УДК 517.958 519.6

Конечные элементы, связанные с ортогональными финитными функциями, в методах решения дифференциальных уравнений в частных производных

Леонтьев В.Л.[1], Ефременков И.В.[2]

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого[1], Ульяновский государственный университет[2]

Конечные элементы (КЭ) на основе ортогональных финитных функций (ОФФ) предлагаются для получения приближенных численно-аналитических решений двумерных и трехмерных задач, в постановках которых используются дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП). В качестве примеров применения таких КЭ берутся плоские и трехмерные задачи теории упругости, постановки которых даны «в перемещениях» после исключения деформаций и напряжений из их смешанных постановок. Решения двумерных и трехмерных задач ищутся с помощью алгоритма метода конечных элементов (МКЭ) после формирования локальной матрицы жесткости конечного элемента на основе ОФФ, используемых при построении функций формы. Показана эффективность таких МКЭ, основанных на применении вариационного принципа Лагранжа и ОФФ. МКЭ дают приближенные численно-аналитические решения задач теории упругости более высокой точности по сравнению с МКЭ ANSYS, связанным, например, в плоской задаче с КЭ Plane142, причем с существенно меньшими затратами машинного времени на аналогичных сетках.

Ортогональность финитных функций создает возможность исключения части узловых неизвестных (напряжений, деформаций) до начала решения глобальных систем сеточных алгебраических уравнений (ССУ) при сохранении фундаментального свойства базисных функций МКЭ – финитности и устраняет основной недостаток смешанных методов – большее число узловых неизвестных по сравнению с МКЭ, связанных с вариационным принципом Лагранжа. Вместе с тем, в отличие от последних методов, смешанный МКЭ позволяет находить приближенные решения (ПР) для производных основной неизвестной функции (перемещения) без операции численного дифференцирования, поскольку производные (деформации и напряжения) аппроксимируются независимо, вследствие чего ПР для производных имеет гладкость такую же, как у основной функции (перемещения). Показывается, что применение ОФФ также повышает точность решений, получаемых с помощью МКЭ «в перемещениях» и при этом существенно снижаются затраты машинного времени за счет возрастания числа нулевых элементов глобальной сеточной матрицы.

В качестве примера дается постановка стационарной (эллиптической) краевой задачи плоской теории упругости, содержащая ДУЧП и краевые условия, для случая изотропного и однородного материала. На основе ОФФ в пределах прямоугольного КЭ формируются кусочно-билинейные непрерывные сеточные интерполяционные функции – ортогональные финитные функции формы. Каждая из функций формы отличается от нуля только в пределах своего конечного носителя. Строится линейная комбинация функций формы с неизвестными постоянными коэффициентами – узловыми значениями перемещений, представляющая собой множество возможных приближенных решений задачи. Подстановка линейной комбинации в функционал Лагранжа порождает локальную матрицу жесткости, глобальную матрицу жесткости, а также локальный и глобальный векторы нагрузок. Необходимые условия экстремума функционала Лагранжа приводят к глобальной ССУ, в которой затем дополнительно учитывается главное краевое условие (естественное краевое условие учитывается непосредственно вариационным принципом и для его выполнения не требуется дополнительная процедура). Решение ССУ дает искомые значения постоянных коэффициентов линейной комбинации, и приближенное численно-аналитическое решение оказывается найденным. ОФФ не только дают возможности устранить недостатки смешанных МКЭ, связанных с вариационными принципами Рейсснера и Ху-Васидзу. Выполненные расчеты показали, что ОФФ позволяют при помощи КЭ в рамках постановок задач «в перемещениях» находить приближенные решения более высокой точности по сравнению, например, с решениями ANSYS, причем с более низкими затратами машинного времени, поскольку ОФФ за счет их ортогональности делают глобальную матрицу ССУ существенно более разреженной по сравнению с МКЭ, в которых используются классические сплайны, не являющиеся ортогональными. Заметим, что излагаемый на примере плоской задачи теории упругости алгоритм МКЭ, связанный с ОФФ, естественным образом распространяется не только на трехмерные задачи теории упругости, но и на многие другие задачи из различных областей естествознания. Так, например, смешанная постановка задачи теплопроводности содержит только первые частные производные по координатам и две основные неизвестные функции – температуру и вектор потока тепла, а ее постановка – аналог постановки задач теории упругости «в перемещениях», содержит только температуру и частные производные по координатам второго порядка (оператор Лапласа в случае термически изотропного и однородного материала).

В работах [1-5] показано, что сочетание таких свойств сеточных базисных ОФФ, как финитность и ортогональность, приводит к высокой эффективности использования ОФФ при создании новых интегральных преобразований, потенциала взаимодействия атомов, и применения ОФФ при построении алгоритмов МКЭ, предназначенных для решения задач теорий стержней, пластин и оболочек, трехмерных упругих тел в смешанной постановке. Здесь раскрываются возможности ОФФ в случае решения краевых задач в частных производных с помощью МКЭ при использовании постановок задач «в перемещениях» теории упругости или аналогичных постановок из других областей естествознания. Заметим, что, ОФФ были также с успехом использованы при создании нового алгоритма криптографии, существенно повысившего защищенность передаваемой информации от атак.

Литература

1. Леонтьев В. Л., Риков Е. А. Интегральные преобразования, связанные с ортогональными финитными функциями, в задачах спектрального анализа сигналов // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 7. С. 93-100.

2. Леонтьев В. Л., Михайлов И. С. О построении потенциала взаимодействия атомов, основанном на ортогональных финитных функциях // Нано- и микросистемная техника. 2011. № 9 (134). С. 48-50.

3. Леонтьев В. Л., Мелентьев А. Ю. Сеточные методы расчета криволинейных стержней // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 10. С. 95.

4. Красильников А. Р., Леонтьев В. Л. О вариационно-сеточном методе теории пластин // Математическое моделирование. 2005. Т. 17, № 3. С. 23-34.

5. Леонтьев В. Л. Вариационно-сеточный метод решения задач о собственных колебаниях упругих трехмерных тел, связанный с использованием ортогональных

финитных функций // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2002. № 3. С. 117.

MSC2010 35Q74 65M60

Finite Elements, connected with Orthogonal Finite Functions, in Methods of solution of Differential Equations in Partial Derivatives

V.L. Leontiev[1], I.V. Efremenkov[2]

Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University[1], Ulyanovsk state university[2]