расчетная область представляет собой параллелепипед $[0, 7] \times [0, 3] \times [0, 0.125]$, разде-

ленный на три подобласти (рис. 3) с параметрами:

$$(\rho, p, \gamma, u, v) = \begin{cases} (1, 1, 1.5, 0, 0)\,, & \text{если } (x, y, z) \in \Omega_1 = [0, 1] \times [0, 3] \times [0, 0.125]; \\ (1, 0.1, 1.4, 0, 0)\,, & \text{если } (x, y, z) \in \Omega_2 = [1, 7] \times [0, 1.5] \times [0, 0.125]; \\ (0.125, 0.1, 1.5, 0, 0)\,, & \text{если } (x, y, z) \in \Omega_3 = [1, 7] \times [1.5, 3] \times [0, 0.125]. \end{cases} \quad (16)$$

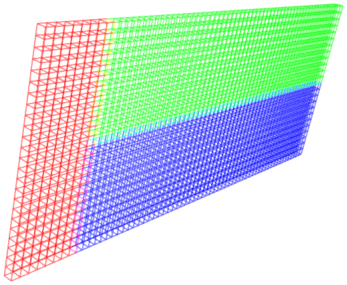


Рис. 3. Расчетная сетка.

На границах расчетной области заданы условия вытекания.

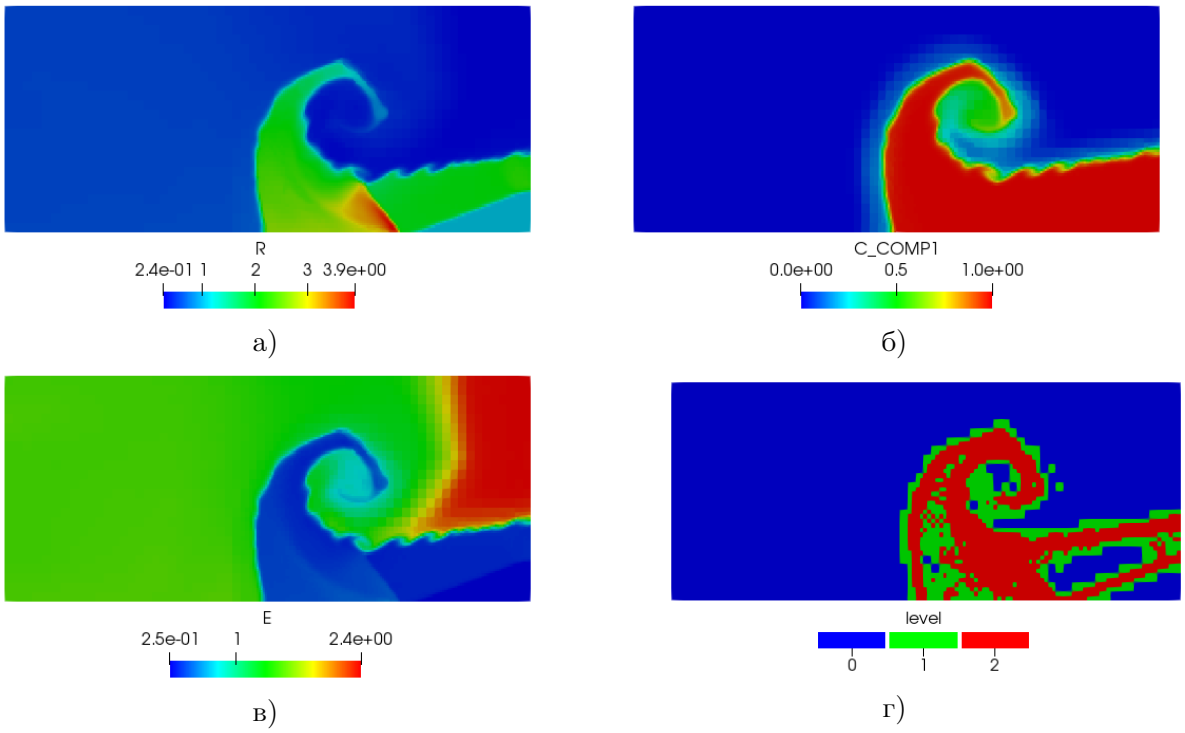
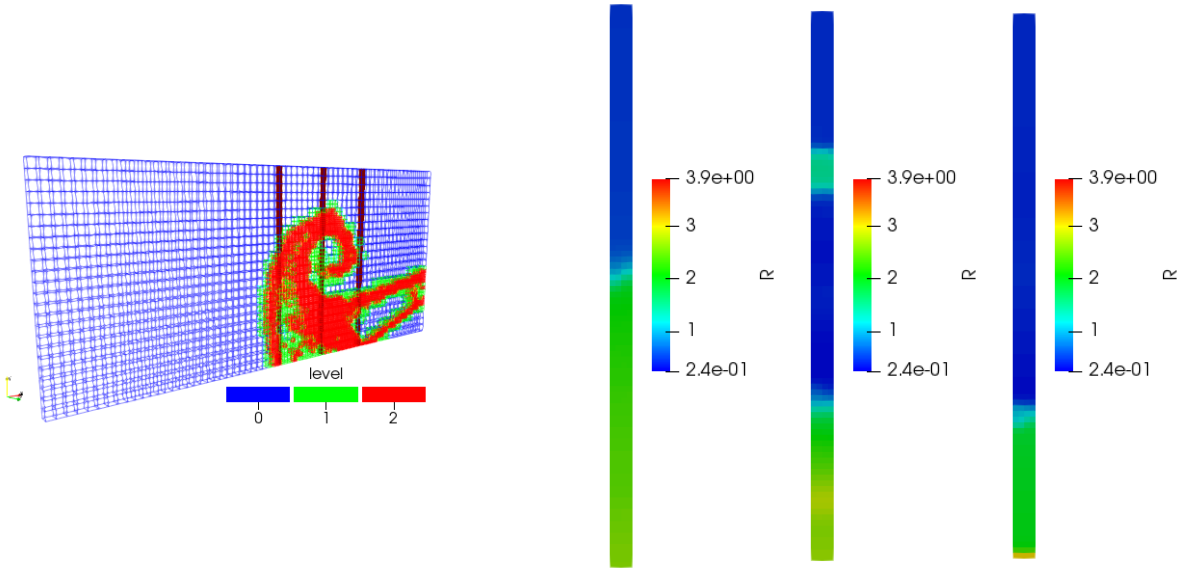


Рис. 4. Тройной распад разрыва: а) плотность, б) концентрация, в) внутренняя энергия, г) уровни адаптации сетки.

На рисунке 4 представлены распределения плотности, внутренней энергии и концентрации вещества, в начальный момент времени расположенного в области Ω_2, в момент времени $t = 5$. На рисунке 5а показана структура адаптированной сетки и распределения плотности в трех сечения на момент времени $t = 5$. Полученные картины распределения хорошо согласуются с результатами, представленными в работе [12].



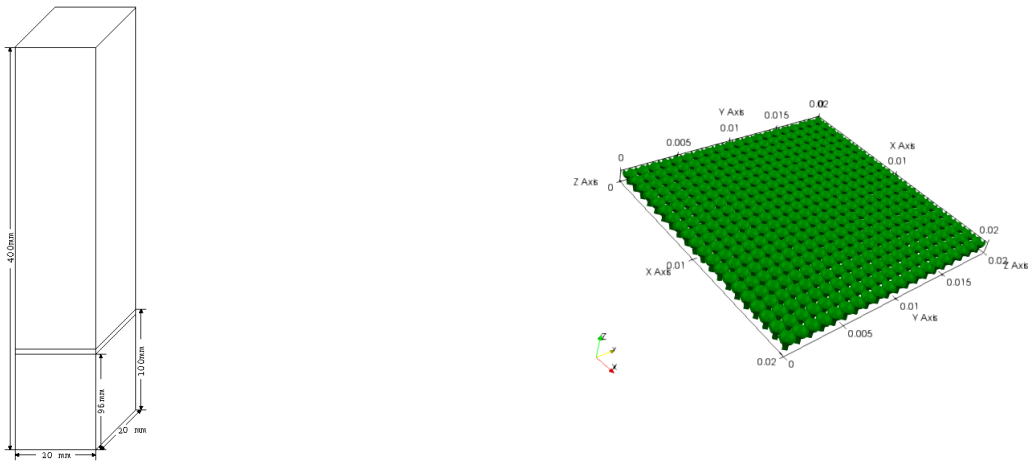
а) б) в) г)

Рис. 5. Уровни адаптации сетки (а) и распределение плотности в поперечных сечениях на момент времени $t = 5$: б) $x = 3.5$, в) $x = 4.375$, г) $x = 5.25$.

4. Развитие неустойчивости Рихтмайера-Мешкова

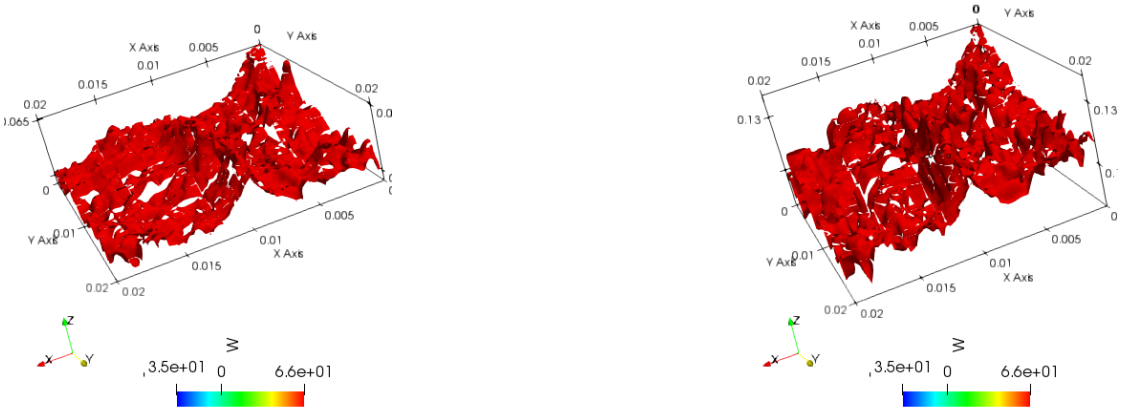
Смоделировано развитие неустойчивости Рихтмайера-Мешкова, при прохождении ударной волны через возмущенный контактный разрыв между элегазом (SF_6) и воздухом, находящимися при атмосферном давлении.

Для расчетов была принята следующая физическая постановка задачи [13, 14], при начальной температуре 291 К и давлении 10^{-4} ГПа = 1 бар в камере низкого давления. За ударной волной в элегазе давление 2.152 бар, плотность $1.209 \cdot 10^{-2}$ г/см^3, скорость ударной волны 195.2 м/с, скорость течения за ударной волной 97.76 м/с, начальные плотности элегаза и воздуха в камере низкого давления $6.037 \cdot 10^{-3}$ и $1.198 \cdot 10^{-3}$ г/см^3 соответственно.



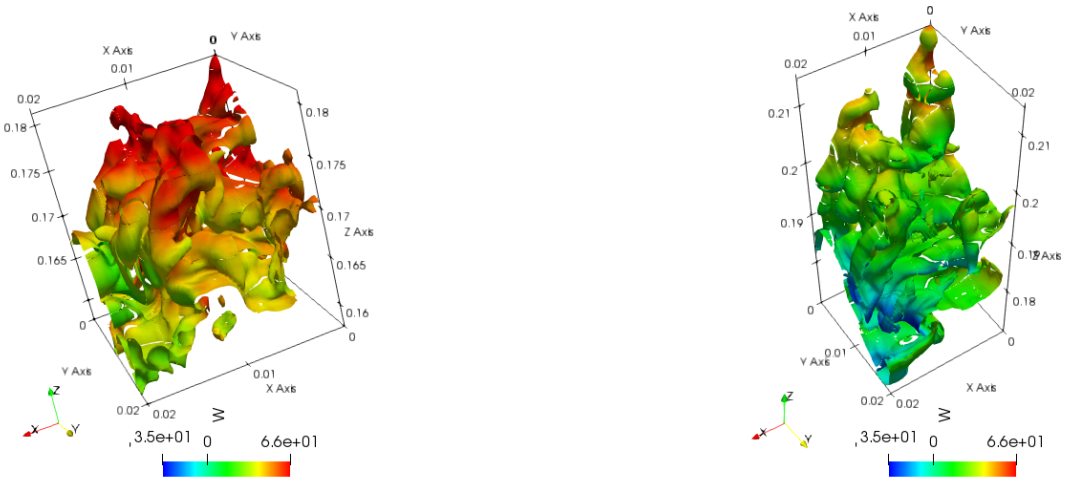
а) б)

Рис. 6. Расчетная область: а) геометрия расчетной области; б) изоповерхность возмущенной контактной границы.



а) б)

Рис. 7. Изоповерхность концентрации ($C_{air} = 0.5$): а) $t = 0.5$ мс, б) $t = 1$ мс



а) б)

Рис. 8. Изоповерхность концентрации ($C_{air} = 0.5$): а) $t = 1.5$ мс, б) $t = 2$ мс.

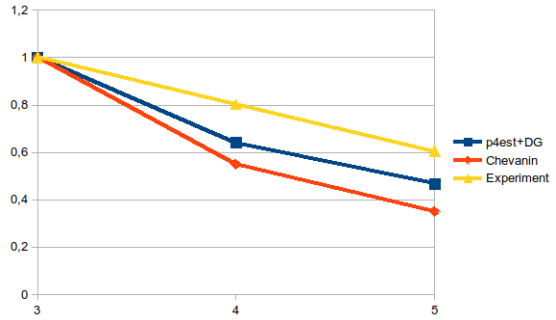
Физические свойства элегаза и воздуха следующие: оба вещества являются невязкими, нетеплопроводными и идеальными газами с показателями адиабаты $\gamma = 1.094$ (SF_6) и $\gamma = 1.4$ (воздух), отношение молекулярных масс (SF_6/воздух) принято равным 5.04.

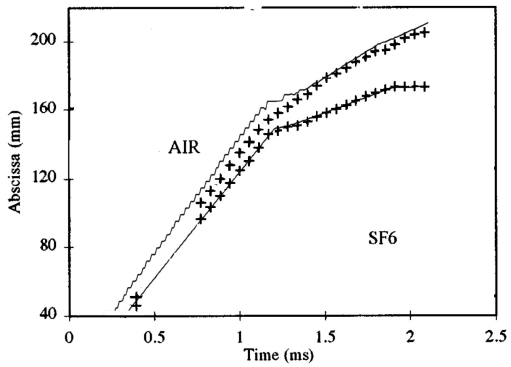
Расчетная область была выбрана в виде параллелепипеда $\Omega = [0, 0.02] \times [0, 0.02] \times [-0.1, 0.3]$ (рис. 6а).

Положение фронта ударной волны в начальный момент времени полагалось равным $z = -0.004$. Положение контактного разрыва задавалось в виде (рис. 6б):

$$z(x, y) = -5 \times 10^{-4} * \left(1 - cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right)\left(1 - cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda}\right)\right), \lambda = 10^{-3}.$$

На рисунках 7 и 8 представлены изолинии концентрации ($C_{air} = 0.5$) на различные моменты времени.





а) б)

Рис. 9. Сравнение результатов: а) нормированные максимумы пульсаций продольной компоненты скорости в местах расположения 3, 4 и 5 датчиков, б) изменение ширины зоны турбулентного перемешивания(+ - эксперимент; – - расчет).

На рисунке 9а показаны нормированные относительно значений на 3 датчике максимумы пульсаций продольной компоненты скорости в местах расположения 3, 4 и 5 датчиков для расчетов в рамках этой работы (p4est+DG), для расчетов, выполненных в ИПМ им. В. М. Келдыша РАН (Chevanin) [15], и для данных, полученных в эксперименте. Видно, что расчеты выполненные с использованием данной методики дают более близкие к экспериментам результаты. На рисунке 9б показано изменение ширины зоны турбулентного перемешивания в сравнении с экспериментом.

5. Заключение

В целом полученные результаты свидетельствуют о состоятельности методики и ее применимости в для решения широкого класса задач. Программный комплекс CHARM_3D, разработанный на основе предложенного вычислительного алгоритма, позволяет решать задачи аэродинамики, моделировать течения многокомпонентных сред, исследовать развитие гидродинамических неустойчивостей.

Литература

1. Cockburn B., Shu Ch.-W. Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems // Journal of Scientific Computing. 2001. vol. 16. No. 3. pp. 173 – 261.

2. Краснов М. М., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф. Реализация разрывного метода Галеркина в программном комплексе DGM // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018, № 245. 31 с.

3. Русанов В. В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961. Т. 1. № 2. 267–279.

4. Lax P. D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1954. vol. 7. No. 1. pp. 159 – 193.

5. Toro E. F., Spruce M., Speares W. Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver // Shock Waves. 1994. No.4. pp. 25 – 34.

6. Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Тишкин В. Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 12. С. 124 – 128.

7. Barth T. J., Jespersen D. C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes // AIAA Paper 89-0366. 1989.

8. Berger M. J., Colella P. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics // Journal of Computational Physics. 1989. No. 82. pp. 64 – 84.

9. Burstedde C., Wilcox L. C., Ghattas O. p4est: Scalable Algorithms for Parallel Adaptive Mesh Refinement on Forests of Octrees // SIAM Journal on Scientific Computing. 2011. vol. 33. № 3. pp. 1103 – 1133.

10. Harris C. D.ю Two-dimensional Aerodynamic Characteristics of the NACA0012 Airfoil in the Langley 8-Foot Transonic Pressure Tunnel // NACA Technical Memorandum 81927. Langley Research Center. 1981.

11. Kucharik M., Garimella R. V., Schofield S. P., Shashkov M. J. A comparative study of interface reconstruction methods for multi-material ale simulations // Journal of Computational Physics. 2009. vol. 229. No. 7. pp. 2432 – 2452.

12. Kucharik M., Shashkov M. J. Conservative multi-material remap for staggered multi-material arbitrary lagrangian-eulerian methods // Journal of Computational Physics. 2014. No. 258. pp. 268 – 304.

13. Poggi F., Thorembey M.-H., Rodrigues G. Velocity measurements in turbulent gaseous mixtures induced by Richtmyer–Meshkov instability // Phisics of Fluids. 1998. vol. 10. No. 11. pp. 2698 – 2700.

14. Жалнин Р. В., Змитренко Н. В., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф. Численное моделирование развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова с использованием схем высокого порядка точности // Математическое моделирование. 2007. Т. 19. № 10. С. 61–66.

15. Чеванин В. С. Численное моделирование развития гидродинамических неустойчивостей на многопроцессорных системах // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 2. С. 17 – 32.

MSC2020 76M10

Application of the discontinuous Galerkin method for solving problems of gas dynamics on AMR*

R. V. Zhalnin

National Research Mordovia State University

Abstract: The article describes a numerical algorithm for solving the system of Navier-Stokes equations for a multicomponent gas mixture by the Discontinuous Galerkin Method on AMR. The implementation of the constructed scheme is based on the data structure and algorithms of the p4est library. The results of solving such problems as the flow around an NACA 0012 airfoil, the multimaterial triple point problem, and the problem of the development of the Richtmyer-Meshkov instability are presented.

Keywords: Discontinuous Galerkin Method, gas dynamics equations, multicomponent gas mixture, parallel computations, multimaterial triple point problem, Richtmyer-Meshkov instability, AMR, p4est.

