УДК 517.958:519.6

О конечных рядах, связанных с ортогональными финитными функциями, в методе Фурье

Леонтьев В.Л. [1]

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого[1]

Аннотация: Излагается обобщение метода Фурье, связанное с применением ортогональных финитных функций, на примере первой начально-краевой задачи для двумерной области с криволинейной границей. Формируемая последовательность конечных рядов Фурье в каждый момент времени сходится к точному решению задачи – бесконечному ряду Фурье. Метод дает сколь угодно точные приближенные аналитические решения задачи, по структуре аналогичные точному решению, в форме конечных ортогональных рядов – обобщенных рядов Фурье, открывая новые возможности классического метода разделения переменных при решении задач для областей с криволинейными границами. Аналогичное обобщение метода Фурье справедливо в рамках начально-краевых задач других типов, для областей более высокой размерности.

Ключевые слова: метод разделения переменных, метод Фурье, ортогональные финитные функции, конечные ряды, краевая задача, область с криволинейной границей, собственные значения оператора, собственные функции оператора.

1. Введение

На примере первой начально-краевой задачи для области с криволинейной границей излагается алгоритм обобщенного метода Фурье, связанный с применением ортогональных финитных функций (ОФФ). Показано, что формируемая последовательность конечных рядов Фурье в каждый момент времени сходится к точному решению задачи – бесконечному ряду Фурье. Структура этих конечных рядов Фурье аналогична структуре бесконечного ряда Фурье. При увеличении числа узлов сетки в рассматриваемой области с криволинейной границей имеет место сходимость приближенных собственных значений и собственных функций краевой задачи к точным собственным значениям и собственным функциям и при этом структура конечных рядов Фурье приближается к структуре бесконечного ряда Фурье, представляющего собой точное решение начально-краевой задачи. Метод дает сколь угодно точные приближенные аналитические решения задачи, по структуре аналогичные точному решению, и поэтому относится к группе аналитических методов построения решений в форме конечных ортогональных рядов – обобщенных рядов Фурье, открывая новые возможности классического метода Фурье.

Метод разделения переменных (метод Фурье) позволяет находить частные решения многих краевых и начально-краевых задач для уравнений в частных производных, допускающих разделение переменных. Метод связан с задачей Штурма-Лиувилля и, во многих случаях, со специальными функциями на этапе решения этой задачи. Классический метод Фурье позволяет получать решения широких классов задач, но его реализация для задач многих типов, в том числе задач, постановки которых содержат нерегулярные граничные условия, даже в тех случаях, в которых все участки границы области являются координатными линиями или поверхностями, встречается со значительными трудностями. Одно из направлений расширения области применения классического метода Фурье – решение сопутствующих методу математических проблем, например, связанных с характером граничных условий [1]. Специальные функции появляются при решении задачи Штурма-Лиувилля в цилиндрической или сферической системах координат, применение которых целесообразно в случаях областей, границы которых – координатные линии или поверхности в этих системах координат (границы цилиндрических и сферических областей). В общем случае задач для областей с криволинейными границами применение специальных функций является неэффективным. Классический метод Фурье применим только при решении краевых и начально-краевых задач для областей классической формы, что отмечается, например, в [2] при решении контактных задач для упругих тел с криволинейными границами. Решения, полученные классическим методом Фурье, приводятся, в частности, в статьях [3-6], применение метода рассматривается во многих книгах, например, в [7]. Другие направления развития математических инструментов решения задач для областей с криволинейными границами связаны, во-первых, с созданием и применением ряда методов, отличных от метода Фурье, и, во-вторых, с модификацией самого метода Фурье. Здесь рассматривается расширение области применения классического метода Фурье, определяемое применением последовательности конечных обобщенных рядов Фурье, а также использованием при этом ОФФ (ортогональных базисных функций с компактными носителями), позволяющих находить аналитические решения задачи Штурма-Лиувилля на сетках в областях с криволинейными границами.

2. Алгоритм метода Фурье, связанный с конечными рядами ОФФ

На примере первой начально-краевой задачи рассматривается алгоритм обобщенного метода Фурье решения начально-краевых задач для областей с криволинейными границами. Первые шаги алгоритма обобщенного метода Фурье для областей с криволинейной границей совпадают с аналогичными шагами классического метода Фурье. Решение начально-краевой задачи также разыскивается в виде произведения функции, зависящей только от времени, и функции, зависящей от пространственных координат. Подстановка произведения функций в дифференциальное уравнение начально-краевой задачи приводит к краевой задаче Штурма-Лиувилля. При разделении переменных из постановки начально-краевой задачи также следует уравнение задачи Коши, решение которой связано посредством входящего в постановку задачи Коши параметра с решением задачи Штурма-Лиувилля, и два начальных условия.

