УДК 517.9

К вопросу о возмущении линейного уравнения двумя малыми линейными слагаемыми

Шаманаев П. А.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства. Рассматривается задача о нахождении решений линейного уравнения с возмущением в виде двух малых линейных слагаемых

$$Bx = h + \varepsilon_1 A_1 x + \varepsilon_2 A_2 x, \tag{1}$$

где B, A_1 и A_2 – плотно заданные замкнутые линейные фредгольмовы операторы, действующие из E_1 в E_2, ε_1, ε_2 – малые вещественные параметры.

Пусть $N(B) = span\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ – подпространство нулей оператора B, $N^*(B) = span\{\psi_k\}_{k=1}^n$ – подпространство дефектных функционалов оператора B, $N^*(B) \subseteq E_2^*$:

$$B\varphi_k = 0, \quad B^*\psi_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где B^* – оператор, сопряженный к B, действующий из E_2^* в E_1^*, E_1^* и E_2^* – пространства, сопряжённые к E_1 и E_2, соответственно.

Так как B – фредгольмов оператор, то согласно [1] для разрешимости уравнения

$$By = h,$$

необходимо и достаточно выполнения условий

$$< h, \psi_k >= 0, \quad k = 1, ..., n,$$

где $< h, \psi_k >$ – значение линейного функционала ψ_k на элементе h.

Будем предполагать, что элементы $\varphi_k \in N(B)$, $k = 1, \ldots, n$, образуют A-жорданову сетку согласно [2], причем $p_k = q_k$ и

$$J_k^+ = \{(i_k, j_k) : \ i_k + j_k = p_k\}, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Положим

$$\begin{aligned}
&z_k^{(p_k,0)} = A_1 \varphi_k^{(p_k-1,\,0)},\\
&z_k^{(i,j)} = A_1 \varphi_k^{(i-1,\,j)} + A_2 \varphi_k^{(i,\,j-1)}, \quad (i,j) \in J_k^+,\\
&z_k^{(0,p_k)} = A_2 \varphi_k^{(0,\,p_k-1)}.
\end{aligned}$$

Аналогично, будем предполагать, что элементы $\psi_k \in N(B^*)$, $k = 1, \ldots, n$, образуют A^*-жорданову сетку и множество J_k^+ определяется согласно формулы (3).

Положим

$$\begin{aligned}
&\gamma_k^{(p_k,0)} = A_1^* \psi_k^{(p_k-1,\,0)},\\
&\gamma_k^{(i,j)} = A_1^* \psi_k^{(i-1,\,j)} + A_2^* \psi_k^{(i,\,j-1)}, \quad (i,j) \in J_k^+,\\
&\gamma_k^{(0,p_k)} = A_2^* \psi_k^{(0,\,p_k-1)}.
\end{aligned}$$

Выбирая из каждого множества J_k^+, $k = 1, \ldots, n$ по одному элементу, составим из них множество

$$\widetilde{J} = \{ (i_1, j_1),\ (i_2, j_2),\ \ldots,\ (i_n, j_n) \}, \tag{4}$$

здесь $(i_k, j_k) \in J_k^+$, $k = 1, \ldots, n$. Множество $\widetilde{J}$ можно выбрать $(p_1 + 1)(p_2 + 1)...(p_n + 1)$ способами.

Для каждого множества $\widetilde{J}$ построим обобщенный регуляризатор Шмидта

$$\widetilde{B}_{\widetilde{J}} = B + K_{\widetilde{J}}, \quad K_{\widetilde{J}} = \sum_{k=1}^{n} \left\langle \cdot, \gamma_k^{(i_k, j_k)} \right\rangle z_k^{(i_k, j_k)}, \tag{5}$$

где $(i_k, j_k) \in \widetilde{J}$, $k = 1, \ldots, n$.

Аналогично работе [1] показывается справедливость обобщенной леммы Шмидта, заключающаяся в том, что оператор $\Gamma_{\widetilde{J}} = \widetilde{B}_{\widetilde{J}}^{-1}$ существует и, следовательно, уравнение

$$\widetilde{B}_{\widetilde{J}} x = g$$

имеет единственное решение.

Для любого множества $\widetilde{J}$ оператор $\Gamma_{\widetilde{J}}$ обладает свойством

$$\Gamma_{\widetilde{J}} z_k^{(i_k, j_k)} = \varphi_k, \tag{6}$$

где $(i_k, j_k) \in J_k^+$, $k = 1, \ldots, n$.