References

1. Cockburn B., Shu Ch.-W. Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems. Journal of Scientific Computing. 2001. vol. 16. No. 3. pp. 173 – 261.
2. Krasnov M. M., Ladonkina M. E., Tishkin V. F. Implementation of the Galerkin discontinous method in the DGM software package. KIAM Preprint. 2018, No. 245. 31 p. (In Russian).
3. Rusanov V. V. [The calculation of the interaction of non-stationary shock waves with barriers]. Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 1961. vol. 1. No. 2. pp. 267 – 279. (In Russian).
4. Lax P. D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1954. vol. 7, No. 1. pp. 159 – 193.
5. Toro E. F., Spruce M., Speares W. Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver. Shock Waves. 1994. No.4. pp. 25 – 34.
6. Ladonkina M. E., Nekljudova O. A., Tishkin V. F. Research of the impact of different limiting functions on the order of solution obtained by RKDG. Matem. Mod. 2012. vol. 24. No. 12. pp. 124 – 128. (In Russian).
7. Barth T. J., Jespersen D. C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. AIAA Paper 89-0366. 1989.
8. Berger M. J., Colella P. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. Journal of Computational Physics. 1989. No. 82. pp. 64 – 84.
9. Burstedde C., Wilcox L. C., Ghattas O. p4est: Scalable Algorithms for Parallel Adaptive Mesh Refinement on Forests of Octrees. SIAM Journal on Scientific Computing. 2011. vol. 33. № 3. pp. 1103 – 1133.

*The reported research was funded by Russian Foundation for Basic Research, grant № 18-41-130001

10. Harris C. D.ю Two-dimensional Aerodynamic Characteristics of the NACA0012 Airfoil in the Langley 8-Foot Transonic Pressure Tunnel. NACA Technical Memorandum 81927. Langley Research Center. 1981.

11. Kucharik M., Garimella R. V., Schofield S. P., Shashkov M. J. A comparative study of interface reconstruction methods for multi-material ale simulations. Journal of Computational Physics. 2009. vol. 229. No. 7. pp. 2432 – 2452.

12. Kucharik M., Shashkov M. J. Conservative multi-material remap for staggered multi-material arbitrary lagrangian-eulerian methods. Journal of Computational Physics. 2014. No. 258. pp. 268 – 304.

13. Poggi F., Thorembey M.-H., Rodrigues G. Velocity measurements in turbulent gaseous mixtures induced by Richtmyer–Meshkov instability. Phisics of Fluids. 1998. vol. 10. No. 11. pp. 2698 – 2700.

14. Zhalnin R.V., Zmitrenko N.V., Ladonkina M.E., Tishkin V.F. Numerical simulation of Richtmyer–Meshkov instability development using the difference schemes of high order of accuracy. Matem. Mod. 2007. vol. 19. No. 10. pp. 61–66. (In Russian).

15. Chevanin V. S. Numerical simulation of hydrodynamics instabilities evolution on multiprocessor systems. Matem. Mod. 2012. vol. 24, No. 2. pp. 17 – 32. (In Russian).

УДК 517.9

Геометрия областей устойчивости линейных канонических систем периодических дифференциальных уравнений

Мамаева Н. А., Сахаров А. Н.

Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия

Аннотация: А.М. Ляпунов и А. Пуанкаре в позапрошлом веке построили теорию линейных периодических систем дифференциальных уравнений. Результатом их исследований стали теоремы Флоке-Ляпунова и Пуанкаре-Ляпунова. Однако, к середине прошлого века возникла потребность найти возможности для использования этой теории в приложениях. Появился ряд замечательных работ М.Г. Крейна, И.М. Гельфанда, В.Б. Лидского и др., в которых задача описания канонических периодических систем была сведена к описанию геометрии поведения собственных чисел (мультипликаторов) отображения монодромии. Так как оператор монодромии является линейным оператором, то это дало возможность использовать вычислительные методы линейной алгебры. Для систем зависящих от параметров, поведение мильтипликаторов определяется геометрией областей устойчивости решений, появляющихся и исчезающих при изменении параметров системы. В конце прошлого века для описания геометрии областей устойчивости систематически стал использоваться метод компактификации фазового пространства системы, что позволило использовать здесь результаты теории динамических систем на компактных пространствах. На примере двумерных систем в работе описываются оба подхода и дается их частичная топологическая классификация.

Ключевые слова: канонические линейные системы, оператор монодромии, мультипликаторы, зоны устойчивости, число вращения, языки Арнольда, топологическая эквивалентность.

1. Введение

Рассмотрим двумерную линейную систему

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

где $A(t)$ – непрерывная периодическая с периодом 2π матрица, представимая в виде

$$A(t) \;=\; a(t)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b(t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Фундаментальную матрицу решений $X(t)$ системы (1) всегда можно выбрать так, чтобы $\det X(t) = 1$ для дюбого $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, $X(t)$ – кривая в группе $SL(2,\mathbb{R})$. Несложные преобразования позволяют представить (1) в виде гамильтоновой системы

$$\dot{X} = JH(t)X, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $H(t)$ – вещественная симметрическая матрица. Такие системы называются *каноническими.*

Основной задачей теории динамических систем для определенного класса систем является нахождение полного топологического инварианта в заданном классе. Рассмотрим эту задачу применительно к классу канонических систем.

Система (1) называется *устойчивой*, если все её решения ограничены при $t \to \infty$. Однако, нам понадобится более сильное понятие *сильно устойчивой* канонической системы. Так называются устойчивые системы, все решения которых остаются ограниченными и при любом достаточно малом возмущении системы. Более точно,

Определение 1. *Система* (1) *называется сильно устойчивой, если она устойчива и существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что какова бы ни была матрица* $\tilde{A}(t)$ *вида* (2)*, удовлетворяющая условию* $\|A(t) - \tilde{A}(t)\| < \varepsilon$*, все решения системы* $\dot{X} = \tilde{A}(t)X$ *ограничены при* $t \to \infty$*.*

Если $X(t)$ матрица решений системы (1) с начальным условием $X(0) = E$, то $X(t+2\pi)$ также является матрицей решений этой системы. Поэтому справедливо равенство

$$X(t + 2\pi) = X(t)M, \tag{3}$$

где матрица $M = X(2\pi)$ так называемая *матрица монодромии* системы, собственные значения которой называются *мультипликаторами.*

Из равенства (3) следует $X(t + 2n\pi) = X(t)M^n$, так что решения нашей системы ограничены при $t \to \infty$, если матрица M^n ограничена при всех целых n в силу ограниченности $X(t)$ на интервале $[0, 2\pi]$. В рассматриваемом случае это эквивалентно тому, что

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \neq 0, \pi.$$

Собственные значения такой матрицы равны $e^{\pm i\alpha}$. Это равенство является необходимым и достаточным условием сильной устойчивости системы (1).

Как же работает в этом случае определение 1.1 и устроена область устойчивости каноническиз систем? Чтобы объяснить это опишем, следуя [1], множество значений матриц монодромии, то есть геометрию группы $SL(2, \mathbb{R})$. Произвольная матрица $M \in SL(2, \mathbb{R})$ допускает представление

$$M = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\tau + \operatorname{sh}\tau\cos\varphi & \operatorname{sh}\tau\sin\varphi \\ \operatorname{sh}\tau\sin\varphi & \operatorname{ch}\tau + \operatorname{sh}\tau\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \tau < +\infty$. Параметризуем произведение окружности на открытый единичный диск D координатами (θ, φ, r). Тогда отображение

$$\varphi \mapsto \varphi, \quad \theta \mapsto \theta, \quad r \mapsto \operatorname{th}^2\tau \tag{5}$$

определяет гомеоморфизм $SL(2, \mathbb{R})$ и внутренности тора $G = S^1 \times D$.

Если M – матрица монодромии системы (1), то ее след (постоянная Ляпунова) равен $|2\cos\theta|\operatorname{ch}\tau$, что следует из представления (4). Условие невещественности корней вещественной унимодулярной матрицы M сводится, как легко проверить, к тому, чтобы ее след по модулю был бы меньше, чем 2. Таким образом, матрицы устойчивого вида выделяются условием $2|\cos\theta|\operatorname{ch}\tau < 2$.

Чтобы найти это множество во внутренности тора, определим уравнение его границы, полагая $|\cos\theta|\operatorname{ch}\tau = 1$. Это уравнение, устанавливаемое с помощью гомеоморфизма (5),

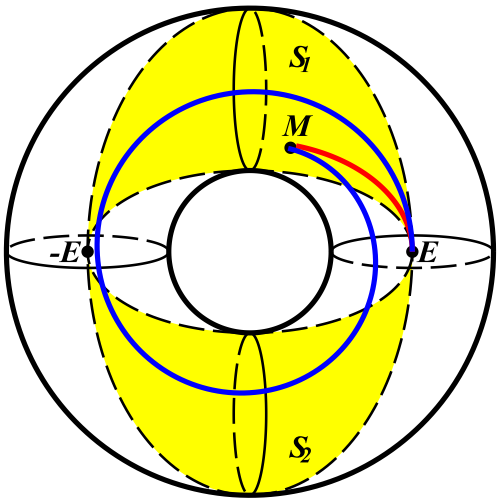


Рис. 1. Множество G.

записывается так $r = \sin^2\theta$, $(0 \le \theta \le 2\pi)$. Эта поверхность выделяет во внутренности тора две связные компоненты (на рис. 1 показаны серым цветом) S_1 и S_2, которые соответствуют двум различным типам расположения мультипликаторов на единичной окружности[1]. Множества S_1, S_2 принято называть *областями устойчивости* двумерных канонических систем.

Матрица $X(t)$ при изменении t от 0 до 2π описывает кривую в множестве G, делая при этом неторое число витков по координате θ. Допустим, что ее конец $X(2\pi) = M$ соответствует сильно устойчивой системе, то есть попадает в одну из зон устойчивости. Соединим матрицу M с единичной матрицей непрерывной кривой, все внутренние точки которой лежат в этой же компоненте (рис. 1). В результате мы получим некоторую замкнутую кривую. Число полных витков этой кривой, взятое со знаком + или − в зависимости от направления обхода с увеличением t, называется *индексом вращения* матрицы монодромии M. **Замечание.** В литературе чаще используется не совсем удачный термин *номер зоны устойчивости*, так как этот номер произвольное целое число, а настоящих областей устойчивости в данном случае всего две. Поэтому мы будем употреблять этот термин только для нумерации областей значений параметров системы, в которых она сильно устойчива.

В работе [1] фактически доказано следующее более общее утверждение[1].

Утверждение 1. *Две сильно устойчивые системы, матрицы монодромии которых принадлежат одной и той же области устойчивости, гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают их индексы вращения.*

Доказательство этого утверждения заключается в построении гомотопии между кривыми $X(t)$ и $Y(t)$, $0 \le t \le 2\pi$, где $X(t)$, $Y(t)$ матрицы решений двух сильно устойчивых систем, которым соответствует однотипное расположение мультипликаторов при условии, что совпадают их индексы вращения.

Таким образом, тип расположения мультипликаторов и индекс вращения представляют собой гомотопический инвариант сильно устойчивой канонической системы.

[1]Различие заключается в следующем. Возмущение $\dot{X} = (A(t) + \varepsilon B(t))X$ сильно устойчивой системы при комплексном ε приводит к тому, что обязательно один мультипликатор сдвигается внутрь окружности (мультипликатор 1-го типа), а другой – во внешность (мультипликатор 2-го типа) [2].

[1]Для канонических систем размерности $2k$, $k \ge 1$. При $k > 1$ число областей устойчивости (связных компонент множества устойчивости) равно 2^k [1].

При исследовании систем, зависящих от параметров, этот инвариант может меняться в зависимости от изменения паметров. Поэтому возникает задача описания геометрии областей устойчивости в пространстве параметров, в частности, границ таких областей [3]. Кроме того, для полной классификации канонических систем, требуется рассмотреть случай, когда $M \notin S_1, S_2$. Решение этой задачи основывается на свойствах уравнения Риккати, получаемого в результате проективизации линейной системы. Связь линейных систем с этим уравненем довно известна [4], но как заметил В.И. Арнольд в своих воспоминаниях об академике Я.Б. Зельдовиче [5]: "применения теории Пуанкаре к уравнению Риккати должны входить в учебники, но насколько я помню, никто из математиков их не заметил". Естественно, что ситуация с тех пор существенно изменилась, о чем свидельствует количество публикаций, посвященных применению этой теории (см., например, [6], [7]).

С другой стороны, многочисленные публикации, посвященные геометрическому описанию областей устойчивости канонических систем (см. [8], [9] и приведенную там библиографию), не используют теорию Пуанкаре. Поэтому основная цель данной работы показать, что эта теория позволяет получить как более прозрачное описание областей устойчивости (и неустойчивости), так и удобные средства их численного моделирования.

2. Уравнение Риккати, проективный поток и число вращения

Переход от однородных координат $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ к аффинным $w = x_2/x_1$ в (1) приводит к уравнению Риккати с периодическими коэффициентами

$$\dot{w} = (a(t) - b(t))w^2 - 2c(t)w + a(t) + b(t). \tag{6}$$

Это уравнение порождает *проективный поток*, индуцируемый линейной системой. Компактификация фазового простраства уравнения Риккати с помощью замены $w = \operatorname{tg}\theta/2$ $(-\pi \le \theta \le \pi)$ преобразует его в систему на торе

$$\dot{\varphi} = 1, \qquad \dot{\theta} = 2a(\varphi) + 2b(\varphi)\cos\theta - 2c(\varphi)\sin\theta = p(\varphi, \theta), \tag{7}$$

где (φ, θ) – угловые координаты на торе[1]. Проективный поток описывает угловую эволюцию решений системы (1).

Опишем основные свойства таких потоков, составляющих содержание теории Пуанкаре-Данжуа[2].

Пусть $\theta(t, \varphi_0, \theta_0)$ – решение (6) с начальными условиями (φ_0, θ_0). Так как $\dot{\varphi} \neq 0$, то существует предел: *число вращения* А. Пуанкаре

$$\rho = \lim_{t\to\infty} \frac{\theta(t, \varphi_0, \theta_0)}{t},$$

который не зависит от начальных данных и является непрерывной функцией параметров системы. Будем считать, что $\varphi_0 = 0$, рассматривать решение $\theta(t, \theta_0)$, можно представить в виде

$$\theta(t, \theta_0) = \rho t + \theta_0 + \gamma(t, \theta_0), \tag{8}$$

где функция γ периодична по θ_0 и $|\gamma| = o(t)$ при $t \to \infty$.

Поток, порождаемый системой (6), определяет сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности $f : S^1 \to S^1$ (отображение за период). Так как правые части в (7) аналитичны по θ, то f – аналитический гомеоморфизм. Поднятие F на универсальное накрытие

[1] Угловые координаты – это координаты на универсальном накрытии тора $\mathbb{R}^2$.

[2] Доказательства, формулируемых ниже утверждений, можно найти, например, в книге В.И. Арнольда [10], гл. 3, §11.

представимо в виде $F : \theta \to \theta + g(\theta)$, где $g(\theta)$, периодическая по θ функция[3]. Число вращения ρ выражается через $g(\theta)$:

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{g(\theta) + g(F(\theta)) + \cdots + g(F^{n-1}(\theta))}{n}.$$

Арифметические свойства числа вращения почти полностью определяют динамику потока на торе, допускающего существование такого числа.

Если оно иррационально, то по теореме Данжуа [11] в силу аналитичности гомеоморфизм f топологически сопряжен повороту[1] на угол $2\pi\rho$. Поток на торе топологически сопряжен линейному квазипериодическому потоку

$$(\varphi, \theta) \to (t + \varphi, \theta + \rho t). \tag{9}$$

Если оно рационально ($\rho = p/q$), то f имеет периодическую точку периода q. Поток на торе имеет замкнутую траекторию, делающую q оборотов по параллели тора и p оборотов по меридиану.

В рассматриваемом случае, если $\rho = p/q$, то гомеоморфизм F имеет периодическую точку периода q. Следательно, имеет место равенство

$$F^q(\theta_0) = \theta_0 \tag{10}$$

для некоторого θ_0.

Если производная $(F^q)'(\theta_0)$ отлична от единицы (невырожденный случай), то малое возмущение отображения F также имеет неподвижную точку периода q (теорема о неявной функции). Отсюда следует, что число вращения возмущенного отображения равно p/q. Поток на торе имеет структурно устойчивую (грубую) замкнутую траекторию [13].

Если же эта производная равна единице (вырожденный случай), то либо все точки отображения F^q неподвижные и поток на торе топологически эквивалентен линейному потоку

$$(\varphi, \theta) \to (t + \varphi, \theta + \rho t), \tag{11}$$

либо F^q имеет единственную полуустойчивую неподвижную точку и тогда поток на торе имеет единственную полуустойчивую замкнутую траекторию. Эти утверждения следуют из теоремы об оценки мощности множества минимальных множеств проективного потока на торе ([14], теорема 8) и, в какой-то мере, дополняют классификацию Пуанкаре.

Таким образом, рациональному числу вращения может соответствовать три топологически различных случая поведения проективного потока: он может иметь одну, две, континуум замкнутых траекторий. Для различения этих случаев служит следующее понятие.

Определение 2. *Говорят, что интервал (α, β) является интервалом захвата фазы для проективного потока, зависящего от параметра, если его число вращения постоянно на этом интервале.*

Существование интервалов захвата фазы легко обнаружить в численных экспериментах, что демонстрирует рис. 2, где слева показан график зависимости числа вращения от параметра ε потока, порождаемого уравнением

$$\dot{\theta} + 2\sin\theta = \varepsilon + \sin t + (\sin 3t + \cos^2 3t)\cos\theta. \tag{12}$$

[3]Отображение F легко построить, используя (8). Например, можно положить $F(\theta) = \theta + \gamma(2\pi, \theta)$.

[1]Если число вращения иррационально, поток на торе имеет единственное минимальное множество, которое либо весь тор, либо негде не плотно. Во втором случае минимальное множество может иметь разную топологическую структуру при одном и том же значении числа вращения, что было замечено Н. Маркли [12].

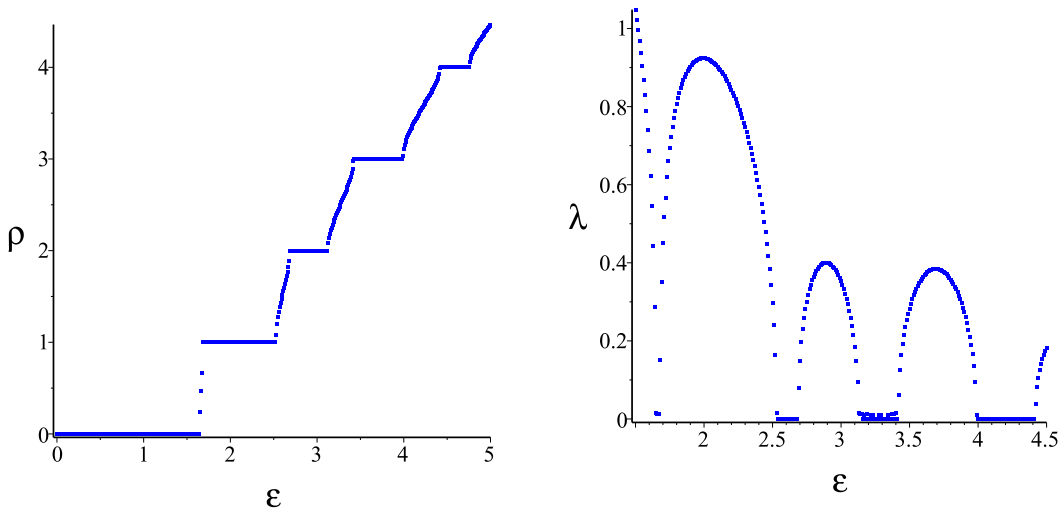


Рис. 2. Слева число вращения $\rho(\varepsilon)$ уравнения (12) на интервале $[0, 5]$, справа показатель Ляпунова $\lambda(\varepsilon)$ на интервале $[1.5, 4.5]$.

Интервалы захвата фазы – ступеньки на этом графике, соответствующие целым значениям числа вращения.

Очевидно, что структурно устойчивая периодическая траектория потока на торе имеет ненулевой показатель Ляпунова. Нетривиальное уравнение системы в вариациях[2] для траектории $\theta(t, \theta_0)$ записывается в виде

$$\dot{\xi} = (2c(t)\cos\theta(t,\theta_0) + 2b(t)\sin\theta(t,\theta_0))\xi = \frac{\partial p(t,\theta(t,\theta_0))}{\partial\theta}\xi. \tag{13}$$

В силу правильности периодических линейных систем, получаем

$$\lambda_{\pm} = \lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t (2c(s)\cos\theta(s,\theta_0) + 2b(s)\sin\theta(s,\theta_0))ds. \tag{14}$$

Отсюда следует, что исходная линейная система (1) является в этом случае гиперболической, так как ее показатели Ляпунова отличаютс от показателей (14) множителем 2. Отметим, что спектр показателей Ляпунова системы (1) либо $\{0\}$, либо $\{-\gamma, \gamma\}$, где $\gamma \neq 0$.

Если система зависит от двух параметров, то области постоянства числа вращения становятся двумерными – это, так называемые, *языки Арнольда.*

Определение 3. *Множество уровня числа вращения $\rho(\epsilon, \delta) =const$, если оно имеет непустую внутренность, называется языком Арнольда.*

На рис. 3 показаны языка Арнольда ($\rho = 0, 1, 2, 3$) для системы

$$\dot{\varphi} = 1, \qquad \dot{\theta} + 2\sin\theta = \varepsilon + \delta\sin\varphi + \delta(\sin 3\varphi + \cos^2 3\varphi)\cos\theta.$$

3. О топологической классификации канонических систем

Для классификации канонических систем необходимо иметь подходящее отношение эквивалентности. Так как рассматриваемые нами потоки определены на расслоениях, то топологическая эквивалентность таких потоков заменяется на послойную эквивалентность.

[2]Очевидно, что второе уравнение системы в вариациях имеет вид $\dot{\eta} = 0$.

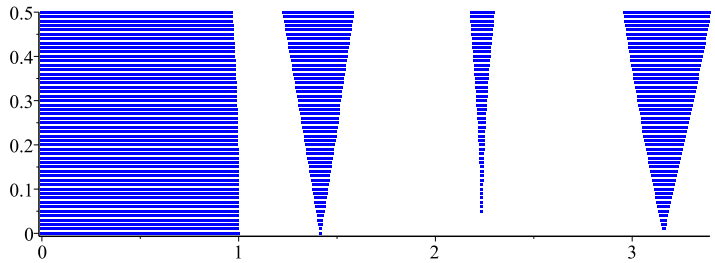


Рис. 3. Языки Арнольда ограничены парой непрерывных кривых и подходят оси $\delta = 0$ все более узким языком, ширина которого пропорциональна $O(\delta)$, за исключением $\rho = 0$.

Определение 4. *Два линейных расширения, порождаемых системами вида* (1) *послойно топологически эквивалентны, если существует непрерыное* 2π*-периодическое семейство гомеоморфизмов* $H_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *такое, что*

$$H_t(0) = 0, \qquad H_t(X_1(t)x) = X_2(t)H_t(x),$$

где $X_1(t)$, $X_2(t)$ *– фундаментальные матрицы решений соответствующих систем.*

В случае, когда H_t – линейный автоморфизм, говорят, что линейные расширения послойно линейно эквивалентны. Проективный поток, индуцируемый линейным расширением, также является потоком на расслоении $S^1 \times S^1$ (проективным расслоением). По аналоги с определением 4 будем говорить о послойной топологической эквивалентности проективных потоков.

Следуюие утверждения описывают связь между поведением траекторий проективного и линейного потоков. Хотя они и являются известными (см., например, [6]), мы доказываем их для полноты картины.

Лемма 1. *Гомеоморфизм* F *имеет неподвижные точки тогда и только тогда, когда мультиплткаторы матрицы монодромии* M *вещественны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Предположим, что мультипликаторы вещественны и различны: $\mu_1 < 1 < \mu_2$, $\mu_1\mu_2 = 1$. Тогда можно построить решение $\boldsymbol{x}(t)$ системы (1) такое, что

$$\boldsymbol{x}(t + 2\pi) = \mu_1 \boldsymbol{x}(t) \tag{15}$$

(решение Флоке).

Растяжение (сжатие) $r(t, \theta_0)$ по направлению $\theta(t, \theta_0)$ является решением линейного уравнения

$$\dot{r} = -\frac{\partial p(t, \theta(t, \theta_0))}{\partial \theta} r,$$

которое с точностью до знака совпадает с уравнением (13). Таким образом,

$$\boldsymbol{x}(t) = (r(t, \theta_0)\cos\theta(t, \theta_0), r(t, \theta_0)\sin\theta(t, \theta_0))$$

или в комплексном виде

$$\boldsymbol{z}(t, \theta_0) = r(t, \theta_0)e^{i\theta(t,\theta_0)}.$$

Из (15) получаем $\boldsymbol{z}(t + 2\pi, \theta_0) = r(t + 2\pi, \theta_0)e^{i\theta(t+2\pi,\theta_0)} = \mu_1 r(t)e^{i\theta(t,\theta_0)}$. Следовательно,

$$e^{i\theta(t+2\pi,\theta_0)} = e^{i\theta(t,\theta_0)+i2\pi n}$$

для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.

Повторяя эти рассуждения в обратном порядке получаем достаточность.

Заметим, что мультипликаторы (собственные значения матрицы монодромии) равны $\mu_{1,2} = e^{\pm\lambda}$. Поэтому, если показатели Ляпунова отличны от нуля, то мультипликаторы отличны от единицы. Если число вращения равно целому n, то это означает, что замкнутая траектория делает n оборотов по координате θ и один по φ.

Теорема 1. *Интервал захвата фазы определяется целыми значениями числа вращения проективного потока.*

Доказательство. Так как число вращения не меняется в интервале захвата фазы, то такой интервал соответствует структурно устойчивому случаю потока на торе. Такой поток имеет четное число грубых замкнутых траекторий (в нашем случае две), показатели Ляпунова которых отличны от нуля. Следовательно, мультипликаторы отображения монодромии вещественные и различные. По лемме 3.1 существование таких траекторий возможно тогда и только тогда, когда число вращения целое.

Пусть число врашения проективного потока равно нулю Тогда система (1) топологически эквивалентна гиперболической системе (теорема Гробмана-Хартмана)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}.$$

Такой системе соответствует система на торе

$$\varphi = 1, \qquad \dot{\theta} = -\sin\theta, \tag{16}$$

которую будем называть *гиперболической нормальной формой* системы (7).

Если число вращения равно $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то линейное преобразование

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix}$$

преобразует систему на торе в систему с нулевым числом вращения. Таким образом, проективный поток, соответсвующий любой структурно устойчивой кананической системе, топологически эквивалентен нормальной форме (16). **Замечание.** Вообще говоря, произвольный поток на торе может иметь интервалы захвата фазы для нецелых рациональных значений числа вращения. В работе [**?**] предложен конструктивный критерий проверки отсутствия таких интервалов.

Теорема 2. *Для того, чтобы кананическая система* (1) *была сильно устойчивой необходимо и достаточно, чтобы число вращения соответствующего проективного потока было нецелым.*

Доказательство. Необходимость. Все решения сильно устойчивой системы (1) ограничены, тогда по теореме Р. Камерона [15] она послойно линейно эквивалентна системе вида

$$\dot{\boldsymbol{x}} = d(t) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}, \tag{17}$$

где $d(t)$ – 2π-периодическая функция. Проективный поток определяется равенством

$$\theta(t, \theta_0) = 2d_0 t + \theta_0 + 2\int_0^t \tilde{d}(s)ds, \qquad d_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d(s)ds.$$

С другой стороны, матрица монодромии системы (17) имеет вид

$$X(2\pi) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi d_0 & -\sin 2\pi d_0 \\ \sin 2\pi d_0 & \cos 2\pi d_0 \end{pmatrix},$$

собственные значения которой равны

$$e^{\pm i2\pi d_0} = e^{\pm i\pi\rho}.$$

Они являются комплексными тогда и только тогда, когда ρ не является целым.

Достаточность следует из леммы 3.1.

Итак, если число вращения нецелое, то каноническая система является сильно устойчивой. Из теоремы 3.2 следует, что система на торе послойно эквивалентна системе

$$\varphi = 1, \qquad \dot{\theta} = \rho, \tag{18}$$

которую будем называть *эллиптической нормальной формой* (7).

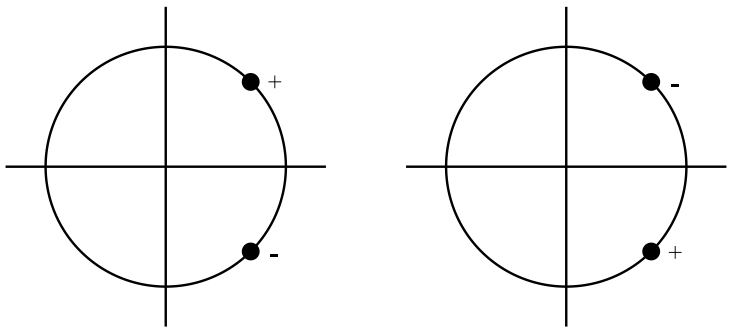


Рис. 4. Два типа мультипликаторов сильно устойчивой системы. Помеченные знаком + двигаются в положительном направлении, знаком − в отрацетельном.

Мультипликаторы сильно устойчивой системы при малом изменении параметров движутся по единичной окружности навстречу друг другу в направлении точки 1 или -1 (рис. 4). Матрица монодромии является матрицей поворота на угол $\pi\rho$. Имеет место неравенство $m\pi < \pi\rho < (m+1)\pi$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Тогда индекс вращения матрицы монодромии равен $m/2$, если m четно, или $(m+1)/2$, если m нечетно.

4. Заключительные замечания

Множество линейных канонических систем 2-го порядка дает пример класса динамических систем, в котором множество структурно устойчивых и множество устойчивых по Ляпунову систем имеют простое геометрическое описание (см. рис. 1). Число вращения проективного потока на торе дает полную информацию о расположении интервалов устойчивости (неустойчивости, которые являются множеством структурной устойчивости соответствующих проективных потоков). Конечно, простота этой картины является следствием теоремы Флоке-Ляпунова и свойства гамильтоновости исходной линейной системы.

Отметим, что приближенное вычисление чисел вращения не требует значительных вычислительных мощностей, для этого требуется обычный персональный компьютер. Для расчета показателей Ляпунова и областей устойчивости желательно использовать многопроцессорный вычислительный комплекс.

В настоящее время наблюдается повышенный интерес к геометрии областей структурной устойчивости (языков Арнольда) уравнения

$$\dot{\theta} = \varepsilon + \delta a(\omega t) - \sin\theta. \tag{19}$$

Это связано с тем обстоятельством, что оно моделирует эффект Джозефсона[1] в квантовой физике. В ряде работ (см., например, [7] и приведенную там библиографию) исследуется геометрия языков Арнольда двупараметрического семейства уравнений вида (19) как множеств уровня числа вращения. С другой стороны, уравнение (19) служит моделью элемента потоковой цепочки системы фазовой синхронизации [16]. В этом случае число вращения ρ рассматривается как частота внутренних колебаний, слагаемое $\delta a(\omega t)$ как внешнее периодической воздействие с частотой ω, а интервалы захвата фазы как режимы, соответствующие синхронизации[2].

Заметим, что если коэффицинты матрицы $A(t)$ гладкие функции и $b^2(t) + c^2(t) \neq 0$, то система (7) гладким преобразованием приводится к виду (19).

Литература

1. Гельфанд И. М., Лидский В. Б. О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // УМН. 1955. Т. 10, № 1. С. 3–10.

2. Крейн М. Г. Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами // ДАН СССР. 1950. Т. 73, № 3. С. 445–448.

3. Крейн М. Г. Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // сб. «Памяти Александра Александровича Андронова». М.: изд-во АН СССР. 1955. С. 413–498.

4. Prüfer H. Neue Herleitung der Sturm-Liouvilleschen Reihenentwicklung stetiger Funktionen // Math. Annalen. 1926. vol. 95. pp. 488–518.

5. Арнольд В.И. ЯБ и математика // Природа. 1992, № 2. С. 105–108.

6. Перов А. И. Каноническая система двух дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и теория Пуанкаре-Данжуа дифференциальных уравнений на торе // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51, № 2. С. 373–387.

7. Глюцук А. А., Клепцын Д. А., Филимонов И. В., Щуров И. В. О квантовании перемычек в уравнении, моделирующем эффект Джозефсона // Функциональный анализ и его прил. 2014. Т. 48, № 4. С. 47–64.

8. Broer H., Levi M. Geometrical Aspects of Stability Theory for Hill's Equations //Arch. Rational Mech. Anal. 1995. vol. 131. pp. 225–240.

9. Broer H., Simó C. Resonance Tongues in Hill's Equations: A Geometric Approach // Journal of Differential Equations. 2000. vol. 166. pp. 290–327.

[1]Это явление возникновения сверхпроводящей компоненты элетричечкого тока, протекающего через слой диэлектрика между двумя сверхпроводниками.

[2]Что объясняет происхождение термина "интервал захвата фазы".

10. Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. 2000. 400 С.

11. Denjoy A. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1932. vol. 11. pp. 333–375.

12. Markley N. Homeomorphisms of the circle without periodic points // Proc. Lond. Math. Soc. 1970. vol. 20, No. 3. pp. 688–698.

13. Майер А.Г. Грубые преобразования окружности в окружность // Ученые записки ГГУ. 1939. Т. 12. С. 215–229.

14. Sacker R.J., Sell G.R. A spectral theory for linear differential systems // J. Diff. Equat. 1978. vol. 27. pp. 320–358.

15. Cameron R.H. Almost periodic properties of bounded solutions of linear differential equations with almost periodic coefficients // J. Math. Phys. 1936. vol. 15. pp. 73–81.

16. Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации // Горький: ИПФ АН СССР. 1989. 256 С.

MSC2020 34C25

The geometry of stability regions of linear canonical systems of periodic differential equations

N. A. Mamaeva, A. N. Sakharov

Nizhny Novgorod state agricultural academy

Abstract: A.M. Lyapunov and A. Poincare in the century before last built the theory of linear periodic systems of differential equations. The result of their research was the theorem of Floquet-Lyapunov and Poincare-Lyapunov. However, by the middle of the last century, there was a need to find opportunities for using this theory in applications. A number of wonderful works of M.G. Krein, I.M. Gelfand, V.B. Lidsky et al was appeared, in whose task of describing canonical periodic systems was reduced to a description of geometry the behavior of the eigenvalues of the monodromy operator. Since the monodromy operator in this case is a linear operator, his made it possible to use computational methods of linear algebra. For systems that depend on parameters, the behaviory of the multipliers is determined by the geometry of the regions of stability of solutions that appear and disappear when the system parameters change. At the end of the last century, the method of compactification of the phase space of the system was systematically used to describe the geometry of stability regions, which allowed us to use the results here theory of dynamical systems on compact spaces. Using two-dimensional systems as an example, both approaches are described and their partial topological classification is given.

Keywords: canonical linear systems, monodromy operator, multipliers, stability zones, rotation number, Arnold languages, topological equivalence.

References

1. Gelfand I. M., Lidskiy V. B. [On the structure of stability domains for linear canonical systems of differential equations with periodic coefficients]. UMN. 1955. vol. 10, No. 1. pp. 3–10. (in Russian).

2. Kreyn M. G. [Generalization of some studies of A.M. Lyapunov on linear differential equations with periodic coefficients]. DAN SSSR. 1950. vol. 73, No. 3. pp. 445–448. (in Russian).

3. Kreyn M. G. [Fundamentals of the theory of λ-zones of stability of the canonical system of linear differential equations with periodic coefficients]. Pamyati Aleksandra Aleksandrovicha Andronova. M.: AN SSSR Proc. 1955. p. 413–498. (in Russian).

4. Prüfer H. Neue Herleitung der Sturm-Liouvilleschen Reihenentwicklung stetiger Funktionen. Math. Annalen. 1926. vol. 95. pp. 488–518.

5. Arnold V.I. [YaB and mathematics]. Priroda. 1992, No. 2. pp. 105–108. (in Russian).

6. Perov A. I. [The canonical system of two differential equations with periodic coefficients and the Poincar?-Denjoy theory of differential equations on the torus]. Sibirskiy matematicheskiy zhurnal. 2010. vol. 51, No. 2. pp. 373–387. (in Russian).

7. Glutsuk A. A., Kleptsyn D. A., Filimonov I. V., Shchurov I. V. [On the Adjacency Quantization in an Equation Modeling the Josephson Effect]. Funktsional'nyy analis i ego pril. 2014. vol. 48, No. 4. pp. 47–64. (in Russian).

8. Broer H., Levi M. Geometrical Aspects of Stability Theory for Hill's Equations. Arch. Rational Mech. Anal. 1995. vol. 131. pp. 225–240.

9. Broer H., Simó C. Resonance Tongues in Hill's Equations: A Geometric Approach. Journal of Differential Equations. 2000. vol. 166. pp. 290–327.

10. Arnol'd V. I. [Geometric methods in the theory of ordinary differential equations]. Izhevsk: Regulyarnya i khaoticheskaya dinamika. 2000. 400 p. (in Russian).

11. Denjoy A. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1932. vol. 11. pp. 333–375.

12. Markley N. Homeomorphisms of the circle without periodic points. Proc. Lond. Math. Soc. 1970. vol. 20, No. 3. pp. 688–698.

13. Mayer A.G. [Rough Circle to Circle Conversions]. Uchenye zapiski GGU. 1939. Vol. 12. pp. 215–229. (in Russian).

14. Sacker R.J., Sell G.R. A spectral theory for linear differential systems. J. Diff. Equat. 1978. vol. 27. pp. 320–358.

15. Cameron R.H. Almost periodic properties of bounded solutions of linear differential equations with almost periodic coefficients. J. Math. Phys. 1936. vol. 15. pp. 73–81.

16. Afraymovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shalfeev V.D. [Stability, structures and chaos in nonlinear synchronization networks]. Gorkiy: IPF AN SSSR. 1989. 256 p. (in Russian).

УДК 532.529:541.182

Модель переноса частиц в неоднородно нагретой намагничивающейся или поляризующейся жидкости*

Мартынов С. И.

Сургутский государственный университет

Аннотация: В статье представлены модели переноса частицы в неоднородно нагретой жидкости за счет сил, действующих на нее со стороны жидкости и приложенного электрического или магнитного поля. Получены общие выражения для сил и проведен качественный анализ динамики частицы в результате их действия.

Ключевые слова: градиент температуры, вязкая жидкость, частица, магнитное поле, электрическое поле.

1. Введение

Явление разделения веществ бинарной смеси в неоднородном температурном поле называется термодиффузией или эффектом Людвига-Соре [1]. Отношение коэффициента термодиффузии к коэффициенту обычной диффузии называется коэффициентом Соре S. В молекулярных системах -смесях газов, жидкостей, растворах солей – значения этого коэффициента весьма незначительны, что делает проблематичным использование явления термодиффузии в прикладных задачах. Иная ситуация с практическим применением эффекта Людвига-Соре в дисперсных системах – коллоидных растворах, суспензиях. Перенос микрочастиц под действием неоднородного температурного поля носит название термофореза. Долгое время считалось, что термофорез характерен только для аэрозолей и поэтому рассматривалась теоретические модели переноса именно аэрозольных частиц [2]. Однако в экспериментах [3,4] с магнитными жидкостями в однородном магнитном поле было обнаружено интенсивное миграционное движение твердых коллоидных частиц при наличии градиента температуры. Характерное значение коэффициента Соре такого термодиффузионного движения оказалось на два-три порядка больше максимальных значений для молекулярных систем. В работах [5,6] делаются попытки теоретически обосновать такое перемещение в рамках различных моделей. Учитывая, что однородное магнитное поле не создает силы, действующей на частицы в таких дисперсных системах, то можно предполагать, что перемещение частиц определяется силой, зависящей как от градиента температуры, так и от величины напряженности приложенного поля. Наличие такой силы в намагничивающейся или поляризующейся неоднородно нагретой жидкости было теоретически показано в работах [7, 8]. Однако выражение для силы, действующей на частицу, были получены при различных упрощениях. Например, в работе [8] считалось, что коэффициенты теплопроводности частицы и жидкости одинаковые. Актуальность исследований по переносу частиц в неоднородно нагретой жидкости в магнитных или электрических полях связано так же с технологиями добычи трудно извлекаемых запасов нефти [9] и механизмами перемещения наномоторов [10, 11]. Казалось бы, что это две совершенно разные области как научных исследований, так и практической деятельности человека. Между тем один

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект No 18-41-860002 р-а.

из перспективных методов воздействия на пласт с трудно извлекаемыми запасами нефти это использования электромагнитного поля, которое приводит к разогреву нефти. При использовании магнитной жидкости в качестве вспомогательного агента вытеснения нефти из пласта коэффициент подвижности нефти увеличился в 9,3 раза [9]. Другая современная область исследований, связанная с переносом частиц в неоднородно нагретой жидкости, это создание синтетических наномоторов, механизм перемещения которых связан с воздействием электрического или магнитного поля. Наличие неоднородного температурного поля обусловлено практическими условиями их применения, например, использование наномоторов в целях доставки терапевтической нагрузки в больные клетки человека. Во всех случаях необходимо модель переноса частиц в жидкости при наличии температурного и магнитного или электрического полей. Ниже рассматриваются модели переноса частиц в неоднородно нагретой жидкости в электрическом и магнитном поле с учетом изменения ее электрической или магнитной проницаемости от температуры.

2. Модель переноса частиц в неоднородно нагретой жидкости в электрическом поле

Создание двойного электрического слоя вокруг частиц является одним из способов предотвращения коагуляции частиц в дисперсных системах. Перенос частицы в такой жидкости при наличии градиента температуры и электрического поля определяется силами, действующими на нее со стороны жидкости и поля [12]. Рассмотрим сферическую частицу радиуса a, помещенную в жидкость вязкости η и скоростью $\mathbf{u}$, в которой имеются ионы двух сортов: отрицательно и положительно заряженные с некоторыми эффективными концентрациями n_1 и n_2, зарядами e_1 и $e_2 = -e_1 = e > 0$, скоростями v_1 и v_2, подвижностью b_1 и b_2, коэффициентами диффузии D_1 и D_2, связанные с подвижностями ионов соотношениями Эйнштейна $D_i = kTb_i, i = 1, 2$. Будем предполагать, что в объеме среды не протекают реакции диссоциации нейтральных молекул на положительные и отрицательные ионы и процессы рекомбинации ионов. Однако на поверхности частицы может происходит каталитическая реакция жидкости, приводящая к появлению ионов разного знака. Такие реакции характерны для синтетических наномоторов в виде янус-частиц, механизм перемещения которых основан на так называемом автоэлектрофорезе. Суть этого механизма в том, что на поверхности частицы накапливаются заряды разных знаков и их можно рассматривать как диполь с моментом $\mathbf{P}$. Вокруг частицы создается электрическое поле напряженности $\mathbf{E}$, соответствующее полю диполя с таким моментом. Под действием этого поля ионы вокруг частицы приводят в движение жидкость, течение которой и формирует силу, перемещающую частицу. Течение жидкости может быть сформирована и действием внешнего электрического поля.

Механизм действия температуры на перемещение частицы в электрическом поле следующий. Неоднородное температурное поле меняет распределение ионов в жидкости и, следовательно, формируемое их движением течение жидкости. Кроме того, наличие неоднородного температурного поля приводит к изменению диэлектрической проницаемости окружающей частицу жидкости, что создает еще одну объемную силу, приводящую окружающую частицу жидкость в движение и создающую дополнительную силу, действующую на частицу.

Для вычисления силы, действующей на частицу и позволяющей описать динамику ее движения, необходимо знать распределения в жидкости скорости, давления, напряженности электрического поля и температуры. Будем предполагать, что параметры течения жидкости соответствуют малым числам Рейнольдса $Re << 1$ и Пекле $Pe << 1$. Уравнения распределения давления p, скорости u, температуры T_f в жидкости и в частице T_p в этом случае имеют вид:

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{f} - \nabla \mathbf{p} + \eta \mathbf{\Delta u} = \mathbf{0},$$
$$\frac{\partial T_f}{\partial t} = -\chi_f \Delta T_f, \quad \frac{\partial T_p}{\partial t} = -\chi_p \Delta T_p.$$

Выражении для силы $\mathbf{f}$, действующей на единицу объема жидкости, имеет следующий вид:

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} - \frac{E^2}{8\pi}\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial T}\nabla T,$$

здесь ε_f - диэлектрическая проницаемость жидкости, q - объемный электрический заряд в жидкости.

Граничные условия на поверхности частицы записываются следующим образом:

$$u_i = V_{0i} + \Omega_{ij} x_j, \mid \mathbf{r} \mid = a,$$

$$T_f = T_p, \quad \chi_f \nabla T_f \cdot \mathbf{n} = \chi_p \nabla T_p \cdot \mathbf{n}, \quad \mid \mathbf{r} \mid = a.$$

Здесь, вектор $\mathbf{V}_0$ обозначает линейную скорость частицы, Ω_{ij} - тензор угловой скорости частицы, $\mathbf{r}$ - радиус-вектор, соединяющий центр частицы с произвольной точкой жидкости, χ_f и χ_p - коэффициенты температуропроводности жидкости и частицы, соответственно, $\mathbf{n}$ - вектор единичной нормали к поверхности частицы.

Далеко от частицы должны затухать возмущения от частицы

$$\mathbf{u} \to \mathbf{U}_0, \quad \nabla T_f \to \nabla T_{f0}, \quad p \to p_0 \quad \text{при} \mid \mathbf{r} \mid \to \infty,$$

здесь $\mathbf{U_0}$ - скорость, ∇T_{f0} - градиент температуры, p_0 - давление, заданные в жидкости далеко от частицы.

Поскольку жидкость и частица взаимодействуют с электрическим полем, то необходимо записать уравнения для электрического поля в жидкости и частице. В приближении электродинамики они имеют следующий вид для жидкости:

$$\nabla \varepsilon_f \mathbf{E} = 4\pi q, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad q = \sum_i e_i n_i,$$
$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad n_i \mathbf{v}_i = n_i \mathbf{u} \mp n_i b_i \mathbf{E} - D_i \nabla n_i, \qquad i = 1, 2.$$

Внутри диэлектрической частицы уравнения поля имеют вид:

$$\nabla \varepsilon_p \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

здесь ε_p - диэлектрическая проницаемость частицы.

С учетом того, что $\mathbf{E} = \nabla \varphi$, граничные условия на поверхности частицы имеют вид:

$$\varphi_f = \varphi_p, \quad \varepsilon_f \nabla \varphi_f \cdot \mathbf{n} = \varepsilon_p \nabla \varphi_p \cdot \mathbf{n}, \quad n_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} = \alpha_i \quad \text{при} \mid \mathbf{r} \mid = a, \qquad i = 1, 2.$$

Коэффициенты α_i определяют параметры поверхностных электрохимических процессов. Далеко от частицы в жидкости имеем следующие условия для электрического поля:

$$\mathbf{E} \to \mathbf{E}_0, \quad n_i = n_{i0} \quad \text{при} \mid \mathbf{r} \mid \to \infty,$$

здесь $\mathbf{E}_0$ и n_{i0} напряженность электрического поля и концентрация ионов далеко от частицы.

Решение приведенных выше уравнений позволяют определить силу, действующую на частицу со стороны жидкости и электрического поля. Линейная $\mathbf{V}_0$ и Ω_{ij} угловая скорости

частицы определяются из уравнений динамики, которые в безинерционном приближении имеют вид:

$$\mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{F}^{(h)} = 0, \quad \mathbf{T}^{(e)} + \mathbf{T}^{(h)} = 0.$$

Здесь $\mathbf{F}^{(h)}$ и $\mathbf{T}^{(h)}$ сила и момент, действующие на частицу со стороны жидкости, $\mathbf{F}^{(e)}$ и $\mathbf{T}^{(e)}$ сила и момент, действующие на частицу со стороны электрического поля.

Необходимо отметить, что в неоднородно нагретой жидкости в поле силы тяжести возможно возникновение конвективного течения жидкости, которое влияет на перенос частицы. В поляризующихся или намагничивающихся жидкостях такую же роль, как сила тяжести, играют объемные силы, определяемые градиентами полей $\alpha_f E \nabla E$ и $\xi_f H \nabla H$, что позволяет использовать такие жидкости в качестве теплоносителей в невесомости. Поскольку предполагается, что коэффициенты поляризации $\alpha_f = (\varepsilon_f - 1)/4\pi$ и намагниченности $\xi_f = (\mu_f - 1)/4\pi$ зависят от температуры, то и градиенты соответствующих полей также могут быть обусловлены только неоднородностью температурного поля. Чтобы исключить влияние конвективного течения на перенос частицы, здесь и далее рассматриваются такие градиенты температуры, при которых конвекция в жидкости отсутствует. Соответствующие ограничения на величину градиента температуры получаются так же, как и в случае отсутствии конвекции в поле силы тяжести, и в данной работе не приводятся.

3. Модель переноса частиц в неоднородно нагретой жидкости в магнитном поле

Другим способом предотвращения коагуляции частиц в дисперсных системах является использование защитного слоя из молекул поверхностно-активного вещества на поверхности частиц. Примером таких систем являются магнитные жидкости, состоящие из коллоидных магнитных частиц в жидкости носителе. В неоднородном температурном поле частица, помещённая в такую жидкость, перемещается в результате действия сил со стороны жидкости и магнитного поля. Механизм влияния градиента температуры на перемещение частицы в магнитном поле во многом такой же, как и в электрическом поле. Неоднородное температурное поле меняет распределение дисперсных частиц в жидкости-носителе и, следовательно, ее магнитную проницаемость. Возникающий градиент магнитной проницаемости создаёт объёмную силу, приводящую окружающую частицу жидкость в движение. Таким образом получаем совместное воздействие на частицу жидкости и магнитного поля.

В приближении малых чисел Рейнольдса $Re << 1$ и Пекле $Pe << 1$ уравнения распределения давления p, скорости u, температуры T_f в жидкости и в частице T_p имеют вид:

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{f} - \nabla \mathbf{p} + \eta \mathbf{\Delta u} = \mathbf{0},$$
$$\frac{\partial T_f}{\partial t} = -\chi_f \Delta T_f, \quad \frac{\partial T_p}{\partial t} = -\chi_p \Delta T_p.$$

Выражении для силы $\mathbf{f}$, действующей на единицу объема жидкости, имеет следующий вид:

$$\mathbf{f} = -\frac{H^2}{8\pi} \frac{\partial \mu_f}{\partial T} \nabla T,$$

здесь μ_f - магнитная проницаемость жидкости, $\mathbf{H}$ - напряженность магнитного поля.

Граничные условия на поверхности частицы записываются следующим образом:

$$u_i = V_{0i} + \Omega_{ij} x_j, \mid \mathbf{r} \mid = a,$$

$$T_f = T_p, \quad \chi_f \nabla T_f \cdot \mathbf{n} = \chi_p \nabla T_p \cdot \mathbf{n}, \quad \mid \mathbf{r} \mid = a.$$

Здесь, вектор $\mathbf{V}_0$ обозначает линейную скорость частицы, Ω_{ij} - тензор угловой скорости частицы, $\mathbf{r}$ - радиус-вектор, соединяющий центр частицы с произвольной точкой жидкости, χ_f и χ_p - коэффициенты температуропроводности жидкости и частицы, соответственно, $\mathbf{n}$ - вектор единичной нормали к поверхности частицы.

Далеко от частицы условия затухания возмущений

$$\mathbf{u} \to \mathbf{U}_0, \quad \nabla T_f \to (\nabla T_f)_0, \quad p \to p_0 \quad \text{при} \mid \mathbf{r} \mid \to \infty,$$

здесь $\mathbf{U_0}$ - скорость, ∇T_{f0} - градиент температуры, p_0 - давление, заданные в жидкости далеко от частицы.

Поскольку жидкость и частица взаимодействуют с магнитным полем, то необходимо записать уравнения для электрического поля в жидкости и частице. В приближении феррогидродинамики они имеют следующий вид для жидкости:

$$\nabla \mu_f \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0.$$

Внутри намагничивающейся частицы уравнения поля имеют вид:

$$\nabla \mu_p \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0,$$

здесь μ_p - магнитная проницаемость частицы.

С учетом того, что $\mathbf{H} = \nabla \varphi$, граничные условия на поверхности частицы имеют вид:

$$\varphi_f = \varphi_p, \quad \mu_f \nabla \varphi_f \cdot \mathbf{n} = \mu_p \nabla \varphi_p \cdot \mathbf{n}, \quad \mid \mathbf{r} \mid = a.$$

Далеко от частицы в жидкости имеем следующие условия для электрического поля:

$$\mathbf{H} \to \mathbf{H}_0 \quad \text{при} \mid \mathbf{r} \mid \to \infty.$$

Так же, как и в случае электрического поля, решение приведенных выше уравнений позволяют определить силу, действующую на частицу со стороны жидкости и электрического поля. Линейная $\mathbf{V}_0$ и Ω_{ij} угловая скорости частицы определяются из уравнений динамики, которые в безинерционном приближении имеют вид:

$$\mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{F}^{(h)} = 0, \quad \mathbf{T}^{(e)} + \mathbf{T}^{(h)} = 0.$$

Здесь $\mathbf{F}^{(h)}$ и $\mathbf{T}^{(h)}$ сила и момент, действующие на частицу со стороны жидкости, $\mathbf{F}^{(e)}$ и $\mathbf{T}^{(e)}$ сила и момент, действующие на частицу со стороны электрического поля.

Легко видеть, что в случае отсутствия зарядов в жидкости $q = 0$ системы уравнений для перемещения частицы в электрическом и магнитном полях имеют аналогичный вид. Поэтому аналогичный вид имеют решения этих уравнений и, соответственно, зависимость перемещения от напряженности приложенного поля. Ниже рассматривается случай перемещения частицы в магнитном поле.

4. Анализ возможного перемещения частицы в неоднородно нагретой жидкости во внешнем магнитном поле

Рассмотрим перемещение частицы в неоднородно нагретой жидкости во внешнем магнитном поле. Силы, действующие на частицу со стороны жидкости и поля, определяются следующим образом

$$F_i^{(h)} = \oint \left[-p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j ds, \quad F_i^{(e)} = \frac{1}{4\pi} \oint \left(\mu_f H_{fi} H_{fj} - \mu_f \frac{H_f^2}{2} \delta_{ij} \right) n_j ds.$$

Для получения явных выражений сил необходимо подставить распределения скорости, давления, температуры и напряженности магнитного поля в окружающей частицу жидкости, которые удовлетворяют приведенной выше системе уравнений. В общем случае найти решение данной системы уравнений представляет собой достаточно сложную задачу. В настоящей работе рассматривается случай квазистационарного движения частицы, когда параметры меняются так медленно, что производными по времени от параметров можно пренебречь по сравнению с другими членами уравнений. Кроме того, распределения искомых величин будем искать в линейном приближении по заданному градиенту температуры ∇T_{f0}. Поскольку в рассматриваемой модели распределение температуры и напряженности магнитного поля не связаны с решением гидродинамической задачи, то необходимо сначала найти решения уравнений теплопроводности и магнитного поля в жидкости и частице с соответствующими граничными условиями. В выбранном приближении возмущения частицей потенциала магнитного поля φ_f и поля температуры с заданными напряжением $\mathbf{H}_0$ и градиентом ∇T_{f0} на бесконечности удовлетворяют одинаковым уравнениям и граничным условиям. Поэтому и решения для температурного и магнитного полей в жидкости вокруг частицы имеют одинаковы вид, приведенный ниже:

$$T_f = T_{f0} + (\nabla T_f)_0 \cdot \mathbf{x} \left(1 + \frac{\chi_f - \chi_p}{2\chi_f + \chi_p} \frac{a^3}{X^3} \right),$$
$$\varphi_f = \varphi_{f0} + \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{x} \left(1 + \frac{\mu_f - \mu_p}{2\mu_f + \mu_p} \frac{a^3}{X^3} \right).$$

Здесь под параметрами T_{f0} и φ_{f0} понимаются значения температуры и потенциала магнитного поля в точке жидкости, занимаемой центром частицы, но как если бы ее там не было.

Найденные выражения для распределения температуры и потенциала магнитного поля позволяют определить силу $\mathbf{f}$, действующую на единицу объема жидкости. Будем полагать так же, что в линейном приближении по градиенту температуры градиент магнитной проницаемости представляется в следующем виде:

$$\nabla \mu_f = \left(\frac{\partial \mu_f}{\partial T} \right)_0 \nabla T_f.$$

Введем следующие обозначения

$$G = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \mu_f}{\partial T} \right)_0, \quad A = \frac{\mu_{f0} - \mu_p}{2\mu_{f0} + \mu_p}, \quad B = \frac{\chi_f - \chi_p}{2\chi_f + \chi_p}.$$

Индексом "0"обозначены значения переменных величин в точке жидкости, занимаемой центром частицы. Учтем также, что напряженность магнитного поля в жидкости в отсутствии частицы определяется в линейном приближении по ∇T_{f0} как

$$\mathbf{H}_f = \mathbf{H}_0 \left[1 - \frac{1}{\mu_{f0}} \left(\frac{\partial \mu_f}{\partial T}\right)_0 (\nabla T_f)_0 \cdot \mathbf{x}\right].$$

Учитывая все сказанное выше получаем следующее выражение для силы $\mathbf{f}$:

$$\begin{gathered}
\mathbf{f} = -G[H_0^2(\nabla T_f)_0 - H_0^2 B\frac{a^3}{X^3}(\nabla T_f)_0 + 3H_0^2 B\frac{a^3}{X^5}((\nabla T_f)_0 \cdot \mathbf{x})\mathbf{x} - \\
-2AH_0^2\frac{a^3}{X^3}(\nabla T_f)_0 + A^2H_0^2\frac{a^6}{X^6}(\nabla T_f)_0 + 6A\frac{a^3}{X^5}(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{x})^2(\nabla T_f)_0 + \\
+3A^2\frac{a^6}{X^8}(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{x})^2(\nabla T_f)_0 + 2ABH^2\frac{a^6}{X^6}(\nabla T_f)_0 - 6ABH_0^2\frac{a^6}{X^8}((\nabla T_f)_0 \cdot \mathbf{x})\mathbf{x} - \\
-A^2BH^2\frac{a^9}{X^9}(\nabla T_f)_0 + 3A^2BH_0^2\frac{a^9}{X^{11}}((\nabla T_f)_0 \cdot \mathbf{x})\mathbf{x} - 6AB\frac{a^6}{X^8}(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{x})^2(\nabla T_f)_0 - \\
-18AB\frac{a^6}{X^{10}}(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{x})^2((\nabla T_f)_0 \cdot \mathbf{x})\mathbf{x} - 3A^2B\frac{a^9}{X^{11}}(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{x})^2(\nabla T_f)_0 - \\
-9A^2B\frac{a^9}{X^{13}}(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{x})^2((\nabla T_f)_0 \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}].
\end{gathered}$$

Зная силу, действующую на единицу объема жидкости, необходимо найти решение гидродинамических уравнений. Однако полученное выражение для силы $\mathbf{f}$ достаточно сложное в плане функциональной зависимости от переменной X. Но поскольку уравнения линейные, то общее решение полученных линейных уравнений гидродинамики жидкости можно представить в виде суммы из частных решений, когда в выражении для силы $\mathbf{f}$ берутся только слагаемые пропорциональные A, A^2, AB и A^2B, соответственно. Нахождение решение гидродинамических уравнений в каждом из четырех случаях представляет собой, вообще говоря, не тривиальную задачу. При нахождении решений использовались методы, разработанные в работах [12,13]. В настоящей работе, в виду сложности получения этих решений гидродинамических уравнений и громоздкости полученных выражений, подробные вычисления не приводится.

Общий вид выражения для суммы сил $\mathbf{F}^{(\mathbf{h})} + \mathbf{F}^{(\mathbf{e})}$ в случае произвольного внешнего магнитного поля записывается следующим образом:

$$\mathbf{F}^{(h)} + \mathbf{F}^{(e)} = -6\pi\eta a\mathbf{V}_0 + KH^2\nabla\mu_f + L\mu_f\nabla H^2 + M(\mathbf{H} \cdot \nabla\mu_f)\mathbf{H}.$$

Учитывая найденные решения для распределения скорости, давления, температуры и потенциала магнитного поля в жидкости вокруг частицы и подставляя их в выражение для сил, действующих на частицу, после вычислений получим следующий вид:

$$\begin{gathered}
\mathbf{F}^{(h)} + \mathbf{F}^{(e)} = -6\pi\eta a\mathbf{V}_0 + \frac{4\pi a^3}{3}[((K_1 - L_1)A + (K_2 - L_2)A^2 + (K_3 - L_3)AB + \\
+(K_4 - L_4)A^2B)H_0^2\nabla T_{f0} + (M_1A + M_2A^2 + M_3AB + M_4A^2B)(\mathbf{H}_0 \cdot \nabla T_{f0})\mathbf{H}_0].
\end{gathered}$$

Здесь безразмерные коэффициенты K_i, L_i, M_i $(i = \overline{1,4})$ получаются в результате вычислений и определяются решениями уравнений гидродинамики и магнитного поля.

Приравнивая сумму сил к нулю, получаем выражение для скорости перемещения частицы $\mathbf{V}_0$. Как видно из приведенных выше выражений, скорость перемещения зависит от величины вектора напряженности магнитного поля $\mathbf{H}_0$ и его ориентации относительно градиента температуры ∇T_{f0}. При ориентации вектора напряженности магнитного поля вдоль или перпендикулярно градиента температуры скорость частицы достигает, соответственно, максимального или минимального значения. Кроме того, в зависимости от относительных

значений намагниченности и температуропроводности жидкости и частицы значения параметров A и B могут иметь как положительные, так и отрицательные значения. Это означает, что направление скорости, а, следовательно, и перемещения частицы может происходить как по вектору градиента температуры, так и против него. Увеличение $\mathbf{H}_0$ приложенного магнитного поля увеличивает скорость перемещения частицы при любой его ориентации относительно градиента температуры. Таким образом, магнитное поле может быть использовано для управления перемещением частицы в неоднородно нагретой жидкости.

Поскольку модели, описывающие перемещение частицы в неоднородно нагретой жидкости в электрическом и магнитном полях, имеют аналогичные уравнения, а, следовательно, и аналогичные решения, то полученные выше результаты для магнитного поля, справедливы и для случая электрического поля.

Литература

1. де Гроот С. Р., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., Мир. 1964. 456 с.

2. Баканов С П., Дерягин Б. В. Теория термофореза больших твердых аэрозольных частиц // ДАН СССР. 1962. Т. 147. № 1. с. 139-142.

3. Völker T., Blumsb E., Odenbacha S. Thermodiffusion in magnetic fluids // J. Magn. Magn. Mater. 2002. vol. 252. pp. 218–220.

4. Völker T., Odenbach S. The influence of a uniform magnetic field on the Soret coefficient of magnetic nanoparticles // Phys. Fluids. 2003. vol. 15. 2198. Doi: 10.1063/1.1584435

5. Lange A. Magnetic Soret effect: Application of the ferrofluid dynamics theory //Phys. Rev. 2004. E 70. 046308. Doi: 10.1103/PhysRevE.70.046308

6. Sprenger L., Adrian Lange A., Odenbach S. Thermodiffusion in ferrofluids regarding thermomagnetic convection // C. R. Mecanique. 2013. vol. 341. pp. 429–437. Doi: 10.1016/j.crme.2013.02.005

7. Блум Э.Я. О термофорезе частиц в намагничивающихся суспензиях // Магнитн. гидродин. 1979. № 1. С. 23-27.

8. Мартынов С.И., Налетова В.А., Тиминин Г.А. Движение частиц в неоднородно нагретой намагничивающейся или поляризующейся жидкости. В сб.: Современные проблемы электрогидродинамики. М., МГУ. 1984. С.133-144.

9. Барышников А.А. Исследование и разработка технологии увеличения нефтеотдачи за счет вытеснения с применением электромагнитного поля. Дисс. ... канд. тех. н. Тюмень. 2014. 159 с.

10. Vissers T., van Blaaderen A., Imhof A. Band Formation in Mixtures of Oppositely Charged Colloids Driven by an ac Electric Field // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 106. Iss. 22. 228303. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.228303.

11. Chen X-Z., Hoop M., Mushtaq F., Siringil E., Hu Ch., Nelson B. J., Pané S. Recent developments in magnetically driven micro- and nanorobots // Appl. Mat. Today. 2017. vol.9. pp. 37-48. DOI: 10.1016/j.apmt.2017.04.006

12. Мартынов С. И. Гидродинамическое взаимодействие частиц // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 1998. № 2. С. 112-119.

13. Коновалова Н.И., Мартынов С.И. Моделирование динамики частиц в быстропеременном потоке вязкой жидкости // Жур. выч. мат. и мат. физ. 2012. Т. 52. № 12. с.1–13. DOI: 10.1134/S0965542512120093

MSC2020 76D07, 76D09, 76D17

Particle transport model in a nonuniformly heated magnetized or polarized fluid

S. I. Martynov

Surgut State University

Abstract: The article presents models of particle transfer in a nonuniformly heated liquid due to forces acting on it from the side of the liquid and applied electric or magnetic field. General expressions for the forces are obtained and a qualitative analysis of particle dynamics as a result of their action is carried out.

Keywords: temperature gradient, viscous fluid, particle, magnetic field, electric field.

References

1. de Groot S. R., Marur P. Nonequilibrium thermodynamics. Amsterdam: NorthHolland, 1962. 510 p. (In Russian).

2. Bakanov S.P., Deryagin B.V. Theory of thermophoresis of large solid aerosol particles. DAN SSSR. 1962. vol. 147. No. 1. pp. 139-142. (In Russian).

3. Völker T., Blumsb E., Odenbacha S. Thermodiffusion in magnetic fluids. J. Magn. Magn. Mater. 2002. vol. 252. pp. 218–220.

4. Völker T., Odenbach S. The influence of a uniform magnetic field on the Soret coefficient of magnetic nanoparticles. Phys. Fluids. 2003. vol. 15. 2198. Doi: 10.1063/1.1584435

5. Lange A. Magnetic Soret effect: Application of the ferrofluid dynamics theory. Phys. Rev. 2004. E 70. 046308. Doi: 10.1103/PhysRevE.70.046308

6. Sprenger L., Adrian Lange A., Odenbach S. Thermodiffusion in ferrofluids regarding thermomagnetic convection. C. R. Mecanique. 2013. V. 341. P. 429–437. Doi: 10.1016/j.crme.2013.02.005

7. Bloom E.Ya. On the thermophoresis of particles in magnetizable suspensions. Magnit. hydrodin. 1979. No. 1. p. 23-27. (In Russian).

8. Martynov S.I., Naletova V.A., Timinin G.A. Particle movement in a nonuniformly heated magnetized or polarized liquid. In: Modern problems of electrohydrodynamics. M., Moscow State University. 1984. p. 133-144. (In Russian).

9. Baryshnikov A.A. Research and development of technology for enhanced oil recovery through displacement using an electromagnetic field. Specialty 25.00.17 - Development and operation of oil and gas fields. Diss. Cand. tech. n. Tyumen. 2014. 159 p. (In Russian).

10. Vissers T., van Blaaderen A., Imhof A. Band Formation in Mixtures of Oppositely Charged Colloids Driven by an ac Electric Field. Phys. Rev. Lett. 2011. V. 106. Iss. 22. 228303. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.228303.

11. Chen X-Z., Hoop M., Mushtaq F., Siringil E., Hu Ch., Nelson B. J., Pané S. Recent developments in magnetically driven micro- and nanorobots. Appl. Mat. Today. 2017. vol. 9. p. 37-48. DOI: 10.1016/j.apmt.2017.04.006

12. Martynov S.I. Hydrodynamic interaction of particles. Fluid Dyn. 1998. Issue 33. pp. 245-251. Doi: 10.1007/BF02698709 (In Russian).

13. Konovalova N.I., Martynov S.I. Simulation of Particle Dynamics in a Rapidly Varying Viscous Flow. Comp. Math. and Math. Phys. 2012. vol. 52. No. 12. pp. 2247–2259. DOI: 10.1016/j.apmt.2017.04.006 (In Russian).

УДК 532.5:536.4:517.9

Моделирование процессов горения тангенциально закрученной топливовоздушной смеси *

У. Д. Мизхер

Ульяновский государственный технический университет

Аннотация: Поиск и развитие альтернативных источников энергии для обеспечения жизнедеятельности человека является приоритетной задачей для современного общества. Одним из перспективных направлений является использование биогаза как источника тепловой энергии для энергетических установок. Установлено, что основное отличие биогаза от природного газа вызвано наличием в его составе более 30% углекислого газа, что влияет на плотность, теплотворность и скорость распространения пламени. Для сжигания биогаза в современных энергетических установках, работающих на природном газе, необходимо модифицировать горелочные устройства. Для качественной модификации горелочных устройств необходимо иметь теоретические данные об эффективных режимах горения биогаза. В работе представлена модель турбулентности $k-\varepsilon$ (realizable), основой которой является система дифференциальных уравнений с частными производными, позволяющая моделировать процесс горения природного газа и биогаза при тангенциальной закрутке воздуха. Представлены качественные характеристики биогаза, позволяющие провести анализ и развить теорию об эффективном сжигании биогаза в энергетических установках.

Ключевые слова: аэрогидродинамика, закрученная струя, выбросы, температура, природный газ, биогаз, компьютерная модель, ANSYS Fluent.

1. Введение

Использование биогаза в качестве топлива для энергетических и водогрейных котлов, а также газотурбинных установок, приобретает всё большую актуальность в последние годы. Это можно связать как минимум с тремя причинами:

1) загрязнение окружающей среды и большие объёмы выбросов парниковых газов;

2) необходимость переработки биоразлагаемых бытовых отходов и очистки городских, а также промышленных сточных вод, в результате которых, как остаточный продукт, образуется биогаз;

3) высокая стоимость природного газа.

Основным качественным отличием биогаза от природного газа является наличие примесей, таких как: углекислый газ, водород, сероводород, аммиак [1].

Математическое моделирование в форме систем дифференциальных уравнений и численные методы достаточно широко применяются для исследования процессов горения. При этом, используя известные классические модели, возможно проводить анализ моделируемых процессов на основе асимптотических приближений и реализовывать эффективные технические решения. Для исследования тепловых и газодинамических процессов в работе используется модель турбулентности $k-\varepsilon$ (realizable), позволяющая моделировать процесс горения топливо-воздушной смеси [2], [3].

*Работа выполнена при финансовой поддержке грантами РФФИ и Ульяновской области (проекты № 18-41-730015, №19-41-730006), грантом Президента РФ (проект НШ-2493.2020.8).

2. Компьютерная модель

Для моделирования процесса горения закрученного топливо-воздушного потока используются уравнения неразрывности, Навье-Стокса, энергии [2]- [4].

$$div(\rho\vec{V}) = 0,$$

$$div(\rho u\vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + div(\mu\ grad\ u) + \left(\frac{\partial\overline{(\rho u'^2)}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{(\rho u'v')}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{(\rho u'w')}}{\partial z}\right),$$

$$div(\rho v\vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + div(\mu\ grad\ v) + \left(\frac{\partial\overline{(\rho u'v')}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{(\rho v'^2)}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{(\rho v'w')}}{\partial z}\right),$$

$$div(\rho w\vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + div(\mu\ grad\ w) + \left(\frac{\partial\overline{(\rho u'v')}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{(\rho v'w')}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{(\rho w'^2)}}{\partial z}\right),$$

$$div\Big[\rho\Big(E + \frac{V^2}{2}\vec{V}\Big)\Big] = \rho\dot{q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) - p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) -$$
$$-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \mu\Big[2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2 +$$
$$+\Big(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2.$$

Здесь $u, v, w-$компоненты скорости по оси (x, y, z) последовательно, $p-$ давление, $\rho-$ плотность, $\big(-\rho\overline{u'^2}, -\rho\overline{v'^2}, -\rho\overline{w'^2}, -\rho\overline{u'v'}, -\rho\overline{u'w'}, -\rho\overline{v'w'}\big)-$ напряжения Рейнольдса, $\mu-$ динамическая вязкость, $E-$ внутренняя энергия, $\dot{q}-$ скорость объемного добавления тепла на единицу массы, $T-$ температура, $\lambda-$ теплопроводность, $\vec{V}-$ вектор скорости:

$$\vec{V} = ui + vj + wk.$$

Уравнение модели турбулентности k–ε для описания процесса горения для стационарного потока примет вид, согласно [4]

$$div(\rho k\vec{V}) = div\Big[\Big(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\Big)div\,k\Big] + G_k + G_b - \rho\epsilon - Y_M + S_k,$$

$$div(\rho\epsilon\vec{V}) = div\Big[\Big(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}\Big)div\,\epsilon\Big] + \rho C_1 S_\epsilon - \rho C_2\frac{\epsilon^2}{k + \sqrt{\nu\epsilon}} + C_{1\epsilon}\frac{\epsilon}{k}C_{3\epsilon}G_b + S_\epsilon,$$

где

$$C_1 = \max\Big[0.43, \frac{\eta}{\eta + 5}\Big], \quad C_{3\varepsilon} = \tanh\big|\frac{v}{u}\big|, \quad \eta = S\frac{k}{\varepsilon}.$$

Постоянные модели $C_{1\varepsilon}, C_2, \sigma_k$ и σ_ε имеют по умолчанию следующие значения [4]: $C_{1\varepsilon} = 1.44, C_2 = 1.9, \sigma_k = 1, \sigma_\varepsilon = 1.2$, $k-$ кинетическая энергия турбулентности, $\varepsilon-$ скорость диссипации, G_k- источник за счёт градиента средней скорости, G_b- источник за счёт архимедовых сил (важно для конвективных течений), Y_M- представляет собой вклад флуктуирующей дилатации в сжимаемой турбулентности в общую скорость диссипации, C_2 и $C_{1\varepsilon}-$ постоянные, σ_k и $\sigma_\varepsilon-$ турбулентные числа Прандтля для k и ε, соответственно, S_ε, S_k- определяемые пользователем источники, $S-$ тензор средней скорости деформации, $\nu = \mu/\rho-$ кинематическая вязкость, μ_t- турбулентная (или вихревая) вязкость, вычисляется путем объединения k и ε следующим образом:

$$\mu_t = \rho C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon},$$

где $C_\mu-$ эмпирический коэффициент, равный $C_\mu = 0.09$.

3. Результаты исследований

Одним из наиболее эффективных способов интенсификации процесса горения является закрутка топливовоздушного потока для лучшего смешения и распределения топлива и воздуха [5]. Исследование процессов горения природного газа и биогаза проведено с использованием программы ANSYS. С использованием программного продукта была смоделирована камера сгорания с одной горелкой, схема камеры сгорания и горелочного устройства представлена на рис.1. Камера сгорания состоит из четырёх стенок с заданной постоянной температурой $T_c = 350$ и имеет следующие геометрические характеристики: $L = 3.11$ м; $H = 0.75$ м. Горелочное устройство содержит канал для подвода газа (метан/биогаз) $a = 0.03$ м и канал с завихрителем для подвода воздуха $b = 0.22$ м.

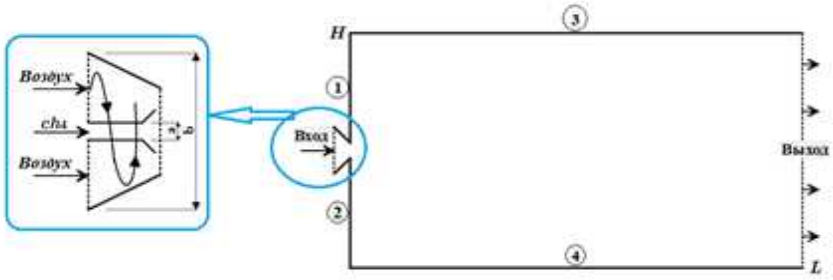


Рис. 1. Схема камеры сгорания.

В ходе математического моделирования было исследовано влияние закрутки воздуха на эффективность процесса горения, проведен сравнительный анализ эффективности сжигания метана и биогаза.

На рис. 2 представлены результаты горения метана с закруткой воздуха $\omega = 120$ рад/с и $\omega = 300$ рад/с. Моделируемый расход газа через горелку $\dot{m}_{methane} = 2$ г/с, расход воздуха $\dot{m}_{air} = 20$ г/с.

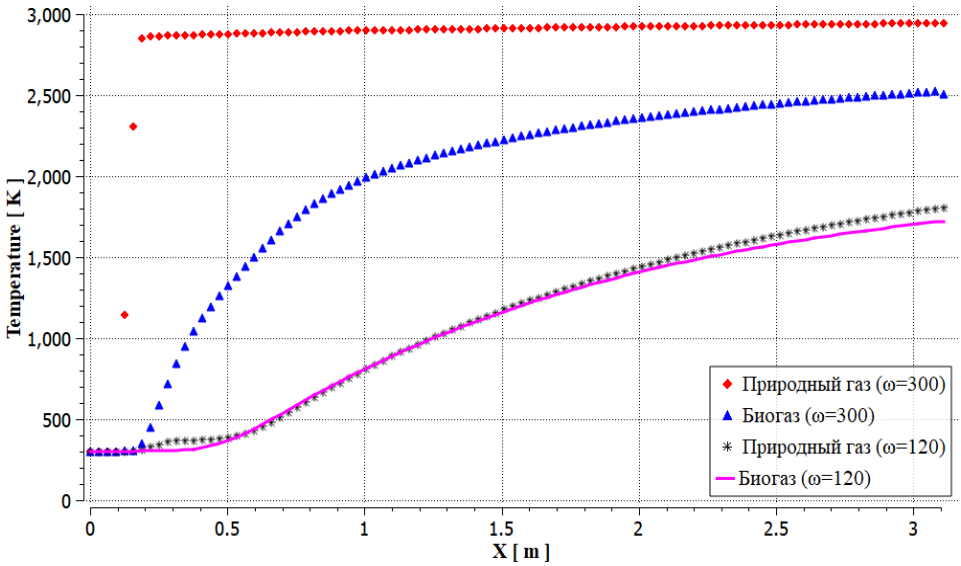


Рис. 2. Значение температур в камере сгорания при сжигании топливовоздушной смеси.

4. Заключение

Основной проблемой при сжигании биогаза является низкая скорость распространения пламени в камере сгорания, что приводит к увеличению длины факела и отрыву пламени, вследствии чего может гаснуть горелка. Для стабилизации процесса горения биогаза необходимо увеличивать закрутку топливовоздушного потока.

Литература

1. Сигал И. Я., Марасин А. В., Смихула А. В. Газогорелочные устройства для сжигания биогаза в котлах. Энерготехнологии и ресурсосбережение. 2014. №. 3. С. 68-71.
2. Versteeg H., Malalasekera V. Introduction to computational fluid dynamics. Prentice Hall. 2nd ed. 2007. 520 p.
3. Hoffman K. A., Chiang S. T. Computational Fluid Dynamics. Vol. 2. Engineering Education System. 2000. 479 p.
4. ANSYS FLUENT 12.0. Theory Guide. April, 2009.
5. Леонтьев А. И., Кузма-Кичта Ю. А., Попов И. А. Тепломассообмен и гидродинамика в закрученных потоках. Теплоэнергетика. 2017. №. 2. С. 36-54.

MSC2020 76D05, 80A20, 35B40

Modeling the combustion processes of a tangentially swirled fuel-air mixture

U. J. Mizher

Ulyanovsk State Technical University

Abstract: The search and development of alternative energy sources to ensure human life is a priority task for modern society. One of the promising areas is the use of biogas as a source of thermal energy for power plants. It has been established that the main difference between biogas and natural gas is caused by the presence of more than 30% carbon dioxide in its composition, which affects the density, calorific value and flame propagation speed. For the combustion of biogas in modern power plants operating on natural gas, it is necessary to modify the burners. For a qualitative modification of burners, it is necessary to have theoretical data on the effective modes of combustion of biogas. The paper presents a turbulence model k - ε (realizable), which is based on the system of partial differential equations, which makes it possible to simulate the combustion of natural gas and biogas with tangential air swirling. The qualitative characteristics of biogas are presented, which make it possible to analyze and develop the theory of efficient combustion of biogas in power plants.

Keywords: aerohydrodynamics, swirl jet, emissions, temperature, natural gas, biogas, computer model, ANSYS Fluent.

References

1. Sigal I. Ya., Marasin A.V., Smikhula A.V. Gas-burning devices for burning biogas in boilers. Energy Technologies and resource conservation. 2014. No. 3. pp. 68-71. (In Russian).

2. Versteeg H., Malalasekera V. Introduction to computational fluid dynamics. Prentice Hall. 2nd ed. 2007. 520 p.

3. Hoffman K. A., Chiang S. T. Computational Fluid Dynamics. Vol. 2. Engineering Education System. 2000. 479 p.

4. ANSYS FLUENT 12.0. Theory Guide. April, 2009.

5. Leontiev A. I., Kuzma-Kichta Yu. A., Popov I. A. Heat and mass transfer and hydrodynamics in swirling flows. Thermal Engineering. 2017. No. 2. pp. 36-54. (In Russian).

УДК 517.9

Оптимальное оценивание линейных нестационарных систем с использованием множеств достижимости*

Сорокина М. С.

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Аннотация: Рассматривается линейная нестационарная система при неточно известных начальном состоянии и действующем возмущении, удовлетворяющих единому ограничению. Ограничение представляет собой сумму квадратичной формы начального состояния и интеграла по времени от квадратичной формы возмущения (квадратичные формы могут быть вырожденными). Рассмотрен способ оценки эллипсоидального множества достижимости для таких систем. Его использование позволяет найти минимальное множество достижимости (то есть оценка оптимальна), которое определено при помощи оптимального наблюдателя. Приведен пример его применения для уравнения Матьё-Хилла с затуханием, которое описывает параметрические колебания и резонанс.

Ключевые слова: множества достижимости, эллипсоидальные множества, оптимальный наблюдатель.

1. Введение

Одной из основных задач в теории управления динамическими системами является исследование возможности достижения того или иного состояния системы под действием управления. Для этого необходимо исследовать её множества достижимости. Проблема их нахождения и оценивания впервые возникла в 60-х годах прошлого века, однако до сих пор привлекает к себе внимание.

Множества достижимости играют важную роль в разных областях теории управления. С их помощью, например, можно решить задачу сохранения беспилотным летательным аппаратом заданной траектории с учетом скорости и направления ветра [1] и задачу построения траектории манипулятора [2].

Также они играют важную роль при решении многих задач управления, имея способы эффективного их построения или оценивания, можно продвинуться в решении многих задач. Основные из них: оценка возможностей управления (возможно ли привести систему в заданное состояние в фиксированный момент времени), оценка возмущений и задача о накоплении возмущений (множество достижимости характеризует область, в которую может попасть система под действием возмущения), гарантированное оценивание (фильтрация) в динамических системах (при известном множестве достижимости и заданных ограничениях на возмущения получаем оценку разброса траекторий под его воздействием), задачи оптимального управления (при известном множестве достижения задача сводится к минимизации функции n переменных на нем). Это делает их применимыми для большого числа приложений.Так, например, задачи оптимального управления встречаются практически во всех сферах деятельности: в технической деятельности, экономике (подробнее в [3]), медицине(например, для управления иммунологическими реакциями человека [4]), химии (к

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект №0729-2020-0055) и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего»

примеру, проведение параллельных химических реакций за минимальное время [5]) и т. д. Вычисление множеств достижимости является одним из основных методов проверки надежности линейных динамических системы.

2. Множества достижимости

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)v(t), \quad x(t_0) = x_0 \in M, t \in [t_0, T], \tag{1}$$

где $x \in R^{n_x}$ — состояние системы; $v \in R^{n_v}$ — возмущение, действующее на систему: $v = v(\sigma), \sigma \in [t_0, t]$; M — замкнутое множество в пространстве состояний, определяющее совокупность возможных начальных состояний системы:

$$M(t, R) = \{(x, v(\sigma)) : x^T(t_0)R^{-1}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v^T(\sigma)G^{-1}v(\sigma) \leq 1\} \tag{2}$$

Пусть существует единственное решение системы (1) при $t \geq t_0$ $x(t)$ — фазовая траектория.

Из каждой точки множества M выходит много траекторий системы, отвечающих разным значениям возмущения. Множеством достижимости для системы при $t \geq t_0$ называется совокупность концов $x(t)$ всех траекторий, выходящих из M в момент времени $t \geq t_0$.

Для системы, подверженной возмущениям, множество достижимости дает оценку разброса траекторий под действием возмущения. Оно характеризует область, в которую под воздействием возмущения приходит система, и позволяет оценить точность попадания системы в заданное конечное состояние [6]. Так же, при добавлении в систему управления, оно дает возможность понять, возможно ли привести систему из одного состояния в заданное.

3. Оценивание множеств достижимости

Точное нахождение множества достижимости может быть довольно трудоёмкой операцией, часто используются множества, найденные приближенно, и их оценки. Например, в [6] приведена аппроксимация эллипсами вида:

$$E(a, Q) = \{x : (Q^{-1}(x - a), (x - a)) \leq 1\},$$

где a — вектор центра эллипсоида, Q — положительно определенная симметрическая матрица.

Рассмотрим способ построения оптимальной оценки множества достижимости, приведенный в статье [7].

Рассмотрим линейную нестационарную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)v, \\ y &= C(t)x + D(t)v \end{aligned} \tag{3}$$

с неизвестным начальным условием $x(t_0)$.

Пусть начальное состояние системы и возмущения представимы в виде

$$\begin{gathered} x(t_0) - x_* = R^{1/2}w_1, \ v(t) = G^{1/2}(t)w_2(t), \\ |w_1|^2 + \int_{t_0}^{t} |w_2(\sigma)|^2 d\sigma \leq 1, t \in [t_0, T]. \end{gathered} \tag{4}$$

Рассмотрим задачу оценивания состояния $x(t)$ системы (3) по измерениям выхода $y(\sigma),\ \sigma \in [t_0, t]$ для заданной матрицы $R = R^T > 0$ и матричной функции $G^T(\sigma) = G(\sigma) > 0$.

Тогда получаем условие:

$$|x(t_0) - x_*|_R^2 + ||v||_{G_{[t_0;t]}}^2 \leq 1. \tag{5}$$

Построим наблюдатель полного порядка [8]

$$\dot{\widehat{x}} = A(t)\widehat{x} + L(t)[y - C(t)\widehat{x}], \quad \widehat{x}(t_0) = x_*, \tag{6}$$

где $\widehat{x}(t)$ — оценка состояния $x(t)$, а $L(t)$ — матрица параметров наблюдателя, подлежащая определению. Обозначим ошибку оценки $\varepsilon(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varepsilon} = A_c(t)\varepsilon + B_c(t)v, \quad \varepsilon(t_0) = x(t_0) - x_*, \tag{7}$$

где $A_c(t) = A(t) - L(t)C(t)$, $B_c(t) = B(t) - L(t)D(t)$.

Для нахождения оптимальной эллипсоидальной оценки состояния системы (3) воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 1. *Если $det[D(\sigma)G(\sigma)D^T(\sigma)] \neq 0$, $\sigma \in [t_0, t]$, то оптимальный наблюдатель (6), обеспечивающий наилучшую эллипсоидальную оценку $\mathcal{E}(Y_*(t), \widehat{x}(t))$ состояния системы (3) в момент времени $t \geq t_0$ при любых начальных состояниях и возмущениях, удовлетворяющих ограничению (4) с $R \geq 0$ и $G(\sigma) \geq 0$, $\sigma \in [t_0, t]$, определяется матрицей*

$$L_*(t) = [D(t)G(t)B^T(t) + C(t)Y_*(t)]^T[D(t)G(t)D^T(t)]^{-1}, \tag{8}$$

где матрица $Y_*(t) \geq 0$ является решением матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\begin{gathered}\dot{Y} = A(t)Y + YA^T(t) + B(t)G(t)B^T(t) - \\ -[D(t)G(t)B^T(t) + C(t)Y]^T[D(t)G(t)D^T(t)]^{-1}[D(t)G(t)B^T(t) + C(t)Y]\end{gathered} \tag{9}$$

с начальным условием $Y(t_0) = R$. Кроме того, при $R > 0$ выполняется $Y_*(t) > 0$, $t \in [t_0, T]$.

Таким образом, для системы (6) множество достижимости имеет вид эллипсоида $\mathcal{E}(Y(t))$, матрица которого удовлетворяет уравнению

$$\dot{Y} = A_c(t)Y + YA_c^T(t) + B_c(t)G(t)B_c^T(t), \tag{10}$$

с начальным условием $Y(t_0) = R$. То есть для системы (3) состояние $x(t)$ находится внутри эллипсоида $\mathcal{E}(Y(t))$ с центром в точке $\widehat{x}(t)$, определяемой уравнением наблюдателя (6).

Полученное множество является эллипсоидальной оценкой состояния $x(t)$ в момент времени t.

4. Пример

Рассмотрим применение описанного способа на примере уравнения Матьё-Хилла с затуханием:

$$\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + \omega_0^2(t)(1 + F(t))x = u + v, \quad F(t) = \frac{2\mu}{a + b\cos\omega t}, \tag{11}$$

где $a > 0$, $b > 0$, $a > b$. Добавим в систему выход $y = x_1 + x_2 + v$ и решим полученную задачу на отрезке времени [0, 4].

Система примет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2(1+F(t)) & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 1.$$

Матрицы для ограничений (4) возьмем в виде

$$G = 1, \quad R = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Так же выберем значения параметров: $\omega_0 = \pi$, $\omega = 2\pi$, $\varepsilon = 0.1$, $a = 1$, $b = 0.5$, $\mu = 0.1$

Для нахождения множеств достижимости системы под действием возмущения решим уравнение (9), используя его решение, найдём $L_*(t)$ при помощи (8), далее найдем матрицы замкнутой системы A_c и B_c и с их помощью найдем множества достижимости, решив (10).

Полученное дифференциальное матричное уравнение будем решать, перейдя к системе дифференциальных уравнений. Ее численное решение будет реализовано в математическом пакете MATLAB с использованием метода ode45 (метод Рунге-Кутта 4 и 5 порядка).

Система линейно зависима, $y_{21} = y_{12}$. Окончательный вид системы:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_2 - (y_1 + y_2)^2 \\ \dot{y}_2 = -\omega_0^2(1 + \varepsilon \sin(\omega t))y_1 - (y_1 + y_2)(y_2 + y_3 + 1) + y_3 \\ \dot{y}_3 = -2\omega_0^2(1 + \varepsilon \sin(\omega t))y_2 - (y_2 + y_3 + 1)^2 + 1 \end{cases}$$

Начальные условия:

$$y_0 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.1 \\ 0.3 \end{pmatrix}.$$

Так же, для наглядности работы метода, построим траектории системы и наблюдателя.

Для этого добавим в систему (3) нестационарное возмущение $v = 0.5 \sin \pi t$ и сдвинем ее начальное условие в точку $x0 = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{pmatrix}$. Тогда из (4) начальным условием для оптимального наблюдателя (6) будет $x0 - R^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}$.

Проинтегрируем (3) и (6) совместно. Получим систему 4 порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2(1 + \varepsilon \sin(\omega t))x_1 + v \\ \dot{x}_3 = x_4 + l_1(x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + v) \\ \dot{x}_4 = -\omega_0^2(1 + \varepsilon \sin(\omega t))x_3 + l_2(x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + v) \end{cases}$$

Построим траекторию системы и положение наблюдателя. Для этого отдельно построим (x_1, x_2) и (x_3, x_4). Голубой сплошной линией на рис. 1 обозначена траектория системы, сиреневой пунктирной — траектория наблюдателя. Так же на нем показана эволюция множеств достижимости в моменты времени $t = 0$ (синий пунктирный с точкой), $t = 2$ (красный пунктирный), $t = 4$ (желтый сплошной) и их центры.

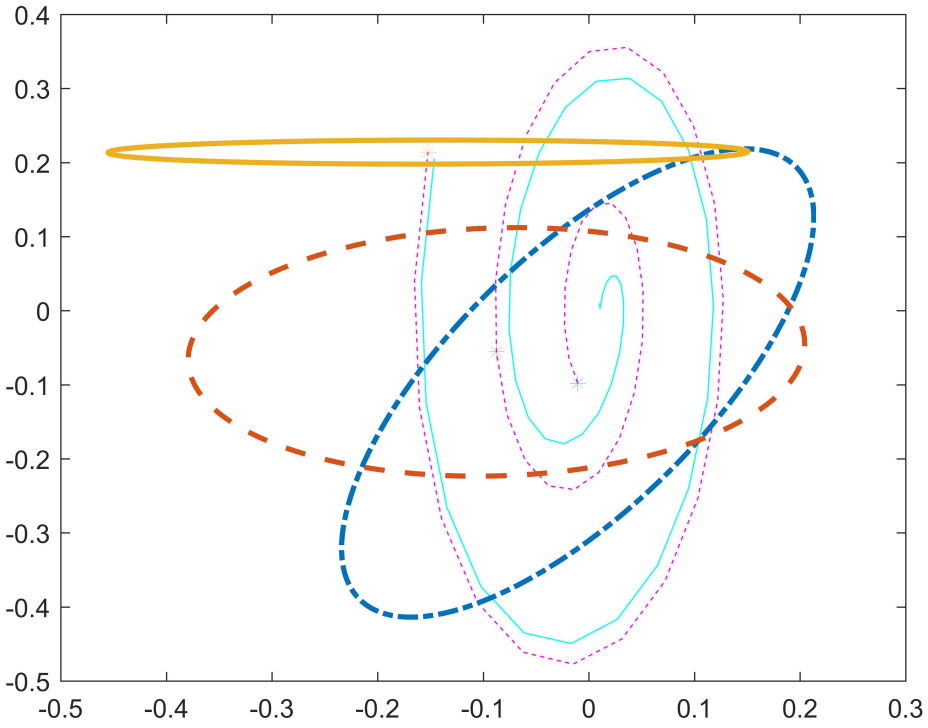


Рис. 1. Траектории системы и эволюция множеств достижимости.

С течением времени размер множеств достижимости уменьшается, при этом они содержат траекторию системы и положение наблюдателя, которое является его центром.

Литература

1. Рогалев А. Н., Рогалев А. А. Управление маршрутом и оценка множеств достижимости беспилотных летательных аппаратов // Математические методы моделирования, управления и анализа данных, 2017.

2. Holmes P., Kousik S., Zhang B. and others Reachable Sets for Safe. Real-Time Manipulator Trajectory Design. 2020.

3. Лагоша Б. А., Апалькова Т. Г. Оптимальное управление в экономике: теория и приложения. М.: Финансы и статистика, 2008. - 224 с.

4. Болодурина И. П., Луговскова Ю. П. Оптимальное управление иммунологическими реакциями организма человека // Проблемы управления. 2009. № 5, С. 44-52.

5. Шатхан Ф. А. Применение принципа максимума к задачам оптимизации параллельных химических реакций // Автоматика и телемеханика, 1964. Т. 25, вып. 3. С. 368–373.

6. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988. – 320 с.

7. Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М. Эллипсоидальные множества достижимости линейных нестационарных систем в задачах оценивания и управления // Дифференциальные уравнения, 2019. Т. 55, № 11, С. 1485 – 1498.

8. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления (пер. с англ. Васильева В. А., Николаева Ю. А.) – М.: Мир, 1977. – 653 с.

MSC2020 45K05

Optimal evaluation of linear time-varying systems using reachable sets

M. S. Sorokina

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

Abstract: The paper is devoted to reachable sets of linear time-varying systems under uncertain initial states and disturbances with a bounded uncertainty measure. The uncertainty measure is the sum of a quadratic form of the initial state and the integral over the finite-time interval from a quadratic form of the disturbance. Method of evaluation of ellipsoidal reachable sets has been cosidered for such systems. Applying this method allows to find minimal ellipsoidal set that is defined by optimal observer. Numerical modeling with the Mathieu-Hill equation for parametric vibrations and resonance illustrates this method.

Keywords: reachable sets, ellipsoidal sets, chemical reaction, optimal observer.

References

1. Rogalev A. N., Rogalev A. A. Controlling the path and reachable set estimations of unmanned air vehicle. Mathematical methods of modelling, control and data analysis, 2017. (In Russian).

2. Holmes P., Kousik S., Zhang B. and others Reachable Sets for Safe, Real-Time Manipulator Trajectory Design, 2020.

3. Lagosha B. A., Apal'kova T. G. Optimal control in economics: theory and applications. Moscow: Finance and statistics, 2008. 224 p. (In Russian).

4. Bolodurina I. P., Lygovskova Yu. P. Optimal control of immunological reactions of the human body. Control sciences. 2009. No. 5. p. 44-52. (In Russian).

5. Shatkhan F. A. Application of maximum principle to optimization problems of parallel chemical reactions. Avtomat. i Telemekh. 1964. vol. 25, issue 3. p. 368–373. (In Russian).

6. Chernousko F. L. Estimation of the phase state of dynamic systems. – Moscow: Nayka. 1988. (In Russian).

7. Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M. Ellipsoidal reachable sets of linear time-varying continuous and discrete systems in control and estimation problems. Automatica. 2020. No. 116. pp. 1-8. (In Russian).

8. Kvakernaak H., Sivan R. Linear optimal control systems – New York: Wiley, 1972. (In Russian).

УДК 519.6

Комплекс параллельных программ TAPIR для численного моделирования задач газовой динамики*

Суков С. А.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

Аннотация: В статье представлено описание функциональных возможностей разрабатываемого в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН комплекса параллельных программ TAPIR. Комплекс программ предназначен для расчета внешнего обтекания тел на конформных и локально адаптивных смешанных сетках с использованием ресурсов высокопроизводительных систем различной архитектуры. Приводится формулировка численного алгоритма, примеры результатов расчетов, характеристики эффективности распараллеливания вычислений и распределенной обработки данных.

Ключевые слова: вычислительная газовая динамика, неструктурированные сетки, параллельные вычисления.

1. Назначение и структура программного комплекса

Программный комплекс TAPIR представляет собой платформу для разработки и тестирования моделей организации параллельных вычислений, средств автоматического распараллеливания алгоритмов и подходов к распределенной обработке сеточных данных большого объема при проведении широкомасштабных вычислительных экспериментов. Ядром комплекса является реализация алгоритма численного моделирования внешнего обтекания тел на смешанных (гибридных) конформных и локально адаптивных сетках для суперкомпьютеров различной архитектуры [1]. Встроенный в вычислительное ядро препроцессор включает библиотеки подпрограмм для сравнительного тестирования производительности многопроцессорных модулей и распределенной обработки топологии смешанных сеток на этапе инициализации данных вычислительных экспериментов. Внешний препроцессор состоит из последовательных модулей генерации подробных неструктурированных сеток с ячейками типа тетраэдр, треугольная призма, четырехугольная пирамида и гексаэдр и локальной адаптации сеток данного типа к особенностям решения.

2. Алгоритм численного моделирования

В качестве математической модели течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа рассматривается система уравнений Навье–Стокса. В декартовой системе координат в компактном вектором виде система уравнений записывается как

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla F = 0,$$

где Q – вектор консервативных газодинамических переменных. Вектор потока F равен сумме потоков конвективного F^{Φ} и диффузионного F^{D} переноса. Численный алгоритм моделирования внешнего обтекания тел построен на основе конечно-объемного метода повышенного порядка точности с полиномиальной реконструкцией переменных.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 19–11–00299.

Расчетная область задачи заполняется смешанной сеткой, которая может состоять из ячеек четырех типов: тетраэдров, треугольных призм, четырехугольных пирамид и гексаэдров. Центр масс многогранной ячейки C_i с границей ∂C_i и объемом $|C_i|$ находится в точке $\mathbf{x}_i$. Поверхность внутренней ячейки состоит из общих с ячейками из множества I_i плоских граней ∂C_{ij}, $j \in I_i$. Геометрия ∂C_{ij} задается координатами ее центра $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_{ji}$, площадью грани $S_{ij} = S_{ji}$ и направлением единичного вектора внешней нормали $\overrightarrow{n}_{ij} = -\overrightarrow{n}_{ji}$.

Дискретные значения сеточных функций Q_i относятся к центрам масс расчетных ячеек и равны среднему интегральному значению от непрерывно распределённой величины. При этом поведение функции f в пределах объема C_i описывается линейным полином

$$f_i^P(\mathbf{x}) = a_{0\,i}^f(x - x_i) + a_{1\,i}^f(y - y_i) + a_{2\,i}^f(z - z_i) + f_i.$$

Полиномиальные коэффициенты (компоненты вектора градиента) определяются исходя из дискретного аналога формулы интегрального представления градиента

$$\nabla f_i^P = \left(a_{0\,i}^f, a_{1\,i}^f, a_{2\,i}^f\right) = \sum_{j \in I_i} f_{ij} \overrightarrow{n}_{ij} S_{ij}.$$

Здесь значение функции в центре грани f_{ij} вычисляется как сумма величин f_i и f_j с весами обратно пропорциональными расстояниям от центров масс соседних ячеек до плоскости общей грани. При расчете сверхзвуковых течений с возможностью возникновения ударных волн и разрывов для корректировки коэффициентов полиномиальной реконструкции применяются функции–лимитеры [2, 3].

В соответствии с методом контрольного объема для ячеек сетки записывается балансовое соотношение

$$\frac{dQ_i}{dt} + \sum_{j \in I_i} (F_{ij}^{\Phi} + F_{ij}^D) S_{ij} = 0.$$

Конвективный поток вычисляется с использованием одной из базовых схем [4, 5] решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва

$$F_{ij}^{\Phi} = \Phi\left(Q_i^P(\mathbf{x}_{ij}), Q_j^P(\mathbf{x}_{ij}), \overrightarrow{n}_{ij}\right).$$

Конкретный выбор той или иной схемы Φ зависит от характеристик моделируемого течения. Диффузионный поток F_{ij}^D вычисляется как полусумма диффузионных потоков от осредненных значений сеточных функций и градиентов реконструкционных полиномов

$$F_{ij}^D = D\left(Q_i, \nabla Q_i^P, Q_j, \nabla Q_j^P, \overrightarrow{n}_{ij}\right).$$

Для интегрирования временных производных используется явная схема Эйлера первого порядка или метод типа Рунге-Кутты второго порядка точности. В первом случае численный алгоритм определения значений сеточных функций $\overline{Q}_i$ на новом слое по времени $t + \Delta t$ во внутренней сеточной ячейке можно описать формулой

$$\overline{Q}_i = Q_i - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_{j \in I_i} \left[\Phi\left(Q_i^P(\mathbf{x}_{ij},), Q_j^P(\mathbf{x}_{ij}), \overrightarrow{n}_{ij}\right) + D\left(Q_i, \nabla Q_i^P, Q_j, \nabla Q_j^P, \overrightarrow{n}_{ij}\right)\right] S_{ij}$$

Алгоритм обработки ячеек, у которых одна или несколько граней лежат на границе расчетной области Γ, аналогичен алгоритму обработки внутренних ячеек. Значения функций $f_{i\Gamma}$ и потоки $F_{i\Gamma}$ вычисляются или явно задаются с учетом постановки граничных условий задачи.

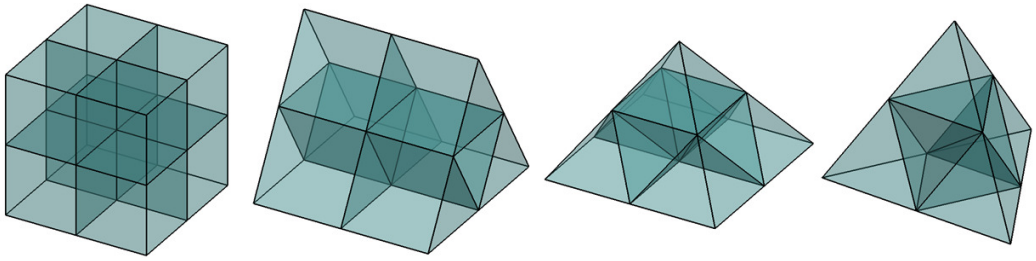


Рис. 1. Изотропная декомпозиция ячеек.

С целью повышения точности результатов численных экспериментов непосредственно в процессе расчета может применяться метод локальной адаптации сетки к особенностям решения. Реализованный в комплексе программ TAPIR подход базируется на иерархическом изотропном дроблении (рис. 1) и обратном объединении элементов [6]. Множество перестраиваемых ячеек составляется по результатам анализа распределения значений критериев адаптации, учитывающих структуру течения. Правило составления множества в общем виде описывается выражением

$$\phi_{\min} < \phi_{cell} < \phi_{\max}.$$

Границы интервала $(\phi_{\min}; \phi_{\max})$ подбираются таким образом, чтобы повысить точность разрешения особенностей течения и одновременно сохранить число расчетных ячеек в заданных пределах. Для определения значений газодинамических переменных в центрах масс дочерних ячеек используется полиномиальная реконструкция на родительском элементе. В случае их обратного слияния значение в центре родительского многогранника вычисляется осреднением по дочерним контрольным объемам.

Численный алгоритм моделирования течений на, так называемых, сетках с висячими узлами отличается методом определения коэффициентов линейной реконструкции. Для вычисления компонент вектора градиента сеточной функции строятся дополнительные фиктивные контрольные объемы. Их вершины находятся в точках пересечения отрезков, соединяющих центры соседних расчетных ячеек, с плоскостями соответствующих общих граней. Поверхность фиктивной ячейки представляет собой триангуляцию выпуклой оболочки ее вершин. Значения переменных в вершинах и центрах граней фиктивной ячейки вычисляются линейной интерполяцией на отрезках и треугольниках. Пример фиктивного контрольного объема для четырехугольной пирамиды, которая граничит с четырьмя элементами (два тетраэдра, гексаэдр и призма) одинакового с ней уровня иерархии и четырьмя тетраэдрами нижнего уровня представлен на рис. 2.

Корректность и возможность использования реализации описанного алгоритма для моделирования газодинамических течений оценивалась путем расчета дозвукового и сверхзвукового обтекания тел различной геометрической формы и сравнения полученных результатов с имеющимися экспериментальными и численными данными. В частности рассматривалась задача моделирования сверхзвукового обтекания сферы ($D = 0.1524$) при различных параметрах набегающего потока. Расчетная область задачи представляет собой объединение сферы с цилиндром, внутрь которого помещается обтекаемое тело (рис. 3а). Построенная внутри области сгущающаяся к поверхности сферы смешанная сетка (рис. 3б) содержит 794634 узла и 994251 элемент (245793 тетраэдра, 7681 четырехугольная пирамида и 740777 гексаэдров).

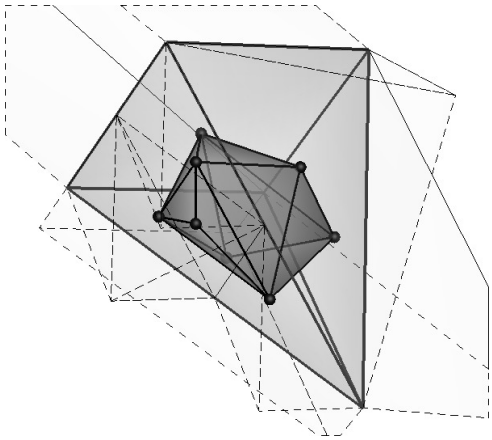
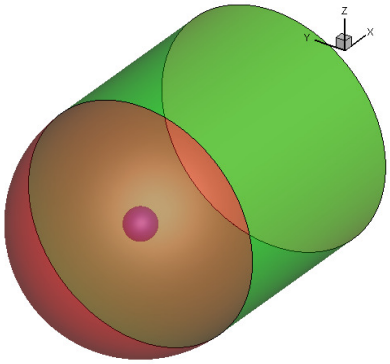
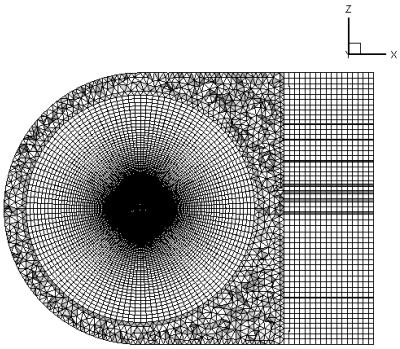


Рис. 2. Фиктивный контрольный объем.



а) Вид расчетной области;



б) Структура сетки в срединном сечении.

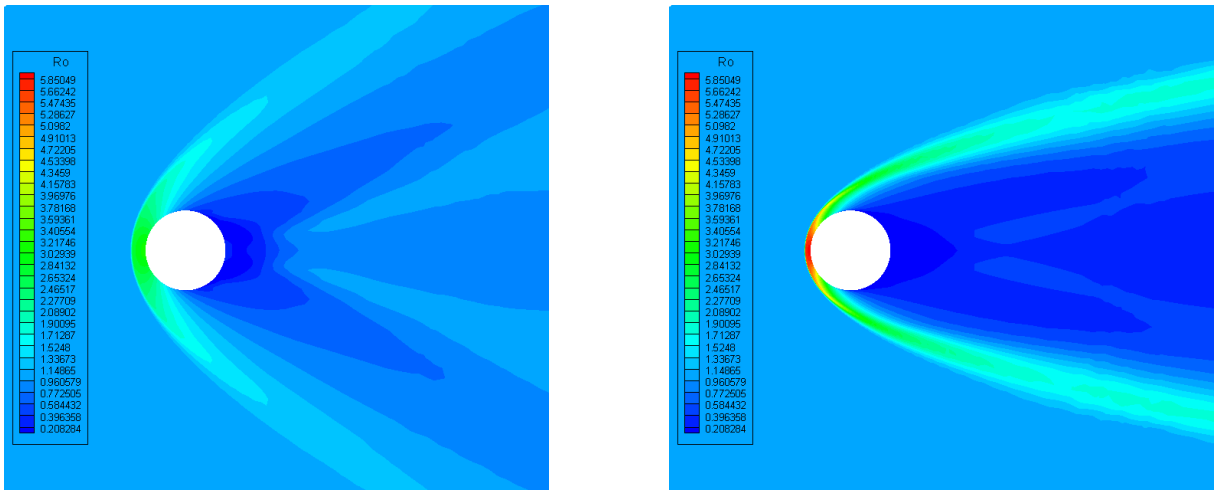
Рис. 3. Расчетная область и структура смешанной сетки.

Определенные по результатам проведенных расчетов значения коэффициентов лобового сопротивления приводятся в таблице 1.

Таблица 1. Значения коэффициента лобового сопротивления

Число Маха	Число Рейнольдса	Коэффициент лобового сопротивления
1.5	2.8816E+06	1.047576
2	1.9457E+06	1.03234
3	1.1964E+06	0.966544
4	7.3412E+05	0.926857
6	3.3148E+05	0.896586
8	1.8377E+05	0.888854

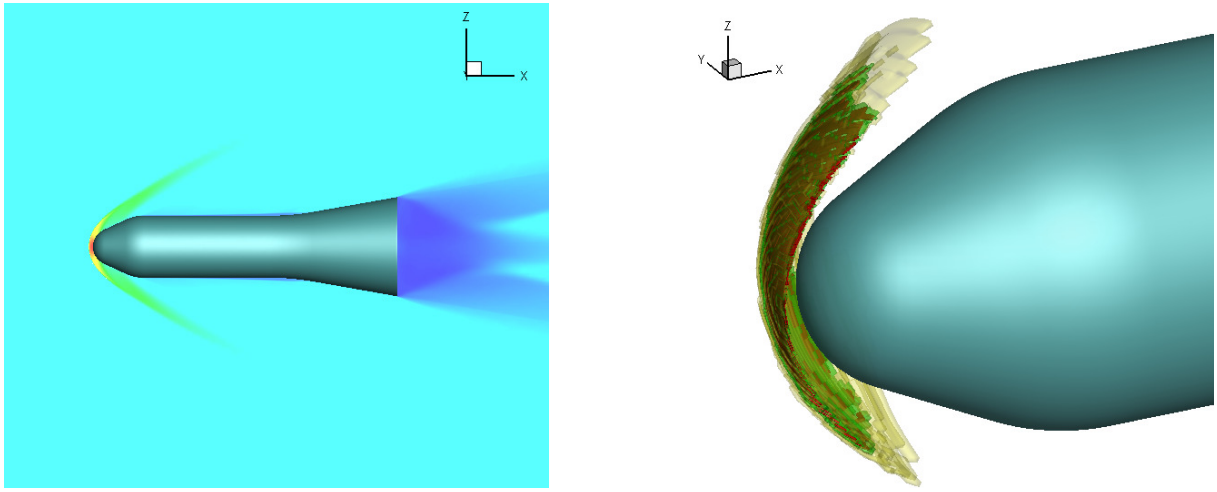
Полученные значения хорошо согласуются с данными, опубликованными в [7,8]. Визуализация картины течения в срединном сечении расчетной области для $M = 2$ и $M = 8$ дана на рис. 4.



а) $M = 2$ б) $M = 8$

Рис. 4. Распределение плотности в срединном сечении.

Технология локальной адаптации сеток применяется для повышения точности разрешения стационарных особенностей течения. На рис. 5 представлен пример адаптации к отошедшей от носовой части баллистической модели НВ-2 ударной волне. Постановка задачи, геометрия модели и параметры набегающего потока ($M = 3$, $Re = 2.46625E + 07$) взяты из [9]. Исходная конформная сетка состоит из тетраэдров, четырехугольных пирамид и гексаэдров. В общей сложности она содержит 2403438 элементов. Адаптация сетки выполняется на основе критерия $\phi_{cell} = |div\,(\mathbf{u})|\,h_{cell}$. Коэффициент h_{cell} равен минимальной высоте элемента. Пороговые значения интервалов для составления множеств перестраиваемых ячеек подобраны исходя из условия соблюдения заданной размерности сетки. Адаптивная сетка содержит 2770980 расчетных ячеек, из которых 18786 являются элементами первого уровня вложенности, 77866 - элементами второго уровня, 274992 ячейки относятся к элементам третьего уровня вложенности.



а) Распределение плотности; б) Зона адаптации сетки.

Рис. 5. Обтекание баллистической модели НВ-2.

3. Программная реализация

Распределенная программная реализация вычислительного алгоритма разработана на основе гибридной модели параллелизма по управлению с передачей сообщений и адаптирована к запуску на суперкомпьютерах различной архитектуры, включая гетерогенные системы с графическими ускорителями. В гетерогенной реализации алгоритма для расчетов на конформных сетках используются интерфейс передачи сообщений MPI (модель распределенной памяти), интерфейс разработки прикладных программ OpenMP (модель общей памяти) и программные средства CUDA (потоковая обработка данных на графических ускорителях). Текущая версия вычислительного ядра для расчетов на локально адаптивных сетках предназначена только для систем с многоядерными процессорами (модель выполнения MPI + OpenMP).

Распределенный препроцессор включает процедуры сравнительного тестирования быстродействия многоядерных процессоров общего назначения и массивно-параллельных сопроцессоров и ускорителей. Предварительное тестирование позволяет исключить из конфигурации запуска вычислительного ядра нестабильно работающие устройства с пониженной производительностью. Последующая балансировка загрузки на уровне расчетной группы MPI-процессов, ассоциированных с модулями кластерной системы, и между нитями OpenMP, ассоциированными с процессорными ядрами, сопроцессорами и ускорителями отдельных модулей, выполняется методом геометрического параллелизма. Многоэтапный обмен данными между MPI-процессами и управляющими нитями OpenMP в точках синхронизации вычислений скрыт за обработкой строго внутренних ячеек расчетных подобластей отдельных устройств.

По результатам контрольных запусков программного обеспечения эффективность распараллеливания в гетерогенном режиме составляет от 80% до 95% относительно запуска на минимально возможном числе устройств. Так, например, ускорение вычислений на сетке, содержащей 500 миллионов ячеек, при полной загрузке 640 модулей суперкомпьютера Ломоносов-2 по сравнению с запуском приложения на 40 модулях системы составило 13.67 раза. Параллельная эффективность вычислений на локально адаптивных сетках находится в пределах 70-75%.

Помимо непосредственно численных расчетов задач внешнего обтекания вычислительное ядро комплекса программ TAPIR может быть использовано как платформа для создания приложений численного моделирования широкого круга задач механики сплошной среды [10] и рассматриваться в качестве суперкомпьютерного приложения для оценки производительности новых вычислительных устройств [11] и кластерных систем.

4. Препроцессор обработки данных

Встроенный в вычислительное ядро комплекса препроцессор распределенной обработки данных реализован в виде переносимой библиотеки подпрограмм [12], которая включает в себя стандартные процедуры обработки топологии нерегулярных сеток и графов на этапе инициализации данных широкомасштабных вычислительных экспериментов. В их число входят подпрограммы инициализации дуального графа сеток с элементами четырех типов, выделения расчетных областей MPI-процессов и построения схемы обменов данными.

Быстродействие библиотечных процедур проверялось на примерах обработки смешанных сеток, содержащих от 100 до 500 миллионов ячеек. В таблице 2 приводятся показательные времена работы программных модулей для групп из 168 и 336 MPI-процессов. Расчетная сетка содержит 136 миллионов вершин и 230 миллионов элементов, а описание ее топологии занимает 9.3 ГБ дискового пространства.

Таблица 2. Времена выполнения процедур

Этап обработки	Время выполнения (секунд)	
	168 процессов	336 процессов
Инициализация дуального графа	6	5
Составление списка обрабатываемых элементов	31	26
Инициализация карты обменов данными	5	7
Локализация геометрии расчетных областей	54	62
Общее время	96	100

Внешний препроцессор комплекса программ TAPIR состоит из двух программ генерации смешанных сеток и программы локальной адаптации сеток с элементами четырех типов. Генерация подробных сеток размерностью до 500 миллионов ячеек выполняется путем равномерного изотропного измельчения базовой дискретной модели или через объединение предварительно построенных сеточных блоков с согласованными границами. Равномерное измельчение применяется в основном при создании сеток для отладки и оценки эффективности распределенных алгоритмов. Вариант объединения согласованных подсеток решает проблему ограничения размерности дискретной модели в существующих последовательных приложениях генерации неструктурированных сеток. Последовательная программа адаптации смешанных сеток выполняет локальное измельчение и объединение ячеек конформной или полученной ранее иерархической адаптивной сетки на основе анализа поля газодинамических переменных. В качестве параметров работы программы задаются пороговые значения одного или нескольких из предусмотренных критериев адаптации, флаг нормирования критерия на характерный размер ячейки и ограничение на максимальное число расчетных ячеек сетки на выходе.

Литература

1. Gorobets A., Soukov S., Bogdanov P. Multilevel parallelization for simulating turbulent flows on most kinds of hybrid supercomputers. Computers and Fluids. 2018. vol. 173. pp. 171–177. https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.03.011

2. Barth T.J. Numerical Aspects of Computing High-Reynolds Number Flows on Unstructured Meshes. AIAA Paper 91-0721, 1991.

3. Kim S., Caraeni D., Makarov B. A Multidimensional Linear Reconstruction Scheme for Arbitrary Unstructured Grids. Technical report. AIAA 16th Computational Fluid Dynamics Conference, Orlando, FloridaAmerican Institute of Aeronautics and Astronautics. June 2003.

4. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg; 2009. doi: 10.1007/b79761.

5. Wada Y., Liou M.S. A flux splitting scheme with high resolution and robustness for discontinuities // AIAA Paper 94-0083.

6. Powell K., Roe P., Quirk J. Adaptive-Mesh Algorithms for Computational Fluid Dynamics. In: Hussaini M.Y., Kumar A., Salas M.D. (eds) Algorithmic Trends in Computational Fluid Dynamics. N.Y.: ICASE/NASA LaRC Series. Springer, 1993.

7. Spearman M.L., Braswell D.O. Aerodynamics of a Sphere and an Oblate Spheroid for Mach Numbers From 0.6 to 10.5 Including Some Effects of Test Conditions. NASA Technical Memorandum 109016, 1993.

8. Hodges A.J. The Drag Coefficient of Very High Velocity Spheres // Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 24, No. 10, October 1957, pp. 755–758.

9. Kryuchkova A.S. Numerical simulation of a hypersonic flow over HB-2 model using UST3D programming code // 2019 J. Phys.: Conf. Ser. 1250 012010. DOI: 10.1088/1742-6596/1250/1/012010.

10. Popov I., Sukov S. Modified method of adaptive artificial viscosity for solution of gas dynamics problems on parallel computer systems // EPJ Web of Conferences 173, 03020 (2018). doi: https://doi.org/10.1051/epjconf/201817303020.

11. Gorobets A.V., Soukov S.A., Neiman-Zade M.I., Okunev S.K., Kalyakin A.A. Performance of elbrus-8c processor in supercomputer cfd simulations // Mathematical Models and Computer Simulations. 2019. Vol. 11. No. 6. pp. 914-923.

12. Суков С.А. Библиотека препроцессорной обработки неструктурированных сеток hm4PreprocessorLib // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 108. 20 с. doi:10.20948/prepr-2016-108.

MSC2020 65Y05 35Q30

Parallel program complex TAPIR for CFD simulations

S. A. Soukov

Keldysh Institute of Applied Mathematics [1]

Abstract: The article presents a description of the parallel program complex TAPIR (developed in the Keldysh Institute of Applied Mathematics) functionality. The software is designed for numerical simulation of the external flows around bodies on conformal and locally adaptive mixed meshes using the resources of high-performance systems with various architectures. The formulation of a numerical algorithm, examples of calculation results, characteristics of the efficiency of parallelization of computations and distributed data processing are given.

Keywords: computational fluid dynamics, unstructured meshes, parallel computation.

References

1. Gorobets A., Soukov S., Bogdanov P. Multilevel parallelization for simulating turbulent flows on most kinds of hybrid supercomputers. Computers and Fluids. 2018. vol. 173. pp. 171–177. https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.03.011

2. Barth T.J. Numerical Aspects of Computing High-Reynolds Number Flows on Unstructured Meshes. AIAA Paper 91-0721, 1991.

3. Kim S., Caraeni D., Makarov B. A Multidimensional Linear Reconstruction Scheme for Arbitrary Unstructured Grids. Technical report. AIAA 16th Computational Fluid Dynamics Conference, Orlando, FloridaAmerican Institute of Aeronautics and Astronautics. June 2003.

4. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg; 2009. doi: 10.1007/b79761.

5. Wada Y., Liou M.S. A flux splitting scheme with high resolution and robustness for discontinuities. AIAA Paper 94-0083.

6. Powell K., Roe P., Quirk J. Adaptive-Mesh Algorithms for Computational Fluid Dynamics. In: Hussaini M.Y., Kumar A., Salas M.D. (eds) Algorithmic Trends in Computational Fluid Dynamics. N.Y.: ICASE/NASA LaRC Series. Springer, 1993.

7. Spearman M.L., Braswell D.O. Aerodynamics of a Sphere and an Oblate Spheroid for Mach Numbers From 0.6 to 10.5 Including Some Effects of Test Conditions. NASA Technical Memorandum 109016, 1993.

8. Hodges A.J. The Drag Coefficient of Very High Velocity Spheres. Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 24, No. 10, October 1957, pp. 755–758.

9. Kryuchkova A.S. Numerical simulation of a hypersonic flow over HB-2 model using UST3D programming code. 2019 J. Phys.: Conf. Ser. 1250 012010. DOI: 10.1088/1742-6596/1250/1/012010.

10. Popov I., Sukov S. Modified method of adaptive artificial viscosity for solution of gas dynamics problems on parallel computer systems. EPJ Web of Conferences 173, 03020 (2018). doi: https://doi.org/10.1051/epjconf/201817303020.

11. Gorobets A.V., Soukov S.A., Neiman-Zade M.I., Okunev S.K., Kalyakin A.A. Performance of elbrus-8c processor in supercomputer cfd simulations. Mathematical Models and Computer Simulations. 2019. Vol. 11. No. 6. pp. 914-923.

12. Soukov S.A. Unstructured mesh preprocessing library hm4PreprocessorLib. Keldysh Institute preprints, 2016. No. 108. 20 pp. (in Russian) doi:10.20948/prepr-2016-108. (In Russian).

УДК 532.582.7

Динамика твердых частиц взвеси в параболическом потоке вязкой жидкости

Сыромясов А. О., Меньшакова Т. В.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В статье изучается обтекание твердой сферы ползущим потоком несжимаемой вязкой жидкости. Скорость потока квадратично зависит от координат, что соответствует течению по трубам круглого и эллиптического течения. Возмущение, вносимое частицей в поток, найдено методом мультипольного разложения. На основе полученного решения уравнения Стокса найдены силы, действующие на взвешенную сферу, и ее скорость относительно потока. Найдены траектории частиц взвеси в параболическом потоке.

Ключевые слова: уравнение Стокса, вязкая жидкость, суспензия, параболический поток, динамика частицы.

1. Постановка задачи

Как правило, жидкости, участвующие в природных или технологических процессах, не являются чистыми, а содержат примеси: твердые инородные частицы или мелкие капли другой жидкости. Примерами служат нефть, краски, лекарственные суспензии и эмульсии, кровь и т.д. [1].

Огибая частицы примеси, жидкость изменяет свое течение. Если они расположены достаточно близко, то на каждую из них набегает поток, уже искаженный другими частицами. Моделирование течения жидкости, имеющей примеси, является актуальным как с естественнонаучной, так и технической точки зрения. Поэтому рассмотрим такую задачу более детально.

Пусть задан внешний поток $\vec{U} = (U_1, U_2, U_3)$, набегающий на частицу A, а сама она представляет из себя одиночный шарик радиуса a (рис. 1).

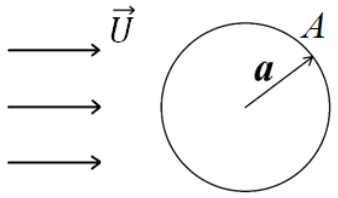


Рис. 1. Обтекание шарика внешним потоком.

Возникает несколько вопросов: как сама частица будет двигаться в этом потоке? Как она будет искажать данный поток?

Т.к. практическую значимость имеет течение жидкостей по трубам, то мы будем рассматривать набегающие потоки, в которых скорость является многочленом от координат не выше второй степени. Например, таковым является решение задачи Пуазейля [2]. Систему координат $Ox_1x_2x_3$ будем считать декартовой прямоугольной.

При моделировании течения примем следующие упрощения:

- Температура жидкости постоянна, следовательно, и ее вязкость постоянна.

- Скорость жидкости $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ на поверхности частицы равна скорости самой этой поверхности (условие прилипания).
- Жидкость несжимаема, частица мала, а вязкость жидкости η достаточно велика. Поэтому число Рейнольдса много меньше единицы и справедливы уравнения Стокса:

$$\eta \Delta u_i = \nabla p,\ i = 1, 2, 3; \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \tag{1}$$

Буквой p обозначено давление в жидкости. Повторение буквенного индекса означает, что по этому индексу происходит суммирование в пределах от 1 до 3.

Как показано в [3], эти упрощения имеют реальное обоснование и применение.

В начале статьи было сказано, что твердая частица искажает течение. Поэтому запишем скорость жидкости и давление как

$$\vec{u} = \vec{U} + \vec{v}, \quad p = P + p', \tag{2}$$

где $\vec{v}$ и p' – искажения, вызванные твердым шариком, а давление P соответствует $\vec{U}$. Функции $\vec{U}$ и P заданы заранее и удовлетворяют уравнениям Стокса. Необходимо найти $\vec{v}$ и p', для которых также справедливо (1).

Укажем граничные условия задачи.

Далеко от шарика поток не возмущен, т.е.

$$\vec{v} \to \vec{0},\ p' \to 0, \quad |\vec{x}| \to \infty. \tag{3}$$

Движение точек поверхности шарика складывается из движения его центра со скоростью $\vec{U}^A$ и вращения вокруг центра с угловой скоростью Γ_{ij}. Отсюда, используя условие прилипания и выражение (2), получим, что

$$U_i + v_i = U_i^A + \Gamma_{ij} x_j, \quad |\vec{x}| = a. \tag{4}$$

Здесь предполагается, что центр частицы находится в начале координат.

2. Решение задачи. Силы, действующие на частицу

Вне зависимости от U_i и Γ_{ij}, общее выражение для возмущений скорости и давления, удовлетворяющих (1) и (3), известно [4]:

$$\begin{aligned}
p' &= H_j L_j(\vec{x}) + F_{jk} L_{jk}(\vec{x}) + G_{jkl} L_{jkl}(\vec{x}) + D_{jklm} L_{jklm}(\vec{x}) + T_{jklms} L_{jklms}(\vec{x}) + \dots \\
\eta v_i &= -\frac{2}{3} H_i L_0(\vec{x}) - \frac{1}{6} H_j L_{ij}(\vec{x}) |\vec{x}|^2 - \frac{3}{5} F_{ij} L_j(\vec{x}) - \frac{1}{10} F_{jk} L_{ijk}(\vec{x}) |\vec{x}|^2 - \\
&\quad -\frac{4}{7} G_{ijk} L_{jk}(\vec{x}) - \frac{1}{14} G_{jkl} L_{ijkl}(\vec{x}) |\vec{x}|^2 - \frac{5}{9} D_{ijkl} L_{jkl}(\vec{x}) - \frac{1}{18} D_{jklm} L_{ijklm}(\vec{x}) |\vec{x}|^2 - \\
&\quad -\frac{6}{11} T_{ijkms} L_{jklm}(\vec{x}) - \frac{1}{22} T_{jklms} L_{ijklms}(\vec{x}) |\vec{x}|^2 - \dots
\end{aligned}$$

Т.н. мультиполи $L_{i\dots j}$ находятся по формулам

$$L_0(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}, \quad L_{i\dots j}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\frac{1}{|\vec{x}|} \Big),$$

а тензорные коэффициенты $H_i, F_{ij}, \dots$ не зависят от $\vec{x}$. Они должны выражаться через компоненты вектора $\vec{U}$, описывающего внешний поток. Для этого используется условие (4).

В свою очередь, выражения для сил $\mathcal{F}_i$, действующих на частицу, записываются с помощью этих тензорных коэффициентов:

$$\mathcal{F}_i = 4\pi H_i. \tag{5}$$

При течении вязкой жидкости по трубам круглого и эллиптического сечения U_i включает в себя одновременно и однородную, и квадратичную составляющие [2]:

$$U_i = U_i^{const} + C_{ijk}x_j x_k, \tag{6}$$

где U_i^{const} и C_{ijk} суть некоторые константы. Поэтому отдельно рассмотрим задачи для однородного потока и отдельно – для квадратичного. Вращение частицы нас не интересует, и далее предполагается, что $\Gamma_{ij} = 0$.

Направим ось трубы вдоль Ox_1. Тогда для движения по трубе круглого сечения

$$U_1 = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - x_2^2 - x_3^2),\ U_2 = U_3 = 0,$$

где R – радиус поперечного сечения, а Δp – перепад давления на длине l. Поэтому

$$U_1^{const} = \frac{\Delta p}{4\eta l}R^2, C_{122} = C_{133} = -\frac{\Delta p}{4\eta l}, \tag{7}$$

а остальные компоненты U_i^{const} и C_{ijk} равны нулю.

Если труба имеет эллиптическое сечение, то

$$U_1^{const} = \frac{\Delta p}{2\eta l}\cdot\frac{R_2^2R_3^2}{R_2^2+R_3^2},\ C_{122} = -\frac{\Delta p}{2\eta l}\cdot\frac{R_3^2}{R_2^2+R_3^2},\ C_{133} = -\frac{\Delta p}{2\eta l}\cdot\frac{R_2^2}{R_2^2+R_3^2}, \tag{8}$$

иные компоненты вновь равны нулю. Здесь R_2 и R_3 – полуоси эллипса вдоль осей Ox_2 и Ox_3, соответственно.

Граничные условия для задачи с однородным потоком включают в себя скорость частицы относительно жидкости $V_i = U_i^A - U_i^{const}$:

$$v_i = V_i, \quad |\vec{x}| = a.$$

В данном случае коэффициент, отвечающий за действующую силу, имеет вид $H_i = -3aV_i/2$, а следовательно, сила (5), действующая на частицу, равна $-6\pi\eta aV_i$.

Аналогично, для параболического потока с коэффициентами C_{ijk} имеем

$$H_i = \frac{a^3}{2}C_{ikk}, \quad \mathcal{F}_i = 2\pi a^3 C_{ikk}.$$

Суммарная сила, действующая на частицу, равна нулю. Следовательно, сумма сил, действующих на нее в однородном и параболическом потоках – нулевая. Значит, скорость частицы относительно жидкости выражается через параметры квадратичного потока:

$$-6\pi\eta aV_i + 2\pi a^3 C_{ikk} = 0 \Rightarrow V_i = \frac{a^2}{3}C_{ikk}.$$

3. Траектории взвешенных частиц

Знание скорости частицы относительно жидкости позволяет построить и траекторию частицы. Для этого нужно решить дифференциальные уравнения

$$\frac{dr_i^A}{dt} = U_i^A,\ i = 1, 2, 3, \tag{9}$$

относительно координат радиус-вектора центра частицы $\vec{r}^A$. Скорость $U_i^A = U_i + V_i$ нам известна, поскольку U_i заранее задана, а V_i найдена выше.

Нюанс состоит в том, что ранее мы решали задачу, в которой центр частицы находился в начале координат, а в реальности его нужно сдвинуть на $\vec{r}^A$. Соответственно, из (6) и (9) получается

$$\frac{dr_i^A}{dt} = \frac{a^2}{3} C_{ikk} + U_i^{const} + C_{ijk} r_j^A r_k^A,\ i = 1, 2, 3$$

Эта система уравнений решалась при различных начальных данных с помощью системы Wolfram Mathematica; предполагалось, что шарик движется в течение 10 условных единиц времени.

В случае круглой трубы всегда считалось, что $R = 1$. Для радиуса частицы были рассмотрены три варианта: $a = 0.25$, $a = 0.1$ и $a = 0.01$. Для каждого из них были взяты различные начальные положения центра шарика: $(0, 0, a)$ – частица располагается практически на оси трубы Ox_1; $(0, 0, R/2)$ – частица находится посередине между осью x_1 и стенкой трубы; $(0, 0, R - a)$ – частица касается стенки трубы.

Первоначальная гипотеза состояла в том, что шарик в зависимости от его начального положения будет относить либо к оси трубы, либо к ее стенкам. Если бы она подтвердилась, это помогло бы организовать сбор и фильтрацию твердых примесей в вязких жидкостях, текущих по трубам, – было бы известно, где эта примесь концентрируется. Однако в результате построения у нас всегда получается прямая линия (рис. 2). Предположение, что частицу отнесет от стенки трубы к центру или наоборот – не подтвердилось.

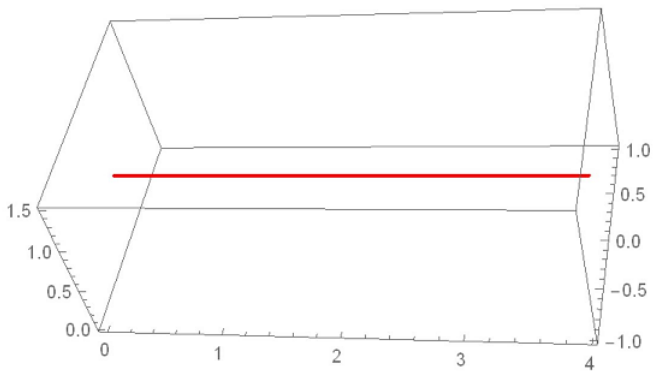


Рис. 2. Траектория шарика радиуса $a = 0.25$ и начальным положением центра $(0, 0, R - a)$.

Аналогично, при течении по трубам эллиптического сечения выдвигалась гипотеза, что частицы взвеси могут собираться в "карманах" трубы – возле наиболее удаленных друг от друга вершин эллипса. Однако она также не подтвердилась.

На основании всего вышесказанного делаем выводы:

- Если труба круглая, то C_{2jk} и C_{3jk} в (7) и в (8) равны нулю. Поэтому $V_2 = V_3 = 0$, частица движется горизонтально, параллельно оси x_1 трубы и не движется вдоль по двум другим осям x_2, x_3.
- Относительная скорость частицы получилась равной $V_1 = a^2 C_{1kk}/3$, что меньше нуля, и значит, частица отстает от потока жидкости.
- Относительная скорость частицы не зависит от ее начального положения, а только от ее размера: чем меньше радиус шарика, тем меньше отставание от потока жидкости.

Сделанные выводы не зависят от того, по какой трубе течет жидкость, – по круглой или по эллиптической.

Литература

1. Фридрихсберг Д. А. Курс коллоидной химии. 3-е изд., испр. СПб. : Химия, 1995. 399 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М. : Наука, 1986. 736 с.
3. Меньшакова Т. В. Математическая модель термогидродинамического взаимодействия частиц в вязкой жидкости и ее упрощения // XLVIII Огаревские чтения : материалы науч. конф. В 3 ч. Ч. 2 : Естественные науки. — Саранск : Изд-во Мордов. ун-та, 2020. — С. 576—580.
4. Мартынов С. И. Гидродинамическое взаимодействие частиц // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 2. С. 112–119.

MSC2020 76D07, 76T20, 70E15, 35Q35, 35C99

Dynamics of rigid particles in a parabolic flow of viscous fluid

A. O. Syromyasov, T. V. Menshakova
National Research Mordovia State University

Abstract: The authors investigate rigid spherical particle in a creeping incompressible flow. Far from the suspended sphere the flow is parabolic that corresponds to fluid movement in a tube with circular of elliptic cross-section. Disturbance caused by the particle is found by the method of multipole expansion. Basing on the solution obtained the forces acting on the particle and the particle's relative velocity are found. Finally the trajectories of rigid spheres, which are straight lines, are obtained.

Keywords: Stokes equation, viscous fluid, suspension, parabolic flow, particle dynamics.

References

1. Fridrihsberg D. A. [Colloidal chemistry course]. 3rd ed. SPb., Himija, 1995, 399 p. (In Russian).
2. Landau L. D., Lifshitz E. M. Fluid Mechanics. 2nd ed. Butterworth–Heinemann, 1987. (In Russian).
3. Menshakova T. V. [Mathematical model of thermohydrodynamic interaction of particles in a viscous fluid and its simplification]. XLVIII Ogarev readings. Pt. 2. Saransk, 2020. pp. 576—580. (In Russian).
4. Martynov S. I. Hydrodynamic interaction of particles. Fluid Dynamics. 1998. V. 33(2). DOI: 10.1007/BF02698709. (In Russian).

Научное электронное издание

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
IX МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ
МОЛОДЕЖНОЙ ШКОЛЫ-СЕМИНАРА
имени Е.В. Воскресенского

Саранск
8 – 11 октября 2020 г.

Редакторы: Пескова Е.Е., Зинина С.Х.

Формат 60×84 1/16

Усл. печ. л. 15,87

Подписано в печать 6.11.2020

Средне-Волжское математическое общество

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

CBMO