Дальнейшие шаги алгоритма обобщенного метода Фурье, предназначенного для решения начально-краевых задач в случае двумерных областей с криволинейными границами, отличаются от соответствующих шагов классического алгоритма, поскольку связаны с применением ОФФ при построении последовательности приближенных аналитических решений в форме конечных обобщенных рядов Фурье и с предельным переходом в этой последовательности к точному решению первой начально-краевой задачи – бесконечному ряду Фурье. Нетривиальное решение краевой задачи Штурма-Лиувилля ищется в виде линейной комбинации тензорных произведений функций одного аргумента – соответственно x и y, взятых из двух систем сеточных ОФФ [8]. Двумерная односвязная область с криволинейной границей вписывается в прямоугольную область, границы которой разбиваются сетками на части, определяющие конечные носители ОФФ.

Заметим, что использование диагоналей прямоугольных конечных элементов, возникающих при таком разбиении, позволяет аппроксимировать криволинейные части границы исходной области. Ортогональные финитные функции двух аргументов, конечные носители которых связаны с такими диагоналями, вводятся в [8] и заменяют собой тензорные произведения ОФФ одного аргумента.

Для определения величин неизвестных постоянных коэффициентов линейной комбинации ОФФ используются проекционные условия метода Бубнова-Галеркина, в рамках краевой задачи Штурма-Лиувилля совпадающие с условиями метода Ритца. Формируется однородная система линейных алгебраических уравнений, неизвестными в которой являются указанные коэффициенты. Эта система всегда имеет тривиальное решение. Те значения параметра, появляющегося на этапе разделения переменных, при которых система имеет нетривиальные решения, являются собственными значениями проекционно-сеточного оператора, полученного с помощью проекционного алгоритма Бубнова-Галеркина на основе исходного дифференциального оператора, а также собственными значениями краевой задачи Штурма-Лиувилля, записанной в проекционной форме. Матрица системы уравнений – вещественная и симметричная, а, следовательно, все собственные значения и собственные векторы этой матрицы имеют вещественные значения [9, с. 134-142], причем все ее собственные векторы линейно независимы и попарно ортогональны. Собственные значения положительны, поскольку матрица не только симметричная и вещественная, но и положительно определенная в силу того, что матрица возникла в проекционных условиях на основе скалярного произведения, примененного к положительно определенному в случае рассматриваемого граничного условия оператору. Строится конечная сумма, по индексам найденных собственных значений, произведений функций, соответствующих этим собственным значениям. Такими сомножителями-функциями являются решения начальной задачи Коши, возникающей после разделения переменных, для найденных собственных значений и конечный обобщенный ряд ОФФ-Фурье – аналитическое решение задачи Штурма-Лиувилля в проекционной форме. Коэффициенты конечного ряда определяются классическими формулами для коэффициентов Фурье, выражающими их через функции, заданные в двух начальных условиях и через ОФФ. Получаемый конечный ряд Фурье удовлетворяет уравнениям задачи Штурма-Лиувилля в проекционной форме, уравнению задачи Коши, а также граничному условию и двум начальным условиям, то есть является приближенным аналитическим решением первой начально-краевой задачи в случае области с криволинейной границей.

При сгущении сеток и, соответственно, при увеличении числа используемых ОФФ, собственные функции и собственные значения оператора задачи, записанной в равносильной проекционной форме, после ее дискретизации сходятся к соответствующим собственным функциям и собственным значениям оператора исходной задачи. Доказательство сходимости собственных функций проводится на основе рассмотрения вспомогательного квадратичного функционала, имеющего в стационарной точке минимум и равного нулю в этой точке. Поэтому задача минимизации функционала сводится к задаче теории аппроксимации точных собственных функций линейными комбинациями ОФФ, то есть к задаче, решение которой содержится в [8], где имеются соответствующие теоремы об аппроксимации, определяющие точность аппроксимации и скорость сходимости, зависящие от типа конкретных систем базисных ОФФ. В [8, стр. 129-134] показано, что для оператора Лапласа при увеличении числа узлов сетки области, то есть при увеличении числа используемых сеточных базисных ОФФ, приближенные собственные частоты сходятся к соответствующим по номерам точным собственным частотам краевой задачи. При увеличении числа узлов сетки области приближенные решения задачи Штурма-Лиувилля, то есть приближенные собственные функции этой задачи, сходятся по норме пространства Соболева к ее точным решениям – собственным функциям. При этом неограниченно возрастает число собственных значений и собственных функций краевой задачи в проекционной форме, а, следовательно, конечная сумма в пределе переходит в бесконечный ряд, который при всяком допустимом значении времени является бесконечным рядом Фурье. Такой ряд является единственным решением исходной начально-краевой задачи, что следует из теоремы [10, стр. 88-91], основанной на теореме Стеклова [10, стр. 87].