Дальнейшие рассуждения проведем для каждого фиксированного множества $\widetilde{J}$. Для краткости обозначим $\Gamma_{\widetilde{J}} = \Gamma$.

Используя обобщенный регуляризатор $\widetilde{B}_{\widetilde{J}}$, применим метод Ляпунова-Шмидта для решения уравнения (1). Для этого, возмущая левую и правую часть уравнения (1) слагаемым $K_{\widetilde{J}} x$, получим систему

$$\begin{cases} \widetilde{B}_{\widetilde{J}} x = h + \varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k z_k^{(i_k, j_k)}, \\ \xi_k = < x, \gamma_k^{(i_k, j_k} >, \ \ i_k + j_k = p_k, \ \ k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{7}$$

Решение системы (7) ищем в виде

$$x = w + v, \quad v = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k, \tag{8}$$

Подставляя (8) в первое уравнение системы (7), получим

$$w = \sum_{k=1}^{n} \xi_k (\varepsilon_1 \Gamma A_1 x + \varepsilon_2 \Gamma A_2 x)[I - (\varepsilon_1 \Gamma A_1 x + \varepsilon_2 \Gamma A_2 x)]^{-1} \varphi_k + \\ + [I - (\varepsilon_1 \Gamma A_1 x + \varepsilon_2 \Gamma A_2 x)]^{-1} \Gamma h. \tag{9}$$

Учитывая (6), имеем

$$[I - (\varepsilon_1 \Gamma A_1 x + \varepsilon_2 \Gamma A_2 x)]^{-1} \varphi_k = \theta_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \sum_{r=0}^{p_k - 1} \sum_{i+j=r} \varepsilon_1^i \varepsilon_2^j \varphi_k^{(i,j)}, \tag{10}$$

где $\varphi_k^{(i,j)}$ – элементы A-жордановой сетки, определенной в работе [1], $k = 1, \dots, n$,

$$\theta_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{1 - S_k}, \quad S_k = \sum_{i+j=p_k} \varepsilon_1^i \varepsilon_2^j.$$

Подставляя (8) во второе уравнение системы (7) с учетом (9) и (10), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения ξ_k

$$S_k \xi_k = -\sum_{r=1}^{p_k-1} \sum_{i+j=r} \varepsilon_1^i \, \varepsilon_2^j \, d_k^{(i,j)}, \quad k = 1, \dots, n, \tag{11}$$

где

$$d_k^{(i,j)} =< h, \psi_k^{(i,j)} > .$$

Здесь $\psi_k^{(i,j)}$ – элементы A^*-жордановой сетки, определенной в работе [1].

Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 = 0$, то решением системы (11) являются произвольные постоянные c_k, и уравнение (1) имеет n-параметрическое семейство решений

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k + \Gamma h.$$

Если же хотя бы одно из ε_1 или ε_2 отлично от нуля, то система (11) имеет единственное решение

$$\xi_k = -\frac{1}{S_k} \sum_{r=1}^{p_k-1} \sum_{i+j=r} \varepsilon_1^i \, \varepsilon_2^j \, d_k^{(i,j)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

и решения уравнения (1) могут быть записаны в виде

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \theta_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \sum_{r=0}^{p_k-1} \sum_{i+j=r} \varepsilon_1^i \varepsilon_2^j \, \varphi_k^{(i,j)} + [I - (\varepsilon_1 \Gamma_{\tilde{J}} A_1 x + \varepsilon_2 \Gamma_{\tilde{J}} A_2 x)]^{-1} \Gamma_{\tilde{J}} h.$$

Литература

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.

2. Шаманаев П. А. О некоторых обобщениях жордановых наборов линейных оператор-функций, зависящих от двух малых параметров [Электронный ресурс] // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: материалы XIII Международной научной конференции. (Саранск, 12-16 июля 2017 г.). - Саранск: СВМО, 2017. - С. 511-516. Режим доступа: http://conf.svmo.ru/files/deamm2017/papers/paper69.pdf. - Дата обращения: 25.08.2019.

MSC2010 47A13

On the perturbation of a linear equation by two small linear terms

P. A. Shamanaev

National Research Mordovia State University