УДК 517.9

О частичной устойчивости нулевого положения равновесия нелинейных динамических систем по первому приближению

Шаманаев П.А.[1], Язовцева О.С.[1]

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет[1]

Одним из подходов к исследованию частичной устойчивости систем является метод, изложенный в работах [1, 2] и основанный на установлении покомпонентной асимптотической эквивалентности между исследуемой системой и ее первым приближением. Особенностью этого подхода является то, что для асимптотически эквивалентных систем свойства частичной устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения переносятся с системы линейного приближения на нелинейную систему. При этом покомпонентную асимптотическую эквивалентность достаточно установить лишь в некоторой малой окрестности нулевого решения. В этом случае эквивалентность систем носит название локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности [3–6].

Такой подход позволяет получить новые достаточные условия частичной устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого положения равновесия для широкого класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде векторных полиномов из множества Ξ

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P(x), \tag{1}$$

где A – постоянная $(n \times n)$-матрица,

$$P(x) = (P_1(x), \dots, P_n(x))^T\,,\ P_j(x) = \sum_{|p_j|=2}^{\sigma} d_j^{(p_j)} x^{p_j}\,,\ x^{p_j} = x_1^{p_{j1}} x_2^{p_{j2}} \dots x_n^{p_{jn}}\,,\ \sigma \geq 2,$$

$$p_j = (p_{j1}, ..., p_{jn}), \quad |p_j| = p_{j1} + \dots + p_{jn},$$

и ее линейное приближение

$$\frac{dy}{dt} = Ay. \tag{2}$$

Пусть матрица A имеет $r \leq n$ различных собственных значений

$$\lambda_1, ..., \lambda_k, ..., \lambda_r,$$

где каждому λ_k отвечает n_k групп решений системы (2) [7]. Причем число решений в каждой из n_k, $k = 1, ..., r$ групп равно

$$m_{k,1}, ..., m_{k,j}, ..., m_{k,n_k} \quad j = 1, ..., n_k.$$

Обозначим через $y_{ij}(t-t_0)$, $i, j = \overline{1,n}$, элементы нормированной фундаментальной матрицы $Y(t-t_0)$ и введем множества $K_i = \{j\ :\ y_{ij}(t-t_0) \equiv 0,\ \forall\ t, t_0 \geq T\}$, $i = \overline{1,n}$. Тогда для элементов i-ой строки нормированной фундаментальной матрицы $Y(t-t_0)$ справедливы оценки

$$|y_{ij}(t-t_0)| \leq D_0 e^{\beta_i (t-t_0)} \rho^{b_i}(t-t_0), \quad t \geq t_0, \quad j \in N \backslash K_i,\ i = \overline{1,n},$$

$$|y_{ij}(t-t_0)| \leq D_0 e^{\alpha_i(t-t_0)} \rho^{a_i}(t-t_0), \quad t \leq t_0, \quad j \in N \backslash K_i, \ i=\overline{1,n},$$

где

$$\rho^{\nu}(t) = \begin{cases} 1, \text{если } |t| < 1, \\ |t|^{\nu}, \text{если } |t| \geq 1, \end{cases}$$

где $D_0 > 0$ – некоторая константа. Здесь в качестве β_i и α_i выбираются соответственно максимальное и минимальное из Λ_k, когда индекс j пробегает по всем ненулевым элементам $y_{ij}(t-t_0)$ i-ой строки нормированной фундаментальной матрицы, b_i, a_i – максимальные из степеней полиномов при ненулевых элементах, соответствующих β_i и α_i.

Сформулируем достаточные условия частичной устойчивости нулевого решения системы (1).

Теорема 1. *Если выполняются неравенства*

$$p_{j1}\beta_1 + ... + p_{jn}\beta_n < \alpha_i, i = \overline{1,n},$$

по всем наборам $(p_{j1}, ..., p_{jn})$, $|p_j| = \overline{2,\sigma}$, *таким что* $d_j^{(p_j)} \neq 0, j = \overline{1,n}$, *то системы* (1) *и* (2) *являются локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций* $\mu_i(t) = e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0)$, $i = \overline{1,n}$, *и нулевое решение системы* (1)

1) асимптотически устойчиво по той переменной x_i, *для которой* $\beta_i < 0$;

2) устойчиво по той переменной x_i, *для которой* $\beta_i = 0$, *а алгебраические и геометрические кратности собственных значений с нулевыми вещественными частями совпадают; причем нулевое решение системы* (1) *имеет локальное асимптотическое равновесие по этим переменным;*

3) неустойчиво по той переменной x_i, *для которой* $\beta_i > 0$.

Доказательство теоремы 1 проводится аналогично доказательству теоремы 3.1 из работы [5], если в качестве μ_i взять $\mu_i(t) = e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0)$, $i = \overline{1,n}$.

Литература

1. Воскресенский Е. В. Асимптотические методы: теория и приложения. Саранск: СВМО, 2000. 300 с.

2. Воскресенский Е. В. Методы сравнения в нелинейном анализе. Саранск: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. 224 с.

3. Язовцева О. С. Локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность и ее применение к исследованию устойчивости по части переменных [Электронный ресурс] // Огарев-online. 2017. № 13. Режим доступа: http://journal.mrsu.ru/arts/lokalnaya-pokomponentnaya-asimptoticheskaya-ekvivalentnost-i-ee-primenenie-k-issledovaniyu-ustojchivosti-po-chasti-peremennyx.

4. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложение к устойчивости по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 19, № 1. С. 102-115.

5. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия полиустойчивости по части переменных нулевого решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, № 3. С. 304-317.

6. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Исследование устойчивости положения равновесия системы динамики биоценоза в условиях межвидового взаимодействия // Вестник Мордовского университета. 2018. Т. 28, № 3. С. 321-332.
7. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 533 с.

MSC2010 34C20

On partial stability of the trivial equilibrium of nonlinear dynamical systems according to the first approximation

P.A. Shamanaev[1], O.S. Yazovtseva[1]

National Research Mordovia State University[1]