Отличие данного метода решения начально-краевых задач для областей с криволинейными границами от других методов, например, от классического метода конечных элементов, связанного с использованием неортогональных сплайнов, состоит в том, что в данном методе определяемая его алгоритмом последовательность конечных рядов Фурье в каждый фиксированный момент времени сходится к соответствующему бесконечному ряду Фурье, сформированному на основе точных собственных функций и точных собственных значений и представляющему собой существующее точное решение начально-краевой задачи, определить которое не удается.

3. Заключение

В работах [11-14] показано, что сочетание таких свойств сеточных базисных ОФФ, как финитность и ортогональность, приводит к высокой эффективности использования ОФФ при создании новых интегральных преобразований, потенциала взаимодействия атомов в механике деформируемого твердого тела (упругость и пластичность, статика или динамика, линейные или нелинейные задачи, стержни, пластины и оболочки, трехмерные тела).

Здесь раскрываются возможности ОФФ в обобщении классического метода математической физики, приводящем к включению в область его применения задач для областей с криволинейными границами. Показано, что обращение к ОФФ порождает конечные обобщенные ряды Фурье, которые представляют собой последовательность аналитических приближенных решений первой начально-краевой задачи для двумерной области с криволинейной границей, которые при увеличении числа узлов сетки неограниченно близко (в смысле нормы пространства Соболева, дающей оценку близости не только функций, но и их первых частных производных) подходят к точному решению этой задачи - бесконечному ряду Фурье, не только по количественным критериям, но по своей аналитической структуре.

Метод дает сколь угодно точные приближенные аналитические решения исходной начально-краевой задачи, поставленной в форме дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями, в форме ортогональных конечных рядов – обобщенных конечных рядов Фурье, связанных с сеточными ОФФ, для областей с криволинейными границами. Структура этих конечных обобщенных рядов Фурье аналогична структуре искомого точного решения в форме бесконечного ряда Фурье, и поэтому, после того, как задана точность, с которой определяется решение в форме конечного обобщенного ряда Фурье, можно считать, что метод приводит к точному аналитическому решению, удовлетворяющему заданной точности.

Литература

1. Гасымов Э.А., Гусейнова А.О., Гасанова У.Н. Применение обобщенного метода разделения переменных к решению смешанных задач с нерегулярными граничными условиями // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. 2016. Т. 56, № 7. С. 1335–1339.

2. Савичев И.С., Чернышев А.Д. Применение метода угловых суперпозиций для решения контактной задачи о сжатии упругого цилиндра // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2009. № 3. С. 151-162.

3. Хромов А.П., М.Ш. Бурлуцкая М.Ш. Классическое решение методом Фурье смешанных задач при минимальных требованиях на исходные данные // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, № 2. С. 171–198.

4. Колмогоров В.Л., Федотова В.П., Спевак Л.Ф., Бабайлов Н.А., Трухин В.Б. Решение нестационарных температурных и термомеханических задач методом разделения переменных в вариационной постановке // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2006. Вып. 42. С. 72–75.

5. Малов Ю.И., Мартинсон Л.К., Павлов К.Б. Решение некоторых смешанных краевых задач гидродинамики проводящих сред методом разделения переменных // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. 1972. Т. 12, № 3. С. 627–638.

6. Исраилов М.Ш. Дифракция акустических и упругих волн на полуплоскости при разнотипных граничных условиях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2013. № 3. С. 121-134.

7. Vretblad A. Fourier analysis and its applications. New York, Berlin, Heidelber, SpringerVerlag, 2003. 269 p.

8. Леонтьев В.Л. Ортогональные финитные функции и численные методы. Ульяновск, УлГУ, 2003. 178 с.

9. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов. Л., изд-во Ленингр. ун-та, 1974. 160 с.

10. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М., главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1974. 430 с.

11. Леонтьев В.Л. Вариационно-сеточный метод решения задач о собственных колебаниях упругих трехмерных тел, связанный с использованием ортогональных финитных функций // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2002. № 3. С. 117.

12. Леонтьев В.Л., Риков Е.А. Интегральные преобразования, связанные с ортогональными финитными функциями, в задачах спектрального анализа сигналов // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 7. С. 93-100.

13. Леонтьев В.Л., Михайлов И.С. О построении потенциала взаимодействия атомов, основанном на ортогональных финитных функциях // Нано- и микросистемная техника. 2011. № 9 (134). С. 48-50.

14. Леонтьев В.Л., Мелентьев А.Ю. Сеточные методы расчета криволинейных стержней // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 10. С. 95.

MSC2010 35Q74, 65M60

About Finite Series, connected with Orthogonal Finite Functions, in Fourier Method

V.L. Leontiev[1]

Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University[1]

Abstract: The generalization of Fourier method is connected with using of orthogonal compactly supported functions. The generalization is produced on the example of first boundary value problem for region with curvilinear boundary. Formed sequence of finite Fourier series converges to exact solution in every moment of time. The method gives analytical solutions in form of finite Fourier series, which have the structure similar to the structure of exact solution. It opens new possibilities of classical Fourier method for task in region with curvilinear boundary. Similar generalization of Fourier method is possible for other boundary value problems and for 3 dimensions.

Keywords: Method of differentiation of variables, Fourier method, orthogonal finite functions, finite series, boundary value problem, domain with curvilinear boundary, own values of operator, own functions of operator.

References

1. Gasimov E.A., Guseinova A.O., Gasanova U.N. Application of the generalized method of separation of variables to solving mixed problems with irregular boundary conditions. Zhurnal vichislit. matem. i matem. fiziki. 2016. V. 56, No. 7. P. 1335–1339.

2. Savichev I.S., Chernishov A.D. The use of the angular superposition method to solve the contact problem of compression of an elastic cylinder. Izvestia Rossiyskoy akademii nauk. Mehanika tverdogo tela. 2009. No. 3. P. 151-162.

3. Hromov A.P., Burluckaia M.Sh. Classical Solution by the Fourier Method of Mixed Problems with Minimum Requirements on the Initial Data. Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematica. Mehanica. Informatika. 2014. V. 14, No. 2. P. 171–198.

4. Kolmogorov V.L., Fedotova V.P., Spevak L.F., Babailov N.A., Truhin V.B. Solution of non-stationary temperature and thermomechanical problems by the method of separation of variables in a variational formulation. Vestn. Sam. gos. tehn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2006. V. 42. P. 72–75.

5. Malov Iu.I., Martinson L.K., Pavlov K.B. The solution of some mixed boundary value problems of the hydrodynamics of conducting media by the method of separation of variables. Zhurnal vichislit. matem. i matem. fiziki. 1972. V. 12, No. 3. P. 627–638.

6. Israilov M.Sh. Diffraction of acoustic and elastic waves in the half-plane under heterogeneous boundary conditions. Izvestia Rossiyskoy akademii nauk. Mehanika tverdogo tela. 2013. No. 3. P. 121-134.

7. Vretblad A. Fourier analysis and its applications. New York, Berlin, Heidelber, SpringerVerlag, 2003. 269 p.

8. Leontiev V.L. Orthogonal finite functions and numerical methods [Ortogonalnie finitnie funkcii i chislennie metodi]. Ulianovsk, UlGU, 2003. 178 p.

9. Kliot-Dashinskiy M.I. Algebra of matrices and vectors [Algebra matric i vektorov]. Leningrad, Leningr. un. press, 1974. 160 p.

10. Arsenin V.Ia. Methods of mathematical physics and special functions [Metodi matematicheskoy fiziki i specialnie funkcii]. M.: Nauka, 1974. 430 p.

11. Leontiev V.L. Variational-grid method for solving problems of natural vibrations of elastic three-dimensional bodies associated with the use of orthogonal finite functions. Izvestia Rossiyskoy akademii nauk. Mehanika tverdogo tela. 2002. No. 3. P. 117.

12. Leontiev V.L., Rikov E.A. Integral transformations associated with orthogonal finite functions in problems of spectral analysis of signals. Matematicheskoe modelirovanie. 2006. V. 18, No. 7. P. 93-100.

13. Leontiev V.L., Mihailov I.S. On the construction of the atomic interaction potential based on orthogonal finite functions. Nano- i mikrosistemnaia tehnika.2011. No. 9 (134). P. 48-50.

14. Leontiev V.L., Melentiev A.Iu. Grid methods for calculating curved rods. Matematicheskoe modelirovanie. 2003. V. 15, No. 10. P. 